Mathématiques

Classe de seconde

Introduction

La seconde est une classe de détermination. Le programme de mathématiques y a pour fonction :

- de conforter l'acquisition par chaque élève de la culture mathématique nécessaire à la vie en société et à la compréhension du monde ;
- d'assurer et de consolider les bases de mathématiques nécessaires aux poursuites d'étude du lycée ;
- d'aider l'élève à construire son parcours de formation.

Pour chaque partie du programme, ***les capacités attendues sont clairement identifiées*** et l'accent est mis systématiquement sur les types de problèmes que les élèves doivent savoir résoudre. L'acquisition de techniques est indispensable, mais doit être au service de la pratique du raisonnement qui est la base de l'activité mathématique des élèves. Il faut, en effet, que chaque élève, quels que soient ses projets, puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification que permet la maîtrise de l'abstraction.

Objectif général

L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

- modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
- conduire un raisonnement, une démonstration ;
- pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;
- faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;
- pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;
- utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines. Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. Au niveau d'une classe de seconde de détermination, les solutions attendues sont aussi en général simples et courtes.

Raisonnement et langage mathématiques

Le développement de l'argumentation et l'***entraînement à la logique*** font partie intégrante des exigences des classes de lycée. À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant et, par exemple, à distinguer implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ***ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques*** mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne doivent pas être fixés d'emblée ni faire l'objet de séquences spécifiques mais doivent être introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité. Comme les éléments de logique mathématique, les notations et le vocabulaire mathématiques sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ. Pour autant, ils font pleinement partie du programme : les objectifs figurent, avec ceux de la logique, à la fin du programme.

Utilisation d'outils logiciels

L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, ouvre largement la dialectique entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement.
L'utilisation régulière de ces outils peut intervenir selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective adapté ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors du temps de classe (par exemple au CDI ou à un autre point d'accès au réseau local).

Diversité de l'activité de l'élève

La diversité des activités mathématiques proposées :

- chercher, expérimenter – en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit ;

doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe. Parmi ceux-ci les travaux écrits faits hors du temps scolaire permettent, à travers l'autonomie laissée à chacun, le développement des qualités d'initiative. Ils doivent être conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité des aptitudes des élèves.

Le calcul est un outil essentiel pour la pratique des mathématiques dans la résolution de problème. Il est important en classe de seconde de poursuivre l'entraînement des élèves dans ce domaine par la pratique régulière du calcul mental, du calcul numérique et du calcul littéral. L'utilisation d'outils logiciels de calcul – sur calculatrice ou sur ordinateur – contribue à cet entraînement.

Organisation du programme

Le programme est divisé en trois parties,

- Fonctions
- Géométrie
- Statistiques et probabilités

Les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique d'une part et du raisonnement d'autre part, sont transversales et doivent être développées à l'intérieur de chacune des trois parties. Des activités de type algorithmique possibles sont signalées dans les différentes parties du programme et précédées du symbole $\diamond$.

Le programme n'est pas un plan de cours et ne contient pas de préconisations pédagogiques. Il fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités et pour cela ***indique les types de problèmes que les élèves doivent savoir résoudre***.

Évaluation des élèves

Les élèves sont évalués en fonction des capacités attendues et selon des modes variés : travaux écrits, rédaction de travaux de recherche, compte-rendus de travaux pratiques. L'évaluation doit être en phase avec les objectifs de formation rappelés au début de cette introduction.

1. Fonctions

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :
- un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;
- un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés : géométrie plane ou dans l'espace, biologie, économie, physique, actualité etc. Les logiciels mis à la disposition des élèves (tableur, traceur de courbes, logiciels de géométrie dynamique, de calcul numérique, de calcul formel, etc.) peuvent être utilement exploités.

Par ailleurs, la résolution de problèmes vise aussi à progresser dans la maîtrise du calcul algébrique et à approfondir la connaissance des différents types de nombres, en particulier pour la distinction d'un nombre de ses valeurs approchées.

Il s'agit également d'apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données. Autrement dit, il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions Image, antécédent, courbe représentative.	• Traduire le lien entre deux quantités par une formule. Pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule : • identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ; • déterminer l'image d'un nombre ; • rechercher des antécédents d'un nombre.	Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. Quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou sur **N**, voire de fonctions de deux variables (aire en fonction des dimensions) sont à donner.
Étude qualitative de fonctions Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	• Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. • Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations. Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations : • comparer les images de deux nombres d'un intervalle ; • déterminer tous les nombres dont l'image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée.	Les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année. ◇ Même si les logiciels traceurs de courbes permettent d'obtenir rapidement la représentation graphique d'une fonction définie par une formule algébrique, il est intéressant, notamment pour les fonctions définies par morceaux, de faire écrire aux élèves un algorithme de tracé de courbe.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Expressions algébriques Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.	• Associer à un problème une expression algébrique. • Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. • Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples.	Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.
Équations Résolution graphique et algébrique d'équations.	• Mettre un problème en équation. • Résoudre une équation se ramenant au premier degré. ◇ Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.	Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique. Utiliser, en particulier, les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice, un logiciel.
Fonctions de référence Fonctions linéaires et fonctions affines	• Donner le sens de variation d'une fonction affine. • Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b.	On fait le lien entre le signe de $ax + b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative.
Variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	• Connaître les variations des fonctions carré et inverse. • Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse.	Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires.
Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2.	• Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.
Fonctions homographiques.	• Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.	Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	• Modéliser un problème par une inéquation. • Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$. • Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. • Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : • combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, • mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2 ou homographiques.
Trigonométrie « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.	• On fait le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$.	On fait le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège. La notion de radian n'est pas exigible.

2. Géométrie

L'objectif de l'enseignement de la géométrie plane est de rendre les élèves capables d'étudier un problème dont la résolution repose sur des calculs de distance, la démonstration d'un alignement de points ou du parallélisme de deux droites, la recherche des coordonnées du point d'intersection de deux droites, en mobilisant des techniques de la géométrie plane repérée.

Les configurations étudiées au collège, à base de triangles, quadrilatères, cercles, sont la source de problèmes pour lesquels la géométrie repérée et les vecteurs fournissent des outils nouveaux et performants.

En fin de compte, l'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle, d'un polygone – toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère, l'utilisation ou non de vecteurs.

Dans le cadre de la résolution de problèmes, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par les élèves leur donne une plus grande autonomie et encourage leur prise d'initiative.

La définition proposée des vecteurs permet d'introduire rapidement l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Cette introduction est faite en liaison avec la géométrie plane repérée. ***La translation, en tant que transformation du plan, n'est pas étudiée en classe de seconde.***

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Coordonnées d'un point du plan Abscisse et ordonnée d'un point dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Distance de deux points du plan. Milieu d'un segment.	• Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées. • Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées. • Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	Un repère orthonormé du plan est défini par trois points (O, I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet O. À l'occasion de certains travaux, on pourra utiliser des repères non orthonormés.
Configurations du plan Triangles, quadrilatères, cercles.	Pour résoudre des problèmes : • Utiliser les propriétés des triangles, des quadrilatères, des cercles. • Utiliser les propriétés des symétries axiale ou centrale.	Les activités des élèves prennent appui sur les propriétés étudiées au collège et peuvent s'enrichir des apports de la géométrie repérée. ◇ Le cadre de la géométrie repérée offre la possibilité de traduire numériquement des propriétés géométriques et permet de résoudre certains problèmes par la mise en œuvre d'algorithmes simples.
Droites Droite comme courbe représentative d'une fonction affine.	• Tracer une droite dans le plan repéré. • Interpréter graphiquement le coefficient directeur d'une droite.	
Équations de droites.	• Caractériser analytiquement une droite.	On démontre que toute droite a une équation soit de la forme $y = mx + p$, soit de la forme $x = c$.
Droites parallèles, sécantes.	• Établir que trois points sont alignés, non alignés. • Reconnaître que deux droites sont parallèles, sécantes. • Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.	On fait la liaison avec la colinéarité des vecteurs. C'est l'occasion de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Vecteurs		
Définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B. Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé.		À tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
Égalité de deux vecteurs : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.	• Savoir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.	
Coordonnées d'un vecteur dans un repère.	• Connaître les coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.	
Somme de deux vecteurs.	• Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs dans un repère.	La somme des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de vecteur $\overrightarrow{v}$.
Produit d'un vecteur par un nombre réel.	• Utiliser la notation $\lambda \overrightarrow{u}$. • Établir la colinéarité de deux vecteurs.	Pour le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b) dans un repère, le vecteur $\lambda \overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda a, \lambda b)$ dans le même repère. Le vecteur $\lambda \overrightarrow{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.
Relation de Chasles.	• Construire géométriquement la somme de deux vecteurs. • Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.	

S'adressant à tous les élèves de seconde, le programme de géométrie dans l'espace a pour objectif :
- de développer la vision dans l'espace des élèves en entretenant les acquis du collège concernant les solides usuels ;
- d'introduire les notions de plans et droites de l'espace et leurs positions respectives ;
- de fournir ainsi des configurations conduisant à des problèmes aptes à mobiliser d'autres champs des mathématiques (géométrie plane, fonctions, probabilités) ou de la physique.

Il importe donc tout particulièrement que la géométrie dans l'espace soit abordée tôt dans l'année scolaire.
L'utilisation d'un logiciel de visualisation et de construction est un élément déterminant dans « l'apprentissage de l'espace ».
Les élèves doivent être capable de représenter en perspective parallèle (dite aussi cavalière) une configuration simple et d'effectuer des constructions sur une telle figure. Ils doivent aussi être capables de mobiliser pour des démonstrations les théorèmes de géométrie plane.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Géométrie dans l'espace		
Les solides usuels étudiés au collège : parallélépipède rectangle, pyramides, cône et cylindre de révolution, sphère.	• Manipuler, construire, représenter en perspective des solides.	C'est l'occasion d'effectuer des calculs de longueur, d'aire et de volumes.
Droites et plans, positions relatives. Droites et plans parallèles.		On entraîne les élèves à l'utilisation autonome d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

3. Statistiques et probabilités

Pour des questions de présentation du programme, les cadres relatifs à l'enseignement des statistiques et des probabilités sont présentés séparément à la suite l'un de l'autre. Pour autant, ces enseignements sont en relation étroite l'un avec l'autre et doivent faire l'objet d'allers et retours.

Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes

dans le cadre de l'analyse de données, rendre les élèves capables

- de déterminer et interpréter des résumés d'une série statistique ;
- de réaliser la comparaison de deux séries statistiques à l'aide d'indicateurs de position et de dispersion, ou de la courbe des fréquences cumulées ;

dans le cadre de l'échantillonnage

- faire réfléchir les élèves à la conception et la mise en œuvre d'une simulation ;
- sensibiliser les élèves à la fluctuation d'échantillonnage, aux notions d'intervalle de fluctuation et d'intervalle de confiance et à l'utilisation qui peut en être faite.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Statistique descriptive, analyse de données Caractéristiques de position et de dispersion • médiane, quartiles ; • moyenne.	• Utiliser un logiciel (par exemple, un tableur) ou une calculatrice pour étudier une série statistique. • Passer des effectifs aux fréquences, calculer les caractéristiques d'une série définie par effectifs ou fréquences. • Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées. • Représenter une série statistique graphiquement (nuage de points, histogramme, courbe des fréquences cumulées).	L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, d'un fichier mis à disposition par l'INSEE), synthétiser l'information et proposer des représentations pertinentes.
Échantillonnage Notion d'échantillon. Intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95%*. Réalisation d'une simulation.	• Concevoir, mettre en œuvre et exploiter des simulations de situations concrètes à l'aide du tableur ou d'une calculatrice. • Exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage.	Un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience. À l'occasion de la mise en place d'une simulation, on peut : • utiliser les fonctions logiques d'un tableur ou d'une calculatrice, ◇ mettre en place des instructions conditionnelles dans un algorithme. L'objectif est d'amener les élèves à un questionnement lors des activités suivantes : • l'estimation d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon ; • la prise de décision à partir d'un échantillon.

* L'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p, proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à $0,95$, la fréquence observée dans un échantillon de taille n. Cet intervalle peut être obtenu, de façon approchée, par simulation. Le professeur peut indiquer aux élèves le résultat suivant, utilisable dans la pratique pour des échantillons de taille $n \geqslant 25$ et des proportions p du caractère comprises entre $0,2$ et $0,8$: si f désigne la fréquence du caractère dans l'échantillon, f appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'au moins $0,95$. Le professeur peut faire percevoir expérimentalement la validité de cette propriété mais **elle n'est pas exigible**.

Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes

dans le cadre des probabilités, rendre les élèves capables :

- d'étudier et modéliser des expériences relevant de l'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou de dés, tirage de cartes) ;
- de proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences dans des situations simples ;
- d'interpréter des événements de manière ensembliste ;
- de mener à bien des calculs de probabilité.

Les situations étudiées concernent des expériences à une ou plusieurs épreuves.
◇ La répétition d'expériences aléatoires peut donner lieu à l'écriture d'algorithmes (marches aléatoires).

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Probabilité sur un ensemble fini		
Probabilité d'un événement.	• Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité. • Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées.	La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux.
Réunion et intersection de deux événements, formule : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.	• Connaître et exploiter cette formule.	

Algorithmique (objectifs pour le lycée)

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, les élèves ont rencontré des algorithmes (algorithmes opératoires, algorithme des différences, algorithme d'Euclide, algorithmes de construction en géométrie). Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés :

- à décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- à en réaliser quelques uns à l'aide d'un tableur ou d'un petit programme réalisé sur une calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- à interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante.

À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de petits programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie).

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :
- d'écrire une formule permettant un calcul ;
- d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction ;

ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.

Boucle et itérateur, instruction conditionnelle

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :
- de programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
- de programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Annexe

MATHÉMATIQUES
CYCLE TERMINAL DE LA SÉRIE SCIENTIFIQUE
CLASSE DE PREMIÈRE

L'enseignement des mathématiques au collège et au lycée a pour but de donner à chaque élève la culture mathématique indispensable pour sa vie de citoyen et les bases nécessaires à son projet de poursuite d'études.
Le cycle terminal de la série *S* procure un bagage mathématique solide aux élèves désireux de s'engager dans des études supérieures scientifiques, en les formant à la pratique d'une démarche scientifique et en renforçant leur goût pour des activités de recherche.
L'apprentissage des mathématiques cultive des compétences qui facilitent une formation tout au long de la vie et aident à mieux appréhender une société en évolution. Au-delà du cadre scolaire, il s'inscrit dans une perspective de formation de l'individu.

Objectif général

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :
- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

Raisonnement et langage mathématiques

Comme en classe de seconde, les capacités d'argumentation, de rédaction d'une démonstration et de logique font partie intégrante des exigences du cycle terminal.
Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne font pas l'objet de cours spécifiques mais prennent naturellement leur place dans tous les champs du programme. Il importe toutefois de prévoir des moments d'institutionnalisation de certains concepts ou types de raisonnement, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation.
De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne sont pas fixés d'emblée, mais sont introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité.
Il convient de prévoir des temps de synthèse, l'objectif étant que ces éléments soient maîtrisés en fin de cycle terminal.

Utilisation d'outils logiciels

L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.
En particulier, lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel peut limiter le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.
L'utilisation de ces outils intervient selon trois modalités :
- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors de la classe.

Diversité de l'activité de l'élève

Les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d'autres disciplines. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :
- chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- choisir et appliquer des techniques de calcul ;
- mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit.

Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts.

Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, les travaux hors du temps scolaire contribuent à la formation des élèves et sont absolument essentiels à leur progression. Ils sont conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité de leurs aptitudes.
Les modes d'évaluation prennent également des formes variées, en phase avec les objectifs poursuivis. En particulier, l'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes est à évaluer.

Organisation du programme

Le programme fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités. Il est conçu pour favoriser une acquisition progressive des notions et leur pérennisation. Son plan n'indique pas la progression à suivre.
Les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique d'une part et du raisonnement d'autre part sont rappelées en fin de programme. Elles doivent être exercées à l'intérieur de chaque champ du programme.
Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ◙. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues.
De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ◇.

1. Analyse

Le programme s'inscrit, comme celui de la classe de seconde, dans le cadre de la résolution de problèmes. Les situations proposées répondent à des problématiques clairement identifiées d'origine purement mathématique ou en lien avec d'autres disciplines.
Un des objectifs de ce programme est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets.
Ainsi, on consolide l'ensemble des fonctions mobilisables, enrichi de deux nouvelles fonctions de référence, les fonctions racine carrée et valeur absolue.
On introduit un nouvel outil : la dérivation. L'acquisition du concept de dérivée est un point fondamental du programme de première. Les fonctions étudiées sont toutes régulières et on se contente d'une approche intuitive de la notion de limite finie en un point. Le calcul de dérivées dans des cas simples est un attendu du programme ; dans le cas de situations plus complexes, on sollicite les logiciels de calcul formel.
L'étude de phénomènes discrets fournit un moyen d'introduire les suites et leur génération en s'appuyant sur des registres différents (algébrique, graphique, numérique, géométrique) et en faisant largement appel à des logiciels. Les interrogations sur leur comportement amènent à une première approche de la notion de limite qui sera développée en classe de terminale. L'étude des suites se prête tout particulièrement à la mise en place d'activités algorithmiques.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Second degré Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	• Déterminer et utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.	On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de seconde. ◇ Des activités algorithmiques doivent être réalisées dans ce cadre.
Étude de fonctions Fonctions de référence $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \lvert x \rvert$.	• Connaître les variations de ces deux fonctions et leur représentation graphique. ◙ Démontrer que la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$. ◙ Justifier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.	Aucune technicité dans l'utilisation de la valeur absolue n'est attendue.
Sens de variation des fonctions $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$, la fonction *u* étant connue, *k* étant une fonction constante et λ un réel.	• Exploiter ces propriétés pour déterminer le sens de variation de fonctions simples.	◙ On nourrit la diversité des raisonnements travaillés dans les classes précédentes en montrant à l'aide de contre-exemples qu'on ne peut pas énoncer de règle générale donnant le sens de variation de la somme ou du produit de deux fonctions. L'étude générale de la composée de deux fonctions est hors programme.

Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point. Fonction dérivée.	● Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand *h* tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé.
Dérivée des fonctions usuelles : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^n$ (*n* entier naturel non nul). Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient.	● Calculer la dérivée de fonctions.	On évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation. Si nécessaire, dans le cadre de la résolution de problèmes, le calcul de la dérivée d'une fonction est facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. Il est intéressant de présenter le principe de démonstration de la dérivation d'un produit.
Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	● Exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités.	Il n'est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction. On traite quelques problèmes d'optimisation.
Suites Modes de génération d'une suite numérique.	● Modéliser et étudier une situation à l'aide de suites. ◇ Mettre en œuvre des algorithmes permettant : - d'obtenir une liste de termes d'une suite ; - de calculer un terme de rang donné.	Il est important de varier les approches et les outils. L'utilisation du tableur et la mise en œuvre d'algorithmes sont l'occasion d'étudier en particulier des suites générées par une relation de récurrence.
Suites arithmétiques et suites géométriques.	▣ Établir et connaître les formules donnant $1+2+\ldots+n$ et $1+q+\ldots+q^n$.	
Sens de variation d'une suite numérique. Approche de la notion de limite d'une suite à partir d'exemples.	● Exploiter une représentation graphique des termes d'une suite.	◇ On peut utiliser un algorithme ou un tableur pour traiter des problèmes de comparaison d'évolutions et de seuils. Par exemple, dans le cas d'une suite croissante non majorée, on peut déterminer un rang à partir duquel tout terme de la suite est supérieur à un nombre donné. Le tableur, les logiciels de géométrie dynamique et de calcul sont des outils adaptés à l'étude des suites, en particulier pour l'approche expérimentale de la notion de limite. On ne donne pas de définition formelle de la limite.

2. Géométrie

L'objectif est de renforcer la capacité des élèves à étudier des problèmes dont la résolution repose sur des calculs de distances et d'angles, la démonstration d'alignement, de parallélisme ou d'orthogonalité.
L'outil nouveau est le produit scalaire, dont il importe que les élèves sachent choisir la forme la mieux adaptée au problème envisagé.
L'introduction de cette notion implique un travail sur le calcul vectoriel non repéré et la trigonométrie.
La géométrie dans l'espace est source de situations permettant de mettre en œuvre de nouveaux outils de l'analyse ou de la géométrie plane, notamment dans des problèmes d'optimisation.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Géométrie plane Condition de colinéarité de deux vecteurs : $xy' - yx' = 0$.		
Vecteur directeur d'une droite. Équation cartésienne d'une droite.	▣ Utiliser la condition de colinéarité pour obtenir une équation cartésienne de droite. ● Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un vecteur directeur et un point. ● Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie par une équation cartésienne.	On fait le lien entre coefficient directeur et vecteur directeur. L'objectif est de rendre les élèves capables de déterminer efficacement une équation cartésienne de droite par la méthode de leur choix.
Expression d'un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires.	● Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes.	On ne se limite pas au cadre de la géométrie repérée.
Trigonométrie Cercle trigonométrique. Radian. Mesure d'un angle orienté, mesure principale.	● Utiliser le cercle trigonométrique, notamment pour : - déterminer les cosinus et sinus d'angles associés ; - résoudre dans **R** les équations d'inconnue *x* : $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$.	L'étude des fonctions cosinus et sinus n'est pas un attendu du programme.
Produit scalaire dans le plan Définition, propriétés.	● Calculer le produit scalaire de deux vecteurs par différentes méthodes : - projection orthogonale ; - analytiquement ; - à l'aide des normes et d'un angle ; - à l'aide des normes. ● Choisir la méthode la plus adaptée en vue de la résolution d'un problème.	▣ Il est intéressant de démontrer l'égalité des expressions attachées à chacune de ces méthodes. ▣ La démonstration du théorème de la médiane fournit l'occasion de travailler le calcul vectoriel en lien avec le produit scalaire.
Vecteur normal à une droite.	● Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un point et un vecteur normal. ● Déterminer un vecteur normal à une droite définie par une équation cartésienne.	
Applications du produit scalaire : calculs d'angles et de longueurs ; formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus.	▣ Déterminer une équation de cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre. ▣ Démontrer que : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	La relation de Chasles pour les angles orientés est admise.

3. Statistiques et probabilités

L'étude et la comparaison de séries statistiques menées en classe de seconde se poursuivent avec la mise en place de nouveaux outils dans l'analyse de données. L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, de fichiers mis à disposition par l'Insee).
La notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de modéliser des situations aléatoires, d'en proposer un traitement probabiliste et de justifier certains faits observés expérimentalement en classe de seconde.
L'utilisation des arbres pondérés est développée pour modéliser la répétition d'expériences identiques et indépendantes. Elle est restreinte à ce cadre afin d'éviter toute confusion avec des situations relevant des probabilités conditionnelles.
Dans le cas particulier d'expériences identiques et indépendantes à deux issues, on introduit la loi binomiale.
En s'appuyant sur cette loi, on poursuit la formation des élèves dans le domaine de l'échantillonnage.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Statistique descriptive, analyse de données Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type. Diagramme en boîte.	• Utiliser de façon appropriée les deux couples usuels qui permettent de résumer une série statistique : (moyenne, écart-type) et (médiane, écart interquartile). • Étudier une série statistique ou mener une comparaison pertinente de deux séries statistiques à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.	On utilise la calculatrice ou un logiciel pour déterminer la variance et l'écart-type d'une série statistique. Des travaux réalisés à l'aide d'un logiciel permettent de faire observer des exemples d'effets de structure lors du calcul de moyennes.
Probabilités Variable aléatoire discrète et loi de probabilité. Espérance, variance et écart-type.	• Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire. • Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.	À l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne et la variance d'une série de données. On exploite les fonctionnalités de la calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire. ⊡ On démontre les formules suivantes sur l'espérance et la variance : $E(aX+b)=aE(X)+b$ et $V(aX)=a^2V(X)$.
Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues. Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli. Schéma de Bernoulli, loi binomiale (loi du nombre de succès). Coefficients binomiaux, triangle de Pascal.	• Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré. • Utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation. • Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale. • Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale.	Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. La notion de probabilité conditionnelle est hors programme. On peut aussi traiter quelques situations autour de la loi géométrique tronquée. ◇ On peut simuler la loi géométrique tronquée avec un algorithme. La représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. On peut ainsi : faciliter la découverte de la loi binomiale pour des petites valeurs de *n* ($n \leq 4$) ; introduire le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ comme nombre de chemins de l'arbre réalisant *k* succès pour *n* répétitions ; établir enfin la formule générale de la loi binomiale.

	▣ Démontrer que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.	Cette égalité est établie en raisonnant sur le nombre de chemins réalisant $k+1$ succès pour $n+1$ répétitions. On établit également la propriété de symétrie des coefficients binomiaux.
	• Représenter graphiquement la loi binomiale.	L'utilisation des coefficients binomiaux dans des problèmes de dénombrement et leur écriture à l'aide des factorielles ne sont pas des attendus du programme. En pratique, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour obtenir les valeurs des coefficients binomiaux, calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale.
Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale.	• Utiliser l'espérance d'une loi binomiale dans des contextes variés.	La formule donnant l'espérance de la loi binomiale est conjecturée puis admise, celle de la variance est admise. ◇ On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme.
Échantillonnage Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence.	• Exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.	L'objectif est d'amener les élèves à expérimenter la notion de « différence significative » par rapport à une valeur attendue et à remarquer que, pour une taille de l'échantillon importante, on conforte les résultats vus en classe de seconde. ◇ L'intervalle de fluctuation peut être déterminé à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme. Le vocabulaire des tests (test d'hypothèse, hypothèse nulle, risque de première espèce) est hors programme.

Algorithmique

En seconde, les élèves ont conçu et mis en œuvre quelques algorithmes. Cette formation se poursuit tout au long du cycle terminal.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés à :
- décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- en réaliser quelques-uns à l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (analyse, géométrie, statistiques et probabilités, logique), mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets.

À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie).

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :
- d'écrire une formule permettant un calcul ;
- d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction ;
- ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.

Boucle et itérateur, instruction conditionnelle

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de :
- programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
- programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Notations et raisonnement mathématiques

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques, mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

En complément des objectifs rappelés ci-dessous, un travail sur la notion d'équivalence doit naturellement être mené en série scientifique (propriété caractéristique, raisonnement par équivalence).

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples, à :

- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- formuler la négation d'une proposition ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Annexe
Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques
Classe terminale de la série scientifique

L'enseignement des mathématiques au collège et au lycée a pour but de donner à chaque élève la culture mathématique indispensable pour sa vie de citoyen et les bases nécessaires à son projet de poursuite d'études.
Le cycle terminal de la série S procure un bagage mathématique solide aux élèves désireux de s'engager dans des études supérieures scientifiques, en les formant à la pratique d'une démarche scientifique et en renforçant leur goût pour des activités de recherche.
L'apprentissage des mathématiques cultive des compétences qui facilitent une formation tout au long de la vie et aident à mieux appréhender une société en évolution. Au-delà du cadre scolaire, il s'inscrit dans une perspective de formation de l'individu.

Objectif général

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :
- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

Raisonnement et langage mathématiques

Comme en classe de seconde, les capacités d'argumentation, de rédaction d'une démonstration et de logique font partie intégrante des exigences du cycle terminal.

Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne font pas l'objet de cours spécifiques mais prennent naturellement leur place dans tous les champs du programme. Il importe toutefois de prévoir des moments d'institutionnalisation de certains concepts ou types de raisonnement, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation.

De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne sont pas fixés d'emblée, mais sont introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité.

Il convient de prévoir des temps de synthèse, l'objectif étant que ces éléments soient maîtrisés en fin de cycle terminal.

Utilisation d'outils logiciels

L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.

En particulier lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel limite le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.

L'utilisation de ces outils intervient selon trois modalités :
- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors de la classe.

Diversité de l'activité de l'élève

Les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d'autres disciplines. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :
- chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- choisir et appliquer des techniques de calcul ;
- mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit.

Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur

contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts.

Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, les travaux hors du temps scolaire contribuent à la formation des élèves et sont absolument essentiels à leur progression. Ils sont conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité de leurs aptitudes.

Les modes d'évaluation prennent également des formes variées, en phase avec les objectifs poursuivis. En particulier, l'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes est à évaluer.

Organisation du programme

Le programme fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités. Il est conçu pour favoriser une acquisition progressive des notions et leur pérennisation. Son plan n'indique pas la progression à suivre.

À titre indicatif, on pourrait consacrer la moitié du temps à l'analyse, l'autre moitié se répartissant équitablement entre géométrie et probabilités-statistique.

Les capacités attendues indiquent un niveau minimal de maîtrise des contenus en fin de cycle terminal. La formation ne s'y limite pas.

Les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique d'une part et du raisonnement d'autre part sont rappelées en fin de programme. Elles doivent être exercées à l'intérieur de chaque champ du programme.

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ▣. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues.

De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ◇.

Les commentaires notés ⇆ distinguent des thèmes pouvant se prêter à des ouvertures interdisciplinaires, en concertation avec les professeurs d'autres disciplines scientifiques.
Quelques propositions d'approfondissement, destinées à des activités dans le cadre de l'accompagnement personnalisé, figurent en italique avec la mention (AP).

1. Analyse

Comme dans les classes précédentes, l'activité mathématique est motivée par la résolution de problèmes. L'un des objectifs du programme est de permettre à l'élève, par une consolidation et un enrichissement des notions relatives aux suites et aux fonctions, d'étudier un plus grand nombre de phénomènes discrets ou continus.

La notion de limite de suite fait l'objet d'une étude approfondie. On prépare ainsi la présentation des limites de fonctions.
L'ensemble des fonctions mobilisables est élargi par l'introduction des fonctions exponentielle, logarithme, sinus et cosinus. La fonction exponentielle intervenant dans différents champs du programme, il est souhaitable de l'introduire assez tôt dans l'année.
Enfin, s'ajoute le nouveau concept d'intégration qui, bien que modestement abordé et développé, demeure un concept fondamental de l'analyse.

L'acquisition d'automatismes de calcul demeure un objectif du programme, cependant, dans le cadre de la résolution de problèmes, on a recours si besoin à un logiciel de calcul formel ou scientifique.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Suites		
Raisonnement par récurrence.	• Savoir mener un raisonnement par récurrence.	Ce type de raisonnement intervient tout au long de l'année et pas seulement dans le cadre de l'étude des suites.
Limite finie ou infinie d'une suite.	◇ Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.	Pour exprimer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Comme en classe de première, il est important de varier les approches et les outils sur lesquels le raisonnement s'appuie. On présente des exemples de suites qui n'ont pas de limite.
Limites et comparaison.	▣ Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : - u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; - u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.	▣ On démontre que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l. Le théorème dit « des gendarmes » est admis.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Opérations sur les limites.	• Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites.	
Comportement à l'infini de la suite (q^n), q étant un nombre réel.	▣ Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$.	On démontre par récurrence que pour a réel strictement positif et tout entier naturel n : $(1+a)^n \geq 1+na$.
	• Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique.	On peut étudier des situations où intervient la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique.
Suite majorée, minorée, bornée.	• Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.	Ce théorème est admis. ▣ Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques, sont traités en exercice. ◇ Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre. (AP) *Approximations de réels (π, e, nombre d'or, etc.).*
Limites de fonctions Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini. Limite infinie d'une fonction en un point.		Le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en terminale.
Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions.	• Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions.	La composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale.
Limites et comparaison.	• Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement.	
Asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées.	• Interpréter graphiquement les limites obtenues.	

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires	• Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone, pour résoudre un problème donné.	On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. On présente quelques exemples de fonctions non continues, en particulier issus de situations concrètes. Le théorème des valeurs intermédiaires est admis. On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. Ce cas particulier est étendu au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. ◇ Des activités algorithmiques sont réalisées dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation $f(x)=k$.
Calculs de dérivées : compléments	• Calculer les dérivées des fonctions : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$; $x \mapsto (u(x))^n$, n entier relatif non nul ; $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$; $x \mapsto \ln(u(x))$. • Calculer la dérivée d'une fonction $x \mapsto f(ax+b)$ où f est une fonction dérivable, a et b deux nombres réels.	À partir de ces exemples, on met en évidence une expression unifiée de la dérivée de la fonction $x \mapsto f(u(x))$, mais sa connaissance n'est pas une capacité attendue. Les techniques de calcul sont à travailler mais ne doivent pas être un frein à la résolution de problèmes. On a recours si besoin à un logiciel de calcul formel. (AP) *Exemples de fonctions discontinues, ou à dérivées non continues.*

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions sinus et cosinus	• Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. • Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. • Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.	On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$. En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité. On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. ⇆ [SPC] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique.
Fonction exponentielle Fonction $x \mapsto \exp(x)$. Relation fonctionnelle, notation e^x.	◙ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur **R**, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. ◙ Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Connaître et exploiter $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur **R** telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise. On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(u(x))$, notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisées dans des domaines variés. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$. ⇆ [SPC et SVT] Radioactivité. (AP) *Étude de phénomènes d'évolution.*

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonction logarithme népérien Fonction $x \mapsto \ln x$.	• Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.	On peut introduire la fonction logarithme népérien grâce aux propriétés de la fonction exponentielle ou à partir de l'équation fonctionnelle.
Relation fonctionnelle, dérivée.	• Utiliser, pour a réel strictement positif et b réel, l'équivalence $\ln a = b \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^b$. • Utiliser la relation fonctionnelle pour tansformer une écriture. • Connaître et exploiter $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.	On souligne dans les cadres algébrique et graphique que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques l'une de l'autre. Tout développement théorique sur les fonctions réciproques est exclu. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction logarithme en 1 et la limite en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$. On évoque la fonction logarithme décimal pour son utilité dans les autres disciplines. ⇆ [SI] Gain lié à une fonction de transfert. ⇆ [SPC] Intensité sonore, magnitude d'un séisme, échelle des pH. (AP) *Équations fonctionnelles.*
Intégration Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Théorème : si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f.		On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie. On peut mener un calcul approché d'aire (parabole, hyperbole, etc.) pour illustrer cette définition. ▣ Il est intéressant de présenter le principe de la démonstration du théorème dans le cas où f est positive et croissante.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.	• Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. • Connaître et utiliser les primitives de $u'\mathrm{e}^u$, $u'u^n$ (n entier relatif, différent de –1) et, pour u strictement positive, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u}$.	Une primitive F de la fonction continue et positive f étant connue, on a : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.
Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.		▣ Il est intéressant de démontrer ce théorème dans le cas d'un intervalle fermé borné, en admettant que la fonction a un minimum. On admet le cas général. On fait observer que certaines fonctions comme $x \mapsto \exp(-x^2)$ n'ont pas de primitive « explicite ».
Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque. Linéarité, positivité, relation de Chasles. Valeur moyenne.	• Calculer une intégrale. • Utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire. • Encadrer une intégrale. ◇ Pour une fonction monotone positive, mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.	La formule $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, établie pour une fonction continue et positive, est étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque. L'intégration par parties n'est pas un attendu du programme. La notion de valeur moyenne est illustrée par des exemples issus d'autres disciplines. ⇆ [SPC] Mouvement uniformément accéléré. ⇆ [SI] Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique. (AP) *Calcul du volume d'un solide.*

2. Géométrie

Nombres complexes

En classe terminale, les nombres complexes sont vus essentiellement comme constituant un nouvel ensemble de nombres avec ses opérations propres. Cette introduction s'inscrit dans la perspective d'un approfondissement lors d'une poursuite d'études.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Forme algébrique, conjugué. Somme, produit, quotient. Équation du second degré à coefficients réels. Représentation géométrique. Affixe d'un point, d'un vecteur. Forme trigonométrique : - module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ; - notation exponentielle.	• Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. • Résoudre dans **C** une équation du second degré à coefficients réels. • Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur. • Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur. • Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Connaître et utiliser la relation $z\bar{z}=\lvert z\rvert^2$. • Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.	On introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$. La notation exponentielle est introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle. Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première. ⇆ [SI] Analyse fréquentielle d'un système.

Géométrie dans l'espace

Dans cette partie, il s'agit, d'une part de renforcer la vision dans l'espace entretenue en classe de première, d'autre part de faire percevoir toute l'importance de la notion de direction de droite ou de plan.
La décomposition d'un vecteur d'un plan suivant deux vecteurs non colinéaires de ce plan, puis celle d'un vecteur de l'espace suivant trois vecteurs non coplanaires, sensibilisent aux concepts de liberté et de dépendance en algèbre linéaire.
Le repérage permet à la fois de placer des objets dans l'espace et de se donner un moyen de traiter des problèmes d'intersection d'un point de vue algébrique. Le concept d'orthogonalité, une fois exprimé en termes de coordonnées dans un repère orthonormé, fournit un outil pour une caractérisation simple des plans de l'espace.

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier des problèmes d'intersection de droites et de plans, en choisissant un cadre adapté, vectoriel ou non, repéré ou non.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Droites et plans		
Positions relatives de droites et de plans : intersection et parallélisme.	• Étudier les positions relatives de droites et de plans.	Le cube est une figure de référence pour la représentation des positions relatives de droites et de plans.
Orthogonalité : - de deux droites ; - d'une droite et d'un plan.	• Établir l'orthogonalité d'une droite et d'un plan.	On étudie quelques exemples de sections planes du cube. Ce travail est facilité par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.
Géométrie vectorielle		
Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires.		On étend à l'espace la notion de vecteur et les opérations associées. On fait observer que des plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles. ▣ Il est intéressant de présenter la démonstration du théorème dit « du toit ».
Vecteurs coplanaires. Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires.	• Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes d'alignement ou de coplanarité.	On fait percevoir les notions de liberté et de dépendance.
Repérage. Représentation paramétrique d'une droite.	• Utiliser les coordonnées pour : - traduire la colinéarité ; - caractériser l'alignement ; - déterminer une décomposition de vecteurs.	On ne se limite pas à des repères orthogonaux. La caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires conduit à une représentation paramétrique de ce plan. ⇆ [SI] Cinématique et statique d'un système en mécanique.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Produit scalaire Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace : définition, propriétés. Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan.	• Déterminer si un vecteur est normal à un plan. ◙ Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls. • Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal. • Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne. ◙ Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. • Choisir la forme la plus adaptée entre équation cartésienne et représentation paramétrique pour : - déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan ; - étudier la position relative de deux plans.	On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan. On caractérise vectoriellement l'orthogonalité de deux droites et on introduit la notion de plans perpendiculaires. (AP) *Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.* *Intersection de trois plans.*

3. Probabilités et statistique

On approfondit le travail en probabilités et statistique mené les années précédentes.
Afin de traiter les champs de problèmes associés aux données continues, on introduit les lois de probabilité à densité. Le programme en propose quelques exemples et, en particulier, la loi normale qui permet notamment d'initier les élèves à la statistique inférentielle par la détermination d'un intervalle de confiance pour une proportion à un niveau de confiance de 95 %.
Cette partie se prête particulièrement à l'étude de problèmes issus d'autres disciplines.
Le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Conditionnement, indépendance		
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$.	• Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée. • Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités. • Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.	On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau. On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés. Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve. Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en œuvre de cette formule doit être maîtrisée.
Indépendance de deux événements.	▣ Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.	Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes. ◇ Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre, notamment pour simuler une marche aléatoire. ⇆ [SVT] Hérédité, génétique, risque génétique.
Notion de loi à densité à partir d'exemples Loi à densité sur un intervalle.		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans **R**, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de **R**. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x, y)\,;\, x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I. Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Loi uniforme sur $[a,b]$. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	• Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a,b]$.	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur $[0,1]$. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a,b]$ est introduite à cette occasion par $\mathrm{E}(X)=\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète. (AP) *Méthode de Monte-Carlo.*
Lois exponentielles.	• Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle.	◙ On démontre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T\geq t}(T\geq t+h)=P(T\geq h)$.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	◙ Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.	L'espérance est définie comme la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est la fonction de densité de la loi exponentielle considérée. Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes, par exemple sur la radioactivité ou la durée de fonctionnement d'un système non soumis à un phénomène d'usure.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Théorème de Moivre Laplace (admis).	• Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique. ◙ Démontrer que pour $\alpha \in \left]0,1\right[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. • Connaître les valeurs approchées $u_{0,05} \approx 1{,}96$ et $u_{0,01} \approx 2{,}58$.	Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. Le théorème de Moivre Laplace assure que pour tous réels a et b, $P(Z_n \in [a,b])$ tend vers $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ lorsque n tend vers $+\infty$. L'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est définie par $\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t f(t) dt + \lim_{y \to +\infty} \int_0^y t f(t) dt$ où f désigne la densité de cette loi. On peut établir qu'elle vaut 0. On admet que la variance, définie par $E\left((X - E(X))^2\right)$, vaut 1.
Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ.	• Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. • Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.	Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On fait percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type. ⇆ [SI et SPC] Mesures physiques sur un système réel en essai. La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ n'est pas un attendu du programme. On illustre ces nouvelles notions par des exemples issus des autres disciplines.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Intervalle de fluctuation	◙ Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors, pour tout α dans $]0,1[$ on a, $\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$, où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$. • Connaître l'intervalle de fluctuation asymptotique(*) au seuil de 95 % : $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p désigne la proportion dans la population.	La démonstration ci-contre donne l'expression d'un intervalle de fluctuation asymptotique(*) au seuil $1-\alpha$ de la variable aléatoire fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$ qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence obtenue f. Avec les exigences usuelles de précision, on pratique cette approximation dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. En majorant $1,96\sqrt{p(1-p)}$, on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde. La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau avec l'intervalle de fluctuation asymptotique.
Estimation Intervalle de confiance (*). Niveau de confiance.	• Estimer par intervalle une proportion inconnue à partir d'un échantillon. • Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.	Les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines. ◙ Il est intéressant de démontrer que, pour une valeur de p fixée, l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95. On énonce alors que p est élément de l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec un niveau de confiance de plus de 95 %, où f désigne la fréquence observée sur un échantillon de taille n. Avec les exigences usuelles de précision, on utilise cet intervalle dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondage.

		Il est important de noter que, dans d'autres champs, on utilise l'intervalle $\left[f-1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}, f+1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$ qu'il n'est pas possible de justifier dans ce programme. ⇆ [SVT] Analyse de graphiques où les données sont fournies par des intervalles de confiance. (AP) *Prise de décision lors de la comparaison de deux proportions (par exemple lors d'un essai thérapeutique).*

(*)Avec les notations précédentes :

Un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil $1 - \alpha$ est un intervalle déterminé à partir de p et de n et qui contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de $1 - \alpha$ que n est grand.

Un intervalle de confiance pour une proportion p à un niveau de confiance $1-\alpha$ est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\alpha$, intervalle aléatoire déterminé à partir de la variable aléatoire fréquence F_n qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence.
Les intervalles de confiance considérés ici sont centrés en la fréquence observée f.

Algorithmique

En seconde, les élèves ont conçu et mis en œuvre quelques algorithmes. Cette formation se poursuit tout au long du cycle terminal.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés à :
- décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- en réaliser quelques-uns à l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (analyse, géométrie, statistiques et probabilités, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets.
À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie) Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables : • d'écrire une formule permettant un calcul ; • d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction, ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.
Boucle et itérateur, instruction conditionnelle Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de : • programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ; • programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Notations et raisonnement mathématiques

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques, mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

En complément des objectifs rappelés ci-dessous, le travail sur la notion d'équivalence doit naturellement être poursuivi (propriété caractéristique, raisonnement par équivalence) et l'on introduit le raisonnement par récurrence.

Notations mathématiques Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants: $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.
Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés sur des exemples à : • utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ; • utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ; • distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ; • utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ; • formuler la négation d'une proposition ; • utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ; • reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Enseignement de spécialité

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme.

Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif. L'étude des situations envisagées dans le cadre de cet enseignement conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche.

Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en œuvre d'algorithmes.

Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités.

Arithmétique

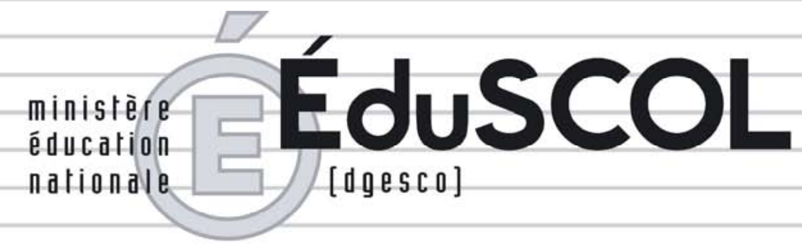
Les problèmes étudiés peuvent notamment être issus de la cryptographie ou relever directement de questions mathématiques, par exemple à propos des nombres premiers.

Exemples de problèmes	Contenus
Problèmes de codage (codes barres, code ISBN, clé du Rib, code Insee Problèmes de chiffrement (chiffrement affine, chiffrement de Vigenère, chiffrement de Hill).	• Divisibilité dans **Z**. • Division euclidienne. • Congruences dans **Z**. • PGCD de deux entiers. • Entiers premiers entre eux. • Théorème de Bézout. • Théorème de Gauss.
Questionnement sur les nombres premiers : infinitude, répartition, tests de primalité, nombres premiers particuliers (Fermat, Mersenne, Carmichaël). Sensibilisation au système cryptographique RSA.	• Nombres premiers. • Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Matrices et suites

Il s'agit d'étudier des exemples de processus discrets, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices. On introduit le calcul matriciel sur des matrices d'ordre 2. Les calculs sur des matrices d'ordre 3 ou plus sont essentiellement effectués à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Exemples de problèmes	Contenus
Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets. Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p . Etude du principe du calcul de la pertinence d'une page web. Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient. Modèle proie prédateur discrétisé : - évolution couplée de deux suites récurrentes ; - étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre.	• Matrices carrées, matrices colonnes : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Exemples de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. • Écriture matricielle d'un système linéaire. • Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$: - recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence ; - étude de la convergence. • Étude asymptotique d'une marche aléatoire.





Mathématiques

Lycée

Ressources pour la classe de seconde

- Algorithmique -

Juin 2009

eduscol.education.fr/ D0015

Table des matières



1 / Quelques généralités sur l'algorithmique

Le programme de seconde a été conçu pour être enseigné et mis en œuvre en s'appuyant assez largement sur les progrès de la science et de la technique informatiques, qu'il s'agisse de logiciels ou de la pensée algorithmique. Depuis une dizaine d'années le développement de l'usage de logiciels (calculatrice ou ordinateur) a permis de développer chez les élèves la capacité d'expérimenter, suscitant le sens de l'observation tout en faisant naitre de nouvelles questions relatives à la nature de la démonstration.

C'est dans ce contexte que l'introduction d'une familiarisation avec l'algorithmique prend sa place dans une pratique des Mathématiques dont un axe principal est la formation des élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes. Précisons dès lors quelques éléments qui ont conduit à l'introduction de cette section.

a. Présence universelle des algorithmes

Comme l'a souligné la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques « *les mathématiques sont partout présentes dans la vie courante : traitement des données, statistique, codage, compression de données, simulation numérique,... Mais cette présence qui se renforce, est souvent occultée aux yeux du public qui ne voit que le produit fini* ». Cette observation s'applique parfaitement aux algorithmes dont on voit plus souvent les résultats que les principes fondamentaux. La présence d'algorithmes dans l'univers technologique qui nous entoure n'est plus à démontrer. Depuis l'automate le plus simple jusqu'aux systèmes les plus complexes, les algorithmes ordonnent beaucoup de nos gestes quotidiens. Leur présence cependant ne se traduit pas par un contact direct avec l'utilisateur qui assimile volontiers « la machine » à son mode de fonctionnement.

C'est pourquoi il est apparu nécessaire de spécifier dans le projet de programme pour la classe de Seconde :
La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, les élèves ont rencontré des algorithmes (algorithmes opératoires, algorithme des différences, algorithme d'Euclide, algorithmes de construction en géométrie). Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel.

Dans le cours de Mathématiques, les algorithmes apparaissent très tôt dans la scolarité. Opérations posées, réduction au même dénominateur, résolution d'une équation du second degré, factorisation d'une expression polynomiale, identification d'une situation de proportionnalité, tous ces algorithmes supplantent parfois chez les élèves les objets qu'ils manipulent.

En travaillant dans un univers plus restreint, dans lequel les règles en vigueur et la symbolique utilisées sont en nombre limité , on essaiera de préciser et de formaliser partiellement la notion d'algorithme.

b. Aborder certains objets sous un jour nouveau

Le développement du calcul automatisé a permis (au niveau de la recherche) de développer de nouveaux objets (fractales...), de nouvelles méthodes de démonstrations et a profondément modifié la pratique des chercheurs.

Dans la classe de seconde, la découverte de l'algorithmique permettra d'étudier certaines notions sous un angle différent : comment organiser la recherche du maximum d'une fonction ? Comment représenter une droite sur un écran n'affichant que des pixels ? Comment réaliser, en statistiques, le tri des données requis pour accéder à la médiane ?

Ce document ressource propose ainsi d'illustrer certaines questions en proposant de développer des algorithmes de base tout au long de l'année.

c. Algorithmes et démarche algorithmique

La sensibilisation de l'élève à la question de la « démarche algorithmique » pourra se faire en évitant toute technicité ou exposé systématique. On pourra sur ce thème consulter des publications réalisées dans le cadre des IREM.

Les compétences suivantes pourront être identifiées et travaillées :

- comprendre et analyser un algorithme préexistant ;
- modifier un algorithme pour obtenir un résultat particulier ;
- analyser la situation : identifier les données d'entrée, de sortie, le traitement...;
- mettre au point une solution algorithmique : comment écrire un algorithme en « langage courant » en respectant un code, identifier les boucles, les tests, des opérations d'écriture, d'affichage... ;
- valider la solution algorithmique par des traces d'exécution et des jeux d'essais simples ;
- adapter l'algorithme aux contraintes du langage de programmation : identifier si nécessaire la nature des variables... ;
- valider un programme simple.

2 / Pour une pratique active de l'élève

Citons à nouveau le projet de programme pour la classe de Seconde :

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante.

La découverte de l'algorithmique peut avantageusement avoir lieu tout au long de l'année et gagne à être mise en œuvre par des situations variées, notamment en diversifiant les supports d'activités des élèves. On pourrait très bien commencer par exécuter les algorithmes[1] sans ordinateur à la main sur papier, avec les mains, avec les pieds, ou avec des objets etc. Par ailleurs, même si cela diffère entre la calculatrice et l'ordinateur, il convient de lier la gestion de mémoire à des actes liés aux manipulations concrètes d'écriture, d'affectation et d'affichage de données.

a. Organisation des enseignements

L'enseignement de l'algorithmique ne relève pas, à ce niveau, de cours spécifiques ; au contraire, l'introduction de chaque nouvel élément (variable, boucle, itération, etc.) devrait apparaître lors de la résolution de problèmes pour lesquels les démarches habituelles sont malcommodes ou peu performantes : par exemple dans le cas de répétition d'une tâche, ou dans le cas d'un traitement trop long pour être envisagé « à la main ». Ces situations peuvent être rencontrées lors de l'extension à des cas plus généraux de situations déjà rencontrées : recherche du pgcd de nombres très grands, tri d'un très grand nombre de valeurs numériques, simulations sur des échantillons de grande taille...

Une piste envisageable pourrait être la réécriture d'un algorithme simple, dont la complexification – dans une mesure raisonnable – fait écho à de nouvelles notions rencontrées pendant l'année ou à de nouveaux questionnements sur la nature de l'objet étudié. Par exemple : écrire un algorithme permettant de créer un tableau de valeurs d'une fonction, puis se poser les questions : comment modifier cet algorithme pour trouver les extremums de cette fonction ? puis, l'adapter pour trouver les variations de cette fonction ? enfin, dans quelle mesure cet algorithme est-il fiable ?...

Il serait souhaitable d'intégrer l'écriture d'algorithmes dans tous les domaines du programme :

- fonctions : étude numérique et asymptotique;
- géométrie : les questions d'affichage, de positionnement et de déplacement d'objets géométriques simples (points, segments, cercles) peuvent être un champ d'investigation très riche ;
- statistique : questions de tris, détermination de certains indicateurs (médiane, quartiles) ;
- probabilités : la modélisation de certains phénomènes à partir de fréquences observées : méthode dite de Monte-Carlo, etc. ;
- numérique : le traitement des nombres permet d'aborder des problèmes de comparaisons et de taille des nombres, d'exactitude dans les calculs, etc.

Ne pouvant être exhaustif, ce document n'apportera que quelques éclairages sur ces thèmes.

La variété des supports et les moyens de les mettre en œuvre dans la classe sont des éléments indispensables à la mise en place de cet enseignement.

Il est important de noter que l'algorithmique modifiera profondément le rapport entre l'élève et les outils ou instruments auxquels il sera confronté dans son environnement scolaire et particulièrement ceux habituellement identifiés comme issus du monde des TIC dans l'enseignement (calculatrices, ordinateurs, logiciels mais aussi divers objets comme les appareils photos numériques, etc.).

Enfin, il faut avant tout éviter de confronter les élèves à des difficultés trop importantes ; en effet, la classe de seconde est une classe de détermination et il ne s'agit pas d'y former des programmeurs mais de faire en sorte que les mathématiques et l'algorithmique soient au service d'activités de résolution de problèmes pour les sciences.

b. Pratiques de l'élève

La pratique de l'algorithmique ne se résume pas à l'écriture de programmes ; il serait même judicieux de ne pas commencer par là. Il convient donc de proposer aux élèves des situations, activités et organisations pédagogiques variées.

Les travaux proposés pourront être conçus dans une perspective d'action de l'élève et devront être présentés le plus souvent possible dans un cadre plus large que celui de la simple réalisation isolée d'un programme. Ils pourront par exemple s'inscrire dans la durée et dans une organisation individuelle et/ou collective.

Voici quelques exemples de supports d'activités : relectures d'algorithmes, complexifications progressives, transpositions d'algorithmes utilisant différents types de langages, progressivité dans le choix et l'utilisation des outils de programmation...

Par ailleurs, il conviendrait de ne pas négliger la richesse de l'apprentissage à partir d'algorithmes erronés. Le travail de correction, de recherche de dysfonctionnements de certains algorithmes, l'étude des cas particuliers sont des pistes qu'il conviendrait d'explorer.

Enfin, l'écriture d'algorithmes pourrait par ailleurs être l'occasion de développer le travail en équipe dans le cadre de la réalisation de petits projets.

1 De tels exemples seront proposés dans la suite du document ressource.

3 / Supports de programmation

Comme aucun logiciel ou langage n'est imposé par le programme, on montrera ci-après différents types d'environnements de programmation. Les calculatrices graphiques programmables peuvent être exploitées grâce à leur commodité d'usage en classe entière. Cependant, leurs limites dues à leur petite taille et leur capacité mémoire incitent à proposer aux élèves des activités s'appuyant sur des logiciels utilisables sur ordinateur. Une large part des exemples proposés ci-après est parfaitement traitable avec des calculatrices comme support.

Une piste intéressante pourrait être d'organiser l'enseignement autour d'une progressivité dans les outils utilisés au cours de l'année (sans pour autant les multiplier) en traitant des exemples sur plusieurs environnements.

Il peut être également intéressant de mettre en avant le fait que la *complexification* de l'algorithme détermine de manière plus ou moins ouverte le choix de l'instrument comme par exemple pour les problèmes liés :

- au temps de calcul ;
- à la nature, la taille ou la précision des nombres utilisés ;
- à la lisibilité de l'algorithme ;
- à la nature de la sortie.

Nombreux sont les logiciels qui peuvent être utilisés[2] : des logiciels dédiés (comme SCRATCH, EXECALGO ou LINOTTE...), aux logiciels de programmation (PYTHON...) ou liés au calcul scientifique (SCILAB...) en passant par les logiciels de calcul formel (XCAS, MAXIMA, WIRIS...) qui proposent un module de programmation. Ces derniers permettront de travailler sur des types de données plus spécifiques (très grands nombres, expressions algébriques...). On pourra à l'occasion utiliser le tableur qui, s'il traduit parfaitement les instructions conditionnelles, tend cependant à cacher les itérations sous les opérations de recopie de formules.

On se reportera à la présentation détaillée de quelques logiciels qui figure à la fin de ce document.

Les exemples proposés dans ce document sont donc déclinés dans différents environnements.

4 / Évaluation des pratiques

L'évaluation des pratiques en Algorithmique peut s'organiser autour d'une évaluation par compétences qui ne conduira pas nécessairement à une note spécifique chiffrée.

Les activités menées dans le cadre de la pratique de l'algorithmique peuvent servir de support d'évaluation des compétences liées, d'une part, aux trois modalités fondamentales de l'activité en algorithmique qui sont :

a) **analyser** le fonctionnement ou le but d'un algorithme existant ;
b) **modifier** un algorithme existant pour obtenir un résultat précis ;
c) **créer** un algorithme en réponse à une problème donné.

et, d'autre part, à la résolution de problèmes telles que :

d) **modéliser** et s'engager dans une activité de recherche ;
e) faire une **analyse critique** ;
f) pratiquer une **lecture active** de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;
g) **communiquer** à l'écrit et à l'oral.

2 Tous les logiciels qui seront présentés par la suite sont « libres » au moins au sens où leur téléchargement l'est.

Une initiation à l'algorithmique

1 / De quoi va-t-on parler ?

Le mot « algorithme » vient du nom de l'auteur persan **Al-Khuwarizmi** (né vers 780 - mort vers 850) qui a écrit en langue arabe le plus ancien traité d'algèbre « abrégé de calcul par la complétion et la simplification »[3] dans lequel il décrivait des procédés de calcul à suivre étape par étape pour résoudre des problèmes ramenés à des équations[4].

Dans un premier temps rédiger un algorithme consiste à décrire les différentes étapes de calcul pour résoudre un problème algébrique, numérique ou décisionnel.

Des exemples souvent repris pour illustrer ces différents aspects, comme le rendu de monnaie pour le volet numérique, ou encore les recettes de cuisine. On trouve encore des algorithmes dans des situations de la vie courante (s'habiller) ou professionnelle (ainsi, la conduite d'un train, la consultation d'un catalogue de bibliothèque, etc.).

Plus généralement le mot « algorithme » désigne tout procédé de calcul systématique voire automatique. S'ajoute à cela la notion de « finitude ».

On définit parfois les algorithmes de la manière suivante : « *un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver, en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données.* »[5] Le résultat doit donc s'obtenir en un temps fini.

À propos des « règles à appliquer », il faut entendre un traitement fait sur des données imposé par une suite « d'instructions » visant à transformer ces données pour arriver au résultat visé.

Ces « instructions » sont de natures diverses selon le type de données au départ. C'est ce que nous allons préciser.

2 / Les éléments de base d'un algorithme simple

a. Les trois étapes

D'après ce qui précède, trois étapes structurent un algorithme simple[6] :

La préparation du traitement

Il s'agit de repérer les données nécessaires voire indispensables à la résolution. Ces données peuvent être numériques, ou sous forme de textes (on dit souvent chaînes de caractères), ou de type logique (à deux valeurs possibles, vrai ou faux), ou enfin de type graphique (des points).

Souvent les données pertinentes doivent être agencées sous une forme plus vaste, comme par exemple des tableaux ou listes où on peut par exemple ranger commodément les valeurs prises par une fonction sur un grand nombre de points.

Dans cette phase peut aussi figurer ce qu'on appelle l'entrée des données, qui peut se manifester par la saisie de caractères ou de nombres sur le clavier, ou la lecture de la position du pointeur de la souris, ou encore par la lecture d'un fichier contenant ces nombres ou caractères.

Il s'agit aussi de repérer les résultats intermédiaires qu'il est bon de mémoriser pour la suite car indispensables au traitement. Il est parfois utile d'utiliser des variables auxiliaires pour ne pas perturber les données initiales.

Le traitement

Il s'agit de déterminer toutes les étapes des traitements à faire et donc des « instructions » à donner pour une exécution automatique. Si ces instructions s'exécutent en séquence, on parle d'algorithme séquentiel. Si les opérations s'exécutent sur plusieurs processeurs en parallèle, on parle d'algorithme parallèle. Si les tâches s'exécutent sur un réseau de processeurs on parle d'algorithme réparti ou distribué. Nous ne traiterons ici que des algorithmes séquentiels[7].

La sortie des résultats

Les résultats obtenus peuvent être affichés sur l'écran, ou imprimés sur papier, ou bien encore conservés dans un fichier. Si on n'en fait rien, ils « restent » en mémoire jusqu'à la prochaine exécution ou sont perdus. À l'occasion, la sortie pourrait être graphique (afficher ou déplacer le pointeur de la souris ou des objets sur l'écran) ou sonore … voire sur Internet.

3 Le mot arabe utilisé pour nommer la complétion ou restauration se lit *Al-Jabr*, ce qui donna naissance à notre mot *algèbre.*
4 Notamment, l'équation du segond degré.
5 Encyclopaedia Universalis
6 C'est-à-dire, ne comportant pas de fonctions ou sous-programmes.
7 Avec une petite exception concernant Scratch (voir page 16, la chasse au trésor).

b. Les instructions

Les « instructions » sont les « briques de base » des algorithmes, dont l'assemblage dans un ordre précis conduit au résultat attendu. Nous les présenterons dans un pseudo-langage « en français », accompagnées de traductions concrètes à l'aide de quelques outils logiciels.[8]

Pour plus de facilité, nous suivrons pas à pas le développement de la formalisation concernant l'algorithme suivant :

Un joueur lance deux dés et fait la somme des points obtenus. S'il obtient 8, il gagne 10€, sinon il perd 1€. **Variante :** le joueur rejoue 10 fois (et cumule ses gains et pertes). **Autre variante :** le joueur rejoue jusqu'à avoir un gain cumulé de 5€ .

Instructions pour traiter les données

Pour réaliser ces trois étapes évoquées précédemment, on a besoin d'« instructions de base » comme la lecture de données, l'affectation de variables et l'écriture de données.

L'affectation de données dans des variables

La formalisation de notre algorithme commence par le tirage d'un dé et la mémorisation des points obtenus. Cette action nécessite de créer une « mémoire » ou **variable** destinée à cet usage, zone de mémoire à laquelle il est commode de donner un nom ou **identificateur**. Avec le logiciel SCRATCH cela prend l'allure suivante :[9]



Le « bloc » vert matérialise une instruction fournissant une valeur numérique, tandis que le « bloc » orange s'occupe du rangement de cette valeur dans une variable nommée *a* (qui aura été préalablement créée).

Les identificateurs sont des suites de lettres et chiffres (sans espaces) qui doivent être choisies judicieusement pour que l'algorithme soit immédiatement lisible et interprétable ; dans l'exemple nous avons choisi *a* mais il eût mieux valu nommer cette variable *dé* ou *tirage1* puisqu'elle est destinée à contenir le résultat du tirage.

En bref, l' « affectation » permet d'attribuer une valeur à une variable désignée par son identificateur.[10]

On peut comparer l'affectation de valeur à une va riable comme le rangement d'un objet dans un petit tiroir (ne pouvant contenir qu'un objet à la fois) ; sur la façade du tiroir figure un nom, c'est l'identificateur qui permet de parler du tiroir lui-même. Cette notion est très proche de celle de variable au sens mathématique.

Dans notre pseudo-langage en français, nous traduirons l'affectation par l'instruction : *identificateur* **prend la valeur** *valeur*. L'affectation remplace la valeur précédente de la variable par la nouvelle. Ainsi l'instruction « A **prend la valeur** 2 » affecte la valeur 2 à la variable dont A est l'identificateur et ceci quelle que soit la valeur contenue au préalable dans la variable A (laquelle sera perdue).

On rencontrera ici ou là des variables indicées, nommées listes ou tableaux ; si mathématiquement ces variables ressemblent à des vecteurs, on peut aussi bien les assimiler à des « commodes » pourvues de multiples tiroirs !

La lecture (ou entrée) des données

La « lecture de données » pourra se faire par interrogation de l'utilisateur ou par extraction à partir d'un fichier rangé sur un disque voire de données accessibles par Internet. On a choisi de la traduire par l'instruction : **Saisir** *identificateur* .

Par exemple, dans XCAS l'instruction

```
input(A);
```

va affecter dans la variable nommée `A` un nombre ou une expression tapée au clavier. De même, l'instruction

```
entrée :=
ramene("fichier.txt");
```

va « ramener » (affecter) dans la variable nommée `entrée` la première ligne du fichier désigné (ou la prochaine ligne si des lectures ont déjà eu lieu).

L'écriture (ou sortie) des données

L' « écriture des données » permet d'afficher pour l'utilisateur les valeurs des variables après traitement (ou en cours de traitement dans le cas où l'on veut contrôler l'exécution). On a choisi de la traduire par l'instruction : **Afficher** *identificateur*. On pourra peaufiner la présentation des résultats pour avoir un affichage lisible et compréhensible. Une variante consiste à « sortir » directement des informations non contenues dans une variable, nous le traduirons par : **Afficher** « message ».

8 Nous n'utiliserons pas les « organigrammes » qui eurent leurs heures de gloire dans l'enseignement de l'informatique mais se sotn avérés inadéquats face aux progrès de cette science (en particulier,dans le cadre des programmations fonctionnelle ou orientée objets).

9 Pour interpréter sans peine les copies d'écran provenant de SCRATCH il est préférable de les voir en couleurs. Des différences de présentation peuvent survenir suivant que le logiciel est réglé en « français » ou « français-canadien ».

10 Il ne faut surtout pas confondre la variable et son identificateur ; en effet, la variable, outre son identificateur qui est juste un nom, possède une « valeur » qui est son contenu et une « adresse » qui est l'endroit dans la mémoire où on va ranger la valeur.

Dans SCRATCH ces « sorties » peuvent être de la forme 

Les séquences d'instructions

Le « traitement des données » se fait par une suite d'instructions parmi lesquelles figurent des affectations d'opérations ou de calculs. Ces opérations ou ces calculs sont spécifiques selon le type des données utilisées (nombres entiers, nombres décimaux, ou chaînes de caractères) ou selon les structures données utilisées (listes, tableaux, etc.).

Les instructions, simples ou complexes, sont en principe traitées les unes après les autres dans leur ordre d'apparition dans le programme. Dans la plupart des langages de programmation, les instructions d'une même séquence sont séparées par un caractère deux-points ou point-virgule ou simplement par un passage à la ligne. Ainsi, dans la recette de la pâte à crêpes, on trouve la séquence d'instructions (mettre la farine dans le bol ; faire un puits ; mettre les œufs dans le puits).



On voit très bien ce principe à l'œuvre dans le logiciel SCRATCH, la séquence d'instructions se matérialisant par l'emboîtement des « pièces de puzzle ». Ci-contre, à titre d'exemple, la simulation du lancer de deux dés et de l'obtention de leur somme (deux variables ayant pour noms *a* et *b* ont été préalablement créées).

L'affectation est en couleur orange, le calcul en couleur verte et l'écriture des données en couleur violette ; et cette séquence comporte trois instructions.

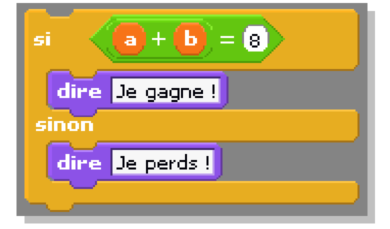
La même démarche, réalisée avec le logiciel XCAS, amènerait à écrire :

```
a := 1+hasard(6) :; b := 1+hasard(6) :;
print(a+b) ;
```

Instructions (ou structures) de contrôle

Le traitement de données se fait parfois sous conditions ou de manière spécifique. On parle alors de « structures de contrôle ». Elles sont de plusieurs natures différentes :

La « structure alternative »



Selon qu'une certaine condition est vérifiée ou non, on fera un certain traitement ou un autre (par « traitement » on entend, comme expliqué ci-dessus, une ou plusieurs instructions en séquence). Pour revenir à notre joueur, l'alternative la plus simple est d'afficher un message favorable si la somme des deux dés (soit *a*+*b*) vaut 8 et défavorable sinon :

On a choisi de traduire la structure alternative par l'instruction :

Si *condition* **alors**
    Traitement 1
Sinon
    Traitement 2

On peut d'ailleurs imaginer que, selon le cas, il se peut que, si la condition n'est pas vérifiée, il n'y ait pas de *Traitement 2* à effectuer alors la série d'instruction du *Traitement 2* est vide. On écrira alors l'instruction :

Si *condition* **alors**
    Traitement 1

Pour ce qui concerne la « condition », c'est une expression logique prenant l'une des deux valeurs VRAI ou FAUX, qui peut être simple ou complexe.

Par exemple une « condition simple » peut correspondre à un test d'égalité « A est égal à B » noté A=B, ou un test d'inégalité noté « A est strictement inférieur à B » noté A<B, « A est strictement supérieur à B » noté A>B, « A est supérieur ou égal à B » noté A>=B, « A est inférieur ou égal à B » noté A<=B.

Une « condition complexe » est une combinaison logique de conditions simples. Par exemple le test « A est égal à B » et « B est égal à C », se note (A=B) ET (B=C) et le test « A est strictement inférieur à B » ou « B est strictement supérieur à C » se note (A<B) OU (B>C).

On peut aussi imaginer des structures alternatives « imbriquées » telles que

Si *condition* **alors**
    Si *condition* **alors**
        Traitement 1
    Sinon
        Traitement 2
Sinon
    Traitement 3

Pour la lisibilité on utilise l' « indentation » qui consiste à écrire les instructions sur des lignes différentes en décalant les mots. Le trait vertical « | » utilisé ici permet de bien délimiter les champs. Certains éditeurs de langages de programmation

font automatiquement l'indentation.

À titre d'exemple, nous pouvons considérer l'algorithme suivant qui teste si le nombre entier introduit est un carré parfait :

Saisir *a*
***b* prend la valeur** racine(*a*)
***c* prend la valeur** arrondi(*b*)
Si *b* = *c* alors
    Afficher("Carré")
Sinon
    Afficher("Non carré")

Dans SCRATCH, cela prend l'allure ci-contre …
tandis que dans XCAS cela devient :

```
input(" Nombre ?",a) ;
b:=sqrt(a) ; c:=round(b) ;
if (b==c) { print('Carré !') }
     else { print('Mmmmh...') };
```

Les structures répétitives

Elles permettent d'exécuter plusieurs fois de suite le même traitement c'est à dire la même série d'instructions.

La plus simple à comprendre est la « structure itérative » qui consiste à répéter un certain traitement un nombre N de fois fixé à l'avance. Dans SCRATCH, la formalisation du jeu consistant à lancer 10 fois les deux dés et à tenir à jour le gain conformément à la règle propose ci-dessus va se faire avec le bloc jaune « répéter … fois » (ci-contre).

Dans la plupart des langages (y compris ceux des calculatrices) on utilise pour cela un compteur I (c'est une variable) pour contrôler le nombre (entier) de tours. À chaque « tour » le compteur I augmente automatiquement de 1.

Nous formulerons cela dans notre pseudo-langage par l'instruction :

Pour I de 1 jusqu'à N faire
    Traitement 1

Une autre structure répétitive est celle qui consiste à répéter un certain traitement tant qu'une certaine condition reste valide (on ne souhaite évidemment pas que la répétition se fasse une infinité de fois). Nous formulerons cette structure ainsi :

Tant que *condition* **faire**
    Traitement 1

Le nombre de répétitions dépendra de la condition. Si la condition n'est pas vérifiée au début alors le *Traitement 1* ne sera pas exécuté du tout. Si la condition est vérifiée au début et si la condition n'est pas susceptible d'être modifiée lors du *Traitement 1*, alors le *Traitement 1* sera exécuté indéfiniment et l'utilisateur sera obligé d'arrêter (brutalement) le programme. On dit que le programme « boucle indéfiniment », ce qui est une erreur majeure de programmation. Pour que l'algorithme soit correct, il est nécessaire que la condition cesse d'être vérifiée au bout d'un nombre fini de répétitions. Un raisonnement mathématique permet parfois de s'en assurer, mais il est parfois difficile d'avoir l'assurance du fait que le programme ne bouclera jamais indéfiniment.



Une dernière variante de la structure répétitive consiste à répéter un traitement jusqu'à ce qu'une certaine condition soit vérifiée. C'est ce qui se produit lorsque notre joueur recommence à jouer en espérant atteindre un gain de 5€ (ci-contre, avec SCRATCH).[11]

On la traduit par l'instruction :

Répète
    Traitement 1
  jusqu'à *condition*

On remarquera que dans ce type d'instruction, le test étant fait à la fin de la boucle, cela implique que le traitement est exécuté au moins une fois même si la condition est vérifiée au début.

11 Situation fort intéressante tant au plan mathématique qu'algorithmique : l'algorithme se termine-t-il ? Rien ne l'assure !

Exemples de dispositifs de classe

L'enseignement de l'algorithmique fournit l'occasion de varier les dispositifs de classe ; par exemple, on peut proposer aux élèves de modéliser d'une manière « semi-formelle » des algorithmes issus de la vie quotidienne et de les faire vivre sous formes d'activités de communication. Dans la progression pédagogique on aura intérêt à passer par des phases de tâtonnement, d'expression orale, d'échanges sans chercher à aborder trop rapidement la formalisation écrite qui peut s'avérer bloquante pour certains.

Les exemples suivants ne sont décrits ni dans le détail, ni dans leur contenu ni dans leur mise en œuvre dans la classe. Ils peuvent servir de base à la mise en place d'activités de groupe permettant des premières réflexions autour de la notion d'algorithme dans le cadre de situations axées sur la communication. En ce sens, après un temps d'investigation les élèves seront chargés de produire un « texte » (écrit ou oral) compréhensible et directement utilisable par leurs camarades par exemple.

Toutes ces activités ont pour objectif la production ou l'interprétation d'algorithmes et leur vérification obtenue par l'action immédiate et pas nécessairement issue directement du champ mathématique.

Dans ces premières activités, la formulation sera probablement lourde en comportant des structures de la forme : « si tu es dans telle situation alors fais cela, sinon » ou « tant que ceci se produit on continue à faire... ». Cette lourdeur pourra alors fournir une motivation pour la mise en place une syntaxe commune sur des éléments d'algorithmique récurrents : boucles, tests... Cette syntaxe commune peut être un premier pas vers de premières rencontres avec des langages dédiés. Au cours de ce processus on pourra mettre en évidence le besoin de formalisation et de rigueur.

Lors de ces premières activités on pourra montrer que, consciemment ou non, les élèves ont au cours des années précédentes (au collège) utilisé, voire conçu, des algorithmes en mathématiques. Ils pourront être mis en œuvre de manière naïve sous forme de jeux ; en effet la gestuelle peut beaucoup aider à comprendre certains algorithmes. Leur formulation pourrait alors permettre d'aborder différents aspects de la programmation : tests d'arrêts, boucle conditionnelle, etc. On peut citer par exemple la recherche par dichotomie, l'algorithme d'Euclide …

Après une période d'initiation, on peut amener les élèves à lire des algorithmes pré-écrits, à comprendre ce qu'ils font et à poser des questions visant à les modifier.

1 / Quelques jeux

a. Le « Jeu du cartable »

Pour nombre d'élèves de collège, préparer son cartable du lendemain de manière « optimale » est une activité parfois laborieuse ! Elle peut toutefois être le support d'un travail de découverte de la notion d'algorithme[12].
Confiée à des élèves disposés en groupes, l'objectif de cette activité est de décrire une méthode permettant de préparer au mieux (pas d'affaires manquantes, mais pas d'affaires superflues non plus) son cartable pour le lendemain. Différentes stratégies peuvent apparaître (en particulier celle de la table rase qui consiste à tout vider...). Chaque groupe a donc en charge la rédaction d'une méthode permettant de « faire son sac ». Par exemple :

- préparation du traitement : liste des disciplines du lendemain et liste du matériel déjà présent dans le cartable ; liste du matériel par discipline ;
- traitement : comparaison des documents se trouvant dans le cartable et ceux à y mettre ;
- édition des résultats : liste des fournitures placées dans le cartable.

Une fois réalisée, cette fiche est fournie à un autre groupe qui peut ainsi la tester.

b. Le « Jeu des multiples »

Ce jeu (parfois utilisé dans les cours de langues vivantes) peut être décliné sous de nombreuses variantes.

Description du jeu : les élèves sont placés en rond. L'un après l'autre, les élèves égrènent les entiers naturels . La difficulté réside dans le fait que si l'entier est par exemple un multiple de 3, l'élève annonce « fizz », si c'est un multiple de 5, il annonce « buzz », etc.

On peut proposer aux élèves d'écrire une règle du jeu à faire tester à leurs camarades : comment programmer une machine pour qu'elle réponde correctement si on l'incluait dans le jeu ?

La question de l'arrêt du jeu se pose : fixer un entier maximal ? Arrêter quand il ne reste plus qu'un seul participant ?

On peut bien sûr compliquer les règles du jeu en y introduisant des règles mathématiques plus sophistiquées. En voici quelques exemples, sachant que l'on choisit une onomatopée pour chaque entier à ne pas prononcer (la liste proposée n'est

12 Ce problème n'est pas sans évoquer le « problème du sac à dos » : parmi les objets que je dois emporter dans mon sac à dos, lesquels dois-je choisir pour maximiser la somme emportée tout en ne dépassant pas les 15 kg autorisés ? Des versions simplifiées de ce problèmes pourraient être présentées aux élèves.

pas exhaustive et ne sous-entend pas qu'elle doit être proposée dans cet ordre aux élèves) :

– si le nombre est le énième multiple de 3, l'élève doit répéter n fois l'onomatopée correspondante ;
– si le nombre est multiple de deux entiers choisis, l'élève doit prononcer les deux onomatopées correspondantes ;
– si le nombre est multiple de plusieurs entiers choisis, il est prononcé tel quel ;
– si le nombre contient un entier choisi dans son écriture décimale.

On voit que ce jeu peut par exemple permettre de déboucher sur la notion de ppcm ou de décomposition en produit de facteurs premiers .
Les règles pourront être proposées par les élèves eux mêmes, désireux d'en augmenter la difficulté.

c. Tous en rang !

Ce jeu consiste en une course effrénée... pour ne pas être le premier !

Le principe : le professeur d'EPS a généreusement prêté son jeu de dossards. Tous les dossards sont différents. Après avoir endossé un dossard, tous les élèves s'alignent les uns à côté des autres sur un carrelage.

Au signal donné par le professeur, chacun avance d'un nombre de carreaux égal à son numéro de dossard. À partir du signal suivant, les élèves avancent sur le même principe à la condition d'avoir un élève qui soit plus avancé qu'eux.

Outre que les mises en place de ce jeu peuvent être multiples (avancée simultanée de tous les élèves ou avancée un par un, choix des dossards, nombre d'élèves...), cette situation permet d'aborder deux questions intéressantes : celle du ppcm de plus de deux entiers (qu'il conviendrait de faire découvrir par les élèves) et celle de savoir si un algorithme s'arrête. La programmation effective de l'algorithme pourra être envisagée dans un deuxième temps (elle nécessite au moins deux boucles imbriquées puisqu'à chaque « tour de jeu » il faut pour chaque coureur examiner si un autre coureur est devant).

Si le temps ne le permet pas, on peut jouer à ce jeu sur un damier traditionnel dont le nombre de cases ne permet pas toujours d'aller jusqu'au bout de la partie. Il faut alors anticiper ce que sera la suite du jeu.

2 / Quelques automates

Comme précisé dans le texte de présentation, nous sommes entourés d'automates dont le fonctionnement dépend d'algorithmes.

Tenter de reproduire le fonctionnement de ces automates (dont certains ont été étudiés en cours de technologie au collège) peut être intéressant. En voici trois exemples qui pourront être illustrés dans un second temps à l'aide du logiciel Scratch qui fournit une interface graphique adaptée à ce genre de situation.

On peut bien entendu décliner ces activités en fonction des réactions des élèves et de leur propositions. Elles ont l'intérêt de générer des algorithmes susceptibles d'être modifiés en fonction des paramètres d'utilisation qu'ils désireront perfectionner.

Chacune ne devrait pas être livrée clé en main à la classe (ou aux groupes dans le cas où l'on envisage de confronter les productions) mais être pensée par les élèves qui en délimiteront le domaine d'application du plus simple au plus complexe.

a. Comment gérer un distributeur de billets de banque ?

Quelques exemples de traitements possibles : vérification de la date de fin de validité de la carte, du solde du compte, du retrait maximal autorisé (en jours glissés ou sur une période fixe), vérification du code secret (carte avalée au bout de trois essais erronés), choix multiples ou ouverts de la somme à retirer, comment fournir cette somme en fonction du nombre de billets encore disponibles dans le distributeur, impression ou non de la facturette...

b. Le débit de repas du self par carte

Cette situation vécue au quotidien par les élèves permet là encore d'explorer et de multiplier les contraintes selon les questions posées en classe. Quelques contraintes envisageables au moment où l'élève passe prendre son repas : l'a-t-il réservé dans la matinée ? Lui reste-t-il des crédits repas ? L'établissement propose-t-il des crédits repas ? L'établissement a-t-il besoin de conserver les statistiques de fréquentation de l'élève dans une base de données ?

c. Le digicode

Il s'agit de modéliser le système de saisie d'un code à 4 chiffres et 1 lettre donnant accès à un immeuble. L'algorithme étant un peu compliqué, il conviendra de commencer par un système simplifié à deux chiffres par exemple.

3 / Lecture d'algorithmes

Voici trois exemples d'algorithmes accompagnés d'un questionnement possible des élèves. Ce questionnement complet peut ne pas être proposé aux élèves mais déroulé au fur et à mesure de l'animation de la séquence en fonction des réactions de la classe.

a. Un peu d'épargne

On considère l'algorithme suivant :

Mettre 5000 dans S
Mettre 0 dans N
Effacer l'écran
Tant que S est strictement inférieur à 8000
    Remplacer S par S*1,02
    Augmenter N de 1
    Afficher N et S
Fin du Tant Que

Où S désigne la somme détenue par Paul à la banque et N désigne le nombre de semestres de dépôt.

Questions :

- Écrire les affichages successifs qui apparaîtront à l'écran.
- Donner un problème dont la solution est donnée par cet algorithme.

b. D'incertaines économies

On considère l'algorithme suivant :

Mettre 5000 dans S
Mettre 0 dans N
Effacer l'écran
Tant que S est strictement inférieur à 6500
    Choisir un nombre aléatoire A compris entre 100 et 200
    Remplacer S par S + A
    Augmenter N de 1
    Afficher N et S
Fin du Tant Que

où S désigne la somme détenue par Paul à la banque et N désigne le nombre de semestres de dépôt.

Questions :

1. Écrire une suite possible d'affichages.
2. Est-il possible d'obtenir 6 comme dernière valeur de N ?
3. Quelle est la valeur minimale de la dernière valeur de N ?
4. Donner un problème dont la solution est donnée par cet algorithme.

c. DNB 2007

On donne le programme de calcul suivant :

- choisir un nombre
- lui ajouter 4
- multiplier la somme obtenue par le nombre choisi
- ajouter 4 à ce produit
- écrire le résultat

Quel type de nombre retourne ce programme ?

Plusieurs activités sont possibles : tester le programme avec un tableur, écrire l'algorithme avec des noms de variables (cela le clarifie très nettement), et le faire fonctionner effectivement.

d. Le guidage au clavier

On considère l'algorithme ci-contre, écrit avec le logiciel SCRATCH. On suppose que l'objet ou « lutin » (dont les coordonnées sont nommées x et y) peut se déplacer dans une fenêtre rectangulaire repérée par les points A(-200, -150) (en bas à gauche) et B(200, 150) (en haut à droite).

Questions :

1. Quelle est la position initiale de l'objet ?
2. À quelle(s) condition(s) l'objet peut-il se déplacer ?
3. Proposer un parcours complet possible de l'objet.

```
quand [drapeau] pressé
aller vers x: 0 y: 0
à compteur attribuer 0
répéter jusqu'à bord touché?
    attendre jusqu'à touche flèche droite pressée? ou touche flèche haut pressée?
    si touche flèche droite pressée?
        poser x à position x + 10
    sinon
        poser y à position y + 10
    à compteur ajouter 1          clavier libre ?
    attendre 0.1 secondes
```

4. Modifier le programme pour que dernier accepte l'appui sur la flèche « vers le bas » avec le déplacement correspondant.
5. Que représente la variable `compteur` à la sortie ? Quelle est sa valeur minimale, maximale ?

4 / Évaluation de projets d'élèves

Dans un contexte de développement d'algorithmes (voir la présentation générale, évaluation des pratiques, activités 4c et 4d page 5), même simples, se pose rapidement la question de l'évaluation de la progression des élèves, dans la mesure où la réalisation d'un algorithme est souvent une question très différente d'un calcul à mener, une démonstration à rédiger, etc. Se limiter à un simple critère de « fonctionnement » n'est pas satisfaisant : certains algorithmes de piètre qualité « fonctionnent » tandis que d'autres ne « fonctionnent » pas mais pour des causes tout à fait mineures.

La grille ci-dessous peut donner quelques éléments en ce sens, non limitatifs il va de soi, et on adaptera ce questionnement aux situations effectivement rencontrées.

Critère	**Excellent**	**Bon**	**Moyen**	**Insuffisant**
Respect des bons usages Le but visé par l'algorithme est explicité, et des commentaires précisent le déroulement. Les variables ont des noms bien choisis.	Aucune erreur	De petits détails sont négligés. Le but est difficile à déterminer	Des détails manquent, mais le programme tente quand même d'accomplir ses fonctions essentielles.	Ne répond pas au problème posé. Objectif impossible à déterminer
Correction du code : L'algorithme fonctionne.	Fonctionne correctement dans **tous** les cas.	Fonctionne pour des données (entrées) standard mais échecs mineurs sur des cas particuliers.	Échoue pour des données (entrées) standard, mais pour une raison mineure.	Échoue pour des données (entrées) standard, pour une raison importante.
Interface utilisateur : (entrées, sorties) Elle est claire et commode.	Aucune faute	1-3 fautes mineures	Plus de trois fautes mineures ou une faute majeure	Plus d'une faute majeure

Algorithmes et géométrie

1 / Quelques problèmes

Dans toute cette partie le plan est supposé muni d'un repère orthonormal. A,B,C étant trois points du plan définis par leurs coordonnées (entières), que peut-on dire du segment AB ? du triangle ABC ? comment afficher ces objets de manière à ce qu'ils soient visibles ? etc.

Un programme tentant de répondre à ces questions dans toutes les situations peut sembler relativement complexe, mais si on décompose la tâche en tâches plus élémentaires, l'affaire est plus aisée.

Un scénario pédagogique possible est donc de commencer par faire réaliser un programme court et simple, puis à l'enrichir de semaine en semaine par étapes ; ce scénario, dont nous détaillerons quelques aspects, peut être adapté en fonction des calculatrices et des logiciels utilisés par les élèves.

2 / Points, segments et distances

On peut justifier qu'un triangle est isocèle, rectangle ou équilatéral en ayant recours aux longueurs, tout en s'interrogeant sur l'exactitude de ce type de calcul. Une première tâche à accomplir sera alors de calculer une distance, ce qui amène à s'intéresser au tracé des segments, etc.

a. Algorithme 1 : Milieu d'un segment

A,B étant deux points dont on connait les coordonnées, calculer les coordonnées du milieu de AB et représenter ces points.

Variables
x_A , y_A , x_B , y_B , x_I , y_I
Entrées
Saisir x_A , y_A , x_B , y_B
Traitement
x_I **prend la valeur** $(x_A+x_B)/2$
y_I **prend la valeur** $(y_A+y_B)/2$

Traduction CASIO

```
"A(X,Y)"
"X="?→X
"Y="?→Y
"B(X,Y)"
"X="?→Z
"Y="?→T
```

Sorties

Afficher x_I , y_I

Afficher les points A,B,I dans la fenêtre graphique.

```
(Z+X)/2→C
(T+Y)/2→D
Plot On X,Y
Plot On Z,T
Plot On C,D
End
```

Traitement XCAS

L'environnement XCAS rend particulièrement simple l'approche du graphisme, dans la mesure où les points y sont considérés comme des couples de coordonnées. À titre d'exemple, voici une séquence d'instructions qui trace un segment et son milieu dans la fenêtre graphique :

```
A:=point([1,2]);B:=point([3,4]);segment(A,B);C:=point((A+B)/2);
```

L'usage de la notation grassmannienne (A+B)/2 peut être évité en recourant à la forme :

```
A:=point([1,2]);B:=point([3,4]);segment(A,B);C:=milieu(A,B);
```

b. Algorithme 2 : quatrième sommet d'un parallélogramme.

Le plan est muni d'un repère. A, B et C étant trois points dont on connait les coordonnées, faire afficher les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

On calcule les coordonnées du point I milieu de la diagonale [AC].
Puis celles du point D symétrique du point B par rapport au point I.

Variables

x_A , y_A , x_B , y_B , x_C , y_C , x_D , y_D , x_I , y_I

Entrées

Saisir x_A , y_A , x_B , y_B , x_C , y_C ,

Traitement

x_I **prend la valeur** $(x_A+x_C)/2$

y_I **prend la valeur** $(y_A+y_C)/2$

x_D **prend la valeur** $2x_I-x_B$

y_D **prend la valeur** $2y_I-y_B$

Sorties

Afficher x_D , y_D

Traduction LINOTTE

```
Livre : Quatrième point parallélogramme
Paragraphe : saisie et calcul des coordonnées
     Rôles :
           xA est un nombre vide
           yA est un nombre vide
           xB est un nombre vide
           yB est un nombre vide
           xC est un nombre vide
           yC est un nombre vide
           xD est un nombre vide
           yD est un nombre vide
           xI est un nombre vide
           yI est un nombre vide
           reponse  est un texte valant "Le point D a pour coordonnées: ("
     Actions :
           tu affiches "xA="
           tu demandes xA
           tu affiches "yA="
           tu demandes yA
           tu affiches "xB="
           tu demandes xB
           tu affiches "yB="
           tu demandes yB
           tu affiches "xC="
           tu demandes xC
           tu affiches "yC="
           tu demandes yC
           tu ajoutes (xA+xC)/2 dans xI
           tu ajoutes (yA+yC)/2 dans yI
           tu ajoutes 2*xI-xB dans xD
           tu ajoutes 2*yI-yB dans yD
           tu ajoutes xD dans reponse
           tu ajoutes ";" dans reponse
           tu ajoutes yD dans reponse
```

```
        tu ajoutes ")" dans reponse
        tu affiches reponse
        tu termines
```

Remarque :

Une autre approche, basée sur les vecteurs, amènerait à considérer D comme $C+\overrightarrow{AB}$, soit $x_D=x_C+x_B-x_A$. On pourra même remarquer que XCAS fournit une réponse très simple sous la forme `D:=C+B-A;`. L'affichage des points se réalise alors automatiquement dans la fenêtre graphique.

c. Algorithme 3 : tracé d'un segment dans une fenêtre adaptée

Saisir les coordonnées des extrémités du segment.
Déterminer la fenêtre d'affichage :
  Récupérer les abscisses et ordonnées minimales et maximales des deux points ;
  Diminuer un peu les valeurs minimales et augmenter un peu les valeurs maximales
  (*pour ce faire, on choisit d'élargir de chaque côté d'un cinquième de l'écart entre le maximum et le minimum pour chacune des coordonnées*).

Variables
x_A , y_A , x_B , y_B
xmin, xmax, ymin, ymax   // Bornes de la fenêtre
deltax, deltay   // Élargissement de la fenêtre

Entrées
  Saisir x_A , y_A , x_B , y_B
Traitement
  Si $x_A<x_B$ **then**
    xmin **prend la valeur** x_A
    xmax **prend la valeur** x_B
  Sinon
    xmin **prend la valeur** x_B
    xmax **prend la valeur** x_A
  Si $y_A<y_B$ **then**
    ymin **prend la valeur** y_A
    ymax **prend la valeur** y_B
  Sinon
    ymin **prend la valeur** y_B
    ymax **prend la valeur** y_A
  deltax **prend la valeur** (xmax-xmin)/5
  deltay **prend la valeur** (ymax-ymin)/5
  xmin **prend la valeur** xmin-deltax
  xmax **prend la valeur** xmax+deltax
  ymin **prend la valeur** ymin-deltay
  ymax **prend la valeur** ymin+deltay
Sorties
  Tracer la ligne de (x_A;y_A) **à** (x_B;y_B)

Traduction TI :

```
: Disp "A(X,Y)"
: Input "X= ", X
: Input "Y= ", Y
: Disp "B(X,Y)"
: Input "X= ", Z
: Input "Y= ", T
: If X<Z
: Then
: X→Xmin
: Z→Xmax
: Else
: Z→Xmin
: X→Xmax
: If Y<T
: End
: Then
: Y→Ymin
: T→Ymax
: Else
: T→Ymin
: Y→Ymax
: End
: (Xmax−Xmin)/5→D
: (Ymax−Ymin)/5→E
: Xmin−D→Xmin
: Xmax+D→Xmax
: Ymin−E→Ymin
: Ymax+E→Ymax
: Line(X,Y,Z,T)
```

d. Algorithme 4 : tracé d'un polygone dans une fenêtre adaptée

Il s'agit d'une extension du programme précédent. Le nombre de sommets, même limité, oblige le recours aux listes ; les abscisses des points sont stockées dans la liste 1 et les ordonnées dans la liste 2, ainsi le point de rang N aura pour coordonnées $L_1(N)$ et $L_2(N)$. L'algorithme utilise des fonctions max et min opérant sur des listes (ou tableaux), renvoyant le plus grand (resp. le plus petit élément de la liste).[13]

Traduction TI

```
: ClrDraw
: 11→dim(L1)
: 11→dim(L2)
: 0→N
: While (N−int(N)≠0 or N<2 or N>10)
: Disp "N ENTIER NATUREL"
: Disp "ENTRE 2 ET 10"
: Input "N=",N
: End
: For(I,1,N)
: Disp "POINT",I
: Input "X=",X
```

13 créer « à la main » l'algorithme du max est un bon exercice d'algorithmique élémentaire.

```
: Input "Y=",Y
: X→L1(I)
: Y→L2(I)
: End
: L1(1)→L1(N+1)
: L2(1)→L2(N+1)
: max(L1)-min(L1)→H
: max(L2)-min(L2)→V
: min(L1)-H/8→Xmin
: max(L1)+H/8→Xmax
: min(L2)-V/8→Ymin
: max(L2)+V/8→Ymax
: H/8→Xscl
: V/8→Yscl
: For(I,1,N)
: Line(L1(I),L2(I),L1(I+1),L2(I+1))
: End
```

e. Algorithme 5 : tracés de segments point par point

Ces exercices peuvent constituer une prise en main de Scratch.
La syntaxe est celle de la langue « Français (Canada) »
L'objet animé porte le nom de « Sprite » ou « Lutin » suivant l'environnement.



Algorithme 5a : premier déplacement.

On place d'abord le « lutin » à sa position de départ (au centre de l'écran, c'est-à-dire aux coordonnées (0,0)).
On efface l'écran puis on « baisse » le stylo pour commencer le tracé.
Ensuite, on déplace 100 fois le lutin de 1 pas vers la droite.
Chaque déplacement est obtenu en ajoutant 1 à x (la variable x préexiste, c'est la coordonnée horizontale de la « pointe du stylo »).
On relève le stylo et on termine en replaçant le lutin à sa position initiale.

Cet algorithme de mouvement, très simple, peut être adapté pour produire d'autres mouvements rectilignes, d'abord parallèlement aux axes, puis dans d'autres directions.
Il permet de s'engager vers la simulation de divers mouvements rectilignes uniformes.

Algorithme 5b : deuxième déplacement.

L'algorithme ci-contre (à droite) comporte plusieurs boucles imbriquées.

Deux exploitations pédagogiques sont possibles :

- soit on observe le tracé obtenu, avec pour but d'expliquer le fonctionnement de cet algorithme. Le tracé fait bien ressortir le rôle de chacune des boucles ; en modifiant les constantes inhérentes à l'algorithme proposé (1, 4 et 20) on observe différents tracés, ce qui aide à affiner l'analyse.
- soit on demande aux élèves d'analyser l'algorithme *a priori*, et de prévoir la figure qui sera obtenue. La réalisation sous SCRATCH permettra alors de contrôler la réponse.

On pourra aussi proposer la recherche de l'algorithme donnant un carré, ou un rectangle de forme imposée, puis tester la création de diverses spirales …

quand pressé
aller vers x: -50 y: -50
effacer tout
abaisser le stylo
répéter 4 fois
répéter 20 fois
modifier x par 1
répéter 20 fois
modifier y par 1
relever le stylo
aller vers x: -100 y: -100

f. Algorithme 6 : distance de deux points.

A et B étant deux points du plan définis par leurs coordonnées, il s'agit d'automatiser le calcul de la distance $d=AB$. On utilise pour ce faire la formule $d=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$. La racine carrée étant une opération non exacte il est préférable de calculer d'abord $D=AB^2$.

Variables
x_A , y_A // Coordonnées de A
x_B , y_B // Coordonnées de B
D // Carré de la distance de A à B
Entrées
Saisir x_A , y_A , x_B , y_B
Traitement
D **prend la valeur** $(x_B - x_A)^2+(y_B - y_A)^2$

Traduction CASIO :

```
"A(X,Y)"
"X="?→X
"Y="?→Y
"B(X,Y)"
"X="?→Z
"Y="?→T
(Z-X)²+(T-Y)²→D
```

Sortie

  Afficher « AB²= »
  Afficher D
  Afficher « AB= »
  Afficher $\sqrt{D}$

```
"AB²="
D◀
"AB="
√(D)◀
End
```

Traduction PYTHON :

```
# Calcul de la distance entre deux points
from math import *                # permet d'utiliser sqrt (racine)
xa=input("Saisissez l'abscisse du point A :")    #
ya=input("Saisissez l'ordonnée du point A :")    # saisie des
xb=input("Saisissez l'abscisse du point B :")    # coordonnées des points
yb=input("Saisissez l'ordonnée du point B :")    #
D=(xb-xa)**2+(yb-ya)**2                # La puissance est notée **
print 'AB^2 = ',D                      # Calcul exact (grand entier)
print 'AB =',sqrt(D)              # Calcul approché
```

Variante avec SCRATCH

L'environnement SCRATCH ne permet pas de calculer très facilement (pas de fonction « carré »), mais, au-delà des calculs, il est intéressant d'utiliser SCRATCH pour manipuler directement des points (et autres objets graphiques) ; en particulier, la fonction « distance » est incluse dans l'environnement Scratch, il suffit de demander la distance d'un « Lutin » à un autre ou au pointeur de la souris.
L'exemple suivant utilise ces techniques pour moduler le volume sonore en fonction de la distance à un objet caché (le « trésor »). L'objet caché (ici nommé Lutin2) est une simple croix matérialisant un emplacement (un point, en somme) et le script associé est simplissime :

Script du Lutin1

```
quand [drapeau] pressé
à d attribuer 200
répéter jusqu'à d < 10
    à d attribuer distance de Lutin2
    mettre le volume à 10 + 2000 / d %
    jouer le son Chord
dire Trouvé
```

Script du Lutin2 (trésor)



L'objet à déplacer (ici Lutin1) possède un script (algorithme) en forme de répétition jusqu'au moment où on est tout proche de l'objet caché. Pour faire « sentir » la distance à l'objet caché (Lutin2) on fait émettre un son de plus en plus fort au fur et à mesure que l'on se rapproche[14] (d'où la formule $10+\frac{2000}{d}$, mais on peut en inventer d'autres) ; on pourrait aussi bien proposer aux élèves de jouer sur les couleurs ou tout autre signe visuel non numérique.
Le jeu avec ce petit algorithme permet à l'occasion de faire noter que la distance reste constante quand on décrit un cercle autour de l'objet caché[15].

g. Algorithme 7 : triangle isocèle en A

A, B et C étant trois points non alignés du plan, définis par leurs coordonnées, on veut tester si le triangle est isocèle en A.

Algorithme en langage naturel

Saisir les coordonnées des points.
Calculer les longueurs AB et AC.
Si AB²=AC² alors afficher que le triangle est isocèle en A,
sinon afficher qu'il ne l'est pas.

Variables

x_A , y_A // Coordonnées de A
x_B , y_B // Coordonnées de B
x_C , y_C // Coordonnées de C
D_1 // AB²
D_2 // AC²

Entrées

  Afficher « A(x,y) »

14 c'est la méthode employée dans les détecteurs de métaux dits « poêle à frire »
15 utiliser le clic droit dans le cadre inférieur droit de l'écran pour faire réapparaitre l'objet caché.

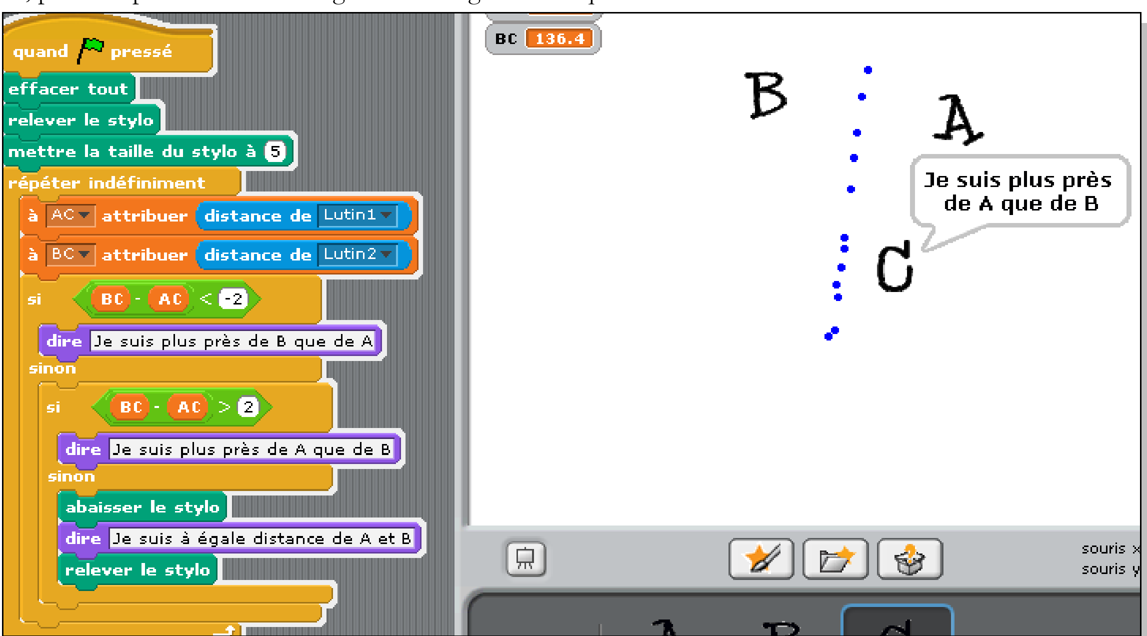
Saisir x_A, y_A
Afficher « B(x,y) »
Saisir x_B, y_B
Afficher « C(x,y) »
Saisir x_C, y_C
Traitement
D_1 **prend la valeur** $(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$
D_2 **prend la valeur** $(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2$
Sortie
Si $D_1=D_2$
alors
└ **Afficher** « ABC isocèle en A »
sinon
└ **Afficher** « ABC non isocèle en A »
Afficher « AB-AC =»
Afficher $\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}$

Remarques :

– On compare en fait les carrés de distances AB^2 et AC^2 ; en effet, le calcul des racines carrées est ici superflu.
– On introduit ici une nouvelle instruction conditionnelle : **si** condition **alors** action1 **sinon** action2, avec pour condition un test d'égalité.
– L'affichage de la différence des longueurs permet de porter un regard critique sur la réponse affichée.[16]

Traduction avec SCRATCH :

Les distances sont directement données par le logiciel.
Dans la pratique l'égalité parfaite est difficilement réalisable ce qui conduit à tester si la différence des longueurs est « petite », par exemple on affiche ici l'égalité des longueurs lorsque leur différence est inférieure à 2.



En faisant apparaître les points correspondants on fait « sentir » la présence de la médiatrice du segment [AB].

3 / Algorithmes divers

a. Algorithme 8 : fenêtre orthonormale automatique sur calculatrice

La fenêtre obtenue sur une calculatrice n'a aucune raison d'être orthonormale.

L'adaptation ne peut être effectuée qu'en tenant compte des dimensions de la fenêtre d'affichage.

L'algorithme est construit en partant du repère orthonormal par défaut de la calculatrice qui est ensuite dilaté ou contracté suivant la taille de la figure avant d'être translaté à l'emplacement de cette figure (centre de symétrie si la figure en a un).

L'algorithme suivant est partiel car il dépend de la nature de l'objet à afficher.

Variables
deltax // Distance maximale entre la plus grande et la plus petite abscisse

16 L'affichage sera 0 ou 0.0 selon le système de calcul employé ; même en présence de racines non exactes la différence doit être exactement nulle puisque la fonction informatique « racine » (sqrt) renverra deux réponses identiques pour des entrées identiques !

deltay // Idem en ordonnée.
xmin, xmax // Bornes d'affichage en abscisse.
ymin, ymax // Bornes d'affichage en ordonnées.
h // Longueur horizontal de la fenêtre en pixels
v // Longueur verticale de la fenêtre en pixels
i , j // Coordonnées du centre de la fenêtre orthonormale finale

Traitement
// Récupération de la taille de la fenêtre
Passer en Zoom décimal // Effet : La fenêtre affiche un repère orthonormal.
h **prend la valeur** xmax-xmin // *On sauvegarde la taille de la fenêtre orthonormale*
v **prend la valeur** ymax-ymin

// Récupération des coordonnées minimales et maximales de l'objet à afficher
xmin **prend la valeur ...** // Plus petite abscisse des points de l'objet à afficher.
xmax **prend la valeur ...**
ymin **prend la valeur ...**
ymax **prend la valeur ...**

// Affectation des bornes de la fenêtre (quelconque)
deltax **prend la valeur** xmax-xmin
deltay **prend la valeur** ymax-ymin
xmin **prend la valeur** xmin-deltax/5
xmax **prend la valeur** xmax+deltax/5
ymin **prend la valeur** ymin-deltay/5
ymax **prend la valeur** ymax+deltay/5

// Adaptation pour rendre les unités égales et centrage de la fenêtre
deltax **prend la valeur** xmax-xmin
deltay **prend la valeur** ymax-ymin
i **prend la valeur** (xmin+xmax)/2
j **prend la valeur** (ymin+ymax)/2
Si deltay/deltax > v/h
    alors
        xmin **prend la valeur** i-h*(deltay/2v)
        xmax **prend la valeur** i+h*(deltay/2v)
    sinon
        ymin **prend la valeur** j-v*(deltax/2h)
        xmax **prend la valeur** j+v*(deltax/2h)
// *La suite du programme se résume à l'affichage de l'objet.*

b. Algorithme 9 : Tracé d'un cercle dans un repère orthonormal.

Tracer dans une fenêtre orthonormale, un cercle dont on connait le rayon et les coordonnées du centre.

Traduction TI

```
: Zdecimal
: Xmax−Xmin→H
: Ymax−Ymin→V
: Disp "CENTRE(X,Y)"
: Input "X=",X
: Input "Y=",Y
: Input "RAYON=",R
: X−R−R/5→Xmin
: X+R+R/5→Xmax
: Y−R−R/5→Ymin
: Y+R+R/5→Ymax
: Xmax−Xmin→D
: Ymax−Ymin→E
: (Xmin+Xmax)/2→I
: (Ymin+Ymax)/2→J
: If E/D>V/H
: Then
: I−E*H/(2*V)→Xmin
: I+E*H/(2*V)→Xmax
: Else
: J−D*H/(2*V)→Ymin
: J+D*H/(2*V)→Ymax
: End
: Circle(X,Y,R)
```

c. Algorithme 10 : jeu de Marelle (ou Marelle de Bresenham)

Le jeu se joue à trois (Alice, Benjamin et Céline) sur un carrelage rectangulaire à grandes dalles orienté Ouest-Est en lon-

gueur et Sud-Nord en largeur.

La dalle de départ est la dalle sud-ouest de la pièce (en bas à gauche si on représente le carrelage par un rectangle)

Alice choisit un entier naturel *a* et Benjamin un nombre entier naturel *b*.

Au début de chaque partie Céline est sur la dalle de départ et tient un compteur (ou score) *s* qui est initialement à zéro.

Lorsque le jeu démarre Céline se déplace suivant la règle suivante :

– Si le compteur est strictement négatif, elle avance d'un carreau vers le Nord et le compteur augmente de *b*.

– Si le score est positif ou nul, elle avance d'un carreau vers l'Est et le compteur diminue de *a*.

Le jeu s'arrête lorsqu'elle arrive sur un bord du carrelage.

À quoi ressemble la trajectoire décrite par Céline ? Quelle en est la direction moyenne (si le dallage est suffisamment grand) ?

Le programme permettant de visualiser le déplacement donne une première idée de la réponse. On peut affiner la recherche sur tableur en faisant afficher les coordonnées (X;Y) des positions successives de Céline ainsi que le compteur et le rapport Y/X. On pourra justifier que la trajectoire est entre les droites d'équations aX-bY=a et aX-bY=-b (surveiller l'évolution de la quantité Z=aX-bY+S).

Traduction TI

```
: Zdecimal
: -4,7→X
: -3,1→Y
: 0→S
: Input "A=",A
: Input "B=",B
: While X<4,7 and Y<3,1
: Pt-On(X,Y)
: If S<0
: Then
: Y+0,1→Y
: S+B→S
: Else
: X+0,1→X
: S-A→S
: End
: End
```

Traduction SCRATCH

```
quand [drapeau] pressé
à A attribuer 5
à B attribuer 1
à S attribuer 0
cacher la variable X
cacher la variable Y
effacer tout
relever le stylo
aller vers x: 0 y: 0
abaisser le stylo
répéter jusqu'à bord touché?
    si S < 0
        glisser en 0.01 secondes à x: position x y: position y + 1
        à S attribuer S + B
    sinon
        glisser en 0.01 secondes à x: position x + 1 y: position y
        à S attribuer S - A
à X attribuer position x
à Y attribuer position y
afficher la variable X
afficher la variable Y
relever le stylo
aller vers x: -100 y: -100
```

Algorithmes et fonctions

Les algorithmes présentés dans ce chapitre, ainsi que leur transposition informatique doivent s'insérer au sein de la résolution de problème dans le cadre du programme de la classe de Seconde sur les fonctions.

Le fil directeur de cette partie est la problématique du fenêtrage, pour laquelle la notion de sens de variation et d'extremum joue un rôle crucial. On entend par fenêtrage la recherche des bornes minimale et maximale pour l'axe des abscisses et pour l'axe des ordonnées permettant d'afficher la courbe représentative d'une fonction afin de visualiser ses variations. On se placera sur un intervalle donné dans un premier temps.

Cette question du fenêtrage doit permettre d'appliquer des algorithmes répondant à la recherche d'extremums ou de solu-

tions d'équation et d'inéquation, tout en dégageant progressivement les notions de sens de variations.

1 / Recherche des extremums sur un segment : fenêtrage vertical

On se donne une fonction f définie sur un segment $[a;b]$. Que peut-on dire concernant son maximum et son minimum ?.

a. Algorithme 1 : déterministe à pas constant (tabulation simple)

Afin de construire la représentation graphique d'une fonction, il est nécessaire de connaître ses extremums sur l'intervalle étudié. Nous n'abordons pas dans ce document les problèmes de calcul formel, et nous limitons à des valeurs approchées.

Une méthode consiste à subdiviser l'intervalle initiale $[a\,;b]$ en N intervalles de même amplitude $\frac{b-a}{N}$. On fera ensuite le passage en revue des valeurs prises par la fonction en chacune des bornes de la subdivision. On parle d'une méthode par balayage à pas constant. On utilise des variables intermédiaires *min* et *max* qui vont permettre de mémoriser au fur et à mesure du balayage la plus petite des valeurs et la plus grande grâce à une structure de contrôle alternative. On utilise une structure itérative pour calculer les différentes images des bornes.

Cela donne l'algorithme suivant :

```
Variables
    a, b les bornes de l'intervalle d'étude
    f , la fonction à étudier
    N, le nombre d'intervalles
    x, la valeur « courante »
    y, la valeur correspondante de f(x)
Initialisation
    min prend la valeur f (a)
    max prend la valeur f (a)
    pas prend la valeur (b-a)/N
    x prend la valeur a
Traitement
    Pour k de 1 à N
        x prend la valeur x+pas     // remarque : ici surveiller z
        y prend la valeur f(x)
        Si y>max alors
            max prend la valeur y

        Si y<min alors
            min prend la valeur y

Sortie
    Affiche min et max.
```

Remarques :

- Il y avait $N+1$ valeurs de f à calculer, mais on en a calculé une ($f(a)$) avant d'entrer dans la boucle .
- Pour se convaincre du fait que l'algorithme fonctionne comme prévu, on peut « surveiller » l'évolution de la quantité $z=x-k.pas$ (c'est une variable supplémentaire, ou, avec le tableur, une colonne supplémentaire) : au premier passage z vaut a puisque k démarre avec la valeur 1, et à chaque étape x augmente de pas, k de 1, donc z reste égale à a.
- Cet algorithme peut se transposer sur tableur, le cas échéant, l'emploi des fonctions *min* et *max* réduit la mise en place de la feuille de calcul à une simple tabulation de la fonction f.
- Selon le logiciel utilisé pour transposer cet algorithme, les variables a, b, N et même la fonction f peuvent être saisies par l'utilisateur comme des arguments au moment de l'appel du programme.

On peut pour simplifier l'algorithme utiliser une particularité des boucles itératives de certains logiciels (calculatrices) qui permettent d'utiliser comme « compteur » une variable « réelle » s'incrémentant d'un pas constant.

Traduction sur calculatrices

Pour les transpositions sur calculatrice, la variable *min* s'appelle C, la variable *max* s'appelle D et le pas se nomme P. Les programmes cherchent le maximum de la fonction mémorisée en Y_1.

En sortie, les programmes calculatrices proposent le graphique de la fonction dans la fenêtre déduite des valeurs trouvées. C'est l'objet des cinq dernières lignes.

Calculatrice TI :

```
Input A
Input B
Input N
A→X
Y₁→C
```

Calculatrice CASIO :

```
?→A
?→B
?→N
A→X
Y1→C
```

```
Y1→D
(B-A)/N→P
For(K,1,N)
X+P→X
If Y1>D
Then
Y1→D
End
If Y1<C
Then
Y1→C
End
End
Disp C,D
A→Xmin
B→Xmax
C→Ymin
D→Ymax
DispGraph
```

```
Y1→D
(B-A)/N→P
For K→1 To N
X+P→X
If Y1>D
Then Y1→D
Ifend
If Y1<C
Then Y1→C
Ifend
Next
C◄
D◄
A→Xmin
B→Xmax
C→Ymin
D→Ymax
DrawGraph
```

Remarques :

– Dans le cadre de la résolution de problème, il convient de bien faire remarquer que, dans presque tous les cas, les réponses fournies par le programme ne sont que des valeurs approchées des extremums, et que dans certains cas, certes éloignés des fonctions que les élèves rencontrent, les valeurs sorties par le logiciel peuvent être fort éloignées des réponses exactes.

– Un exemple : pour $f(x)=\frac{1}{x^2+0{,}001}$ sur $[-0{,}95\,;0{,}95]$ avec un pas de 0,1 on trouve avec l'algorithme une valeur maximale d'environ 285 alors que le maximum de *f* est exactement 1000.

– Lorsque la fonction *f* est strictement croissante puis strictement décroissante sur $[a;b]$ [17], il est possible d'être plus précis : si on a trouvé une valeur maximale pour $x=a+k.pas$, on sait que le maximum de *f* sera atteint dans l'intervalle $[a+(k-1).pas\,;a+(k+1).pas]$; on peut donc prendre $a+k.pas$ comme valeur approchée de l'abscisse du maximum avec une erreur inférieure ou égale à *pas*.

b. Algorithme 2 : tabulation « aléatoire » d'une fonction

Le recours au hasard (dont on dit qu'il fait parfois bien les choses) est une tentative de remédier en partie au défaut du programme précédent sans avoir à mener une étude plus formelle. Il s'agit de « balayer » aléatoirement l'intervalle $[a;b]$ en cherchant *N* valeurs différentes. On utilise alors une instruction spécifique donnant un nombre aléatoire entre a et b ainsi qu'une structure itérative. Cela donne l'algorithme suivant :

Variables
    a, b les bornes de l'intervalle
    f la fonction à étudier
    N le nombre d'images à calculer.
Initialisation
    min **prend la valeur** *f* (a)
    max **prend la valeur** *f* (a)
Traitement
    Pour k **variant de** 1 **à** N
        x **prend une valeur aléatoire entre** a **et** b.
        Si *f* (x) > max **alors**
            max prend la valeur *f* (x)
        Si *f* (x) < min **alors**
            min prend la valeur *f* (x)
Sortie
    Afficher min **et** max

Remarques :

– Arbitrairement, les variables *min* et *max* sont initialisées avec la valeur de $f(a)$. En initialisant min et max avec la plus petite et la plus grande des images $f(a)$ et $f(b)$, le programme gagne en efficacité pour toutes les fonctions qui atteignent une valeur extrême sur les bornes de l'intervalle (c'est le cas de toutes les fonctions monotones).

– Pour l'implémentation, on utilise l'instruction « rand » ou « rand# » ou encore « random » qui donne un nombre aléatoire de l'intervalle [0 ; 1[. Si l'on convient de nommer Alea comme sur un tableur la fonction qui donne une valeur aléatoire de

17 On dit qu'une telle fonction est *strictement unimodale*. C'est le cas des fonctions polynômiales du second degré.

l'intervalle [0 ; 1[, alors pour obtenir une valeur aléatoire de l'intervalle $[a;b]$, il suffit de remarquer que le produit de ce nombre aléatoire Alea par l'amplitude $(b-a)$ donne un nombre aléatoire de l'intervalle $[0;(b-a)[$. L'ajout de a à cette valeur donnera un nombre aléatoire de l'intervalle $[a;b[$ d'où la formule : $a+\text{Alea}*(b-a)$.

Traduction PYTHON :

La fonction f à étudier est définie comme une fonction (informatique) dont l'argument x est un nombre réel, et qui retourne le réel image. C'est le mot-clé « def » du langage PYTHON qui permet de définir cette fonction.

On trouve ici un avantage à la souplesse du langage de programmation : la définition d'une fonction par morceaux ne pose aucun problème. Ainsi, on peut écrire :

```
def f(x):
    if x<1: return (x+1)*0.5
    else: return sqrt(x)
```

L'instruction `range(N)` du langage PYTHON génère une liste de N entiers allant de 0 jusqu'à $N-1$ (il existe aussi une instruction `xrange` qui produit un effet similaire tout en consommant moins de mémoire).

```
def f(x):
 return 3.0*x-x**2
import random
a=-5.0
b=5.0
N=50
minimum=f(a)
maximum=f(b)
for k in range(N):
 x=random.uniform(a,b)
 if f(x)>maximum:
     maximum=f(x)
 if f(x)<minimum:
     minimum=f(x)
print maximum
print minimum
```

La comparaison des résultats des deux algorithmes avec un même nombre d'itérations pourra donner lieu à des échanges autour de la notion de hasard et de son efficacité selon les cas.

Par exemple, avec la fonction carré sur l'intervalle $[-1;1]$, on obtient une valeur approchée du minimum à 10^{-2} près dès que le nombre tiré au hasard appartient à l'intervalle $[-0{,}1;0{,}1]$, ce qui se produit avec une probabilité de 0,1. On devine qu'avec 50 itérations, il y a une grande probabilité que cela se réalise au moins une fois. Plus précisément, cette probabilité vaut $1-0{,}9^{50}$ qui est supérieur à 99%.

L'algorithme déterministe à pas constant donnera 10^{-4} comme minimum de la fonction carré sur l'intervalle $[-1;2]$ avec 100 itérations. Un raisonnement identique montre que l'algorithme aléatoire, donnera quant à lui une meilleure valeur approchée du minimum plus d'une fois sur deux.

Cela dit, l'algorithme déterministe que nous avons détaillé n'est pas performant du tout, il en existe de bien meilleurs, notamment en rapport avec le nombre d'or et les nombres de Fibonacci[18], mais ces algorithmes sont au-delà de ce que l'on peut attendre d'un élève de Seconde.

2 / Tester la monotonie

La recherche d'extremum est grandement facilitée lorsqu'on connait les variations de la fonction. C'est l'objet des algorithmes qui suivent : tester la monotonie. On prendra garde à la différence entre les réponses négatives (l'algorithme montre vraiment que la fonction n'est pas monotone) et positives (la fonction peut être monotone mais il se peut aussi qu'elle ait des variations de sens contraire sur certains intervalles très courts).

L'algorithme présenté répondra à certaines questions qui se posent lors de la résolution d'un problème. Il pourra facilement être adapté à de nouvelles situations, ou être aménagé pour donner de nouvelles informations pertinentes au regard du problème à résoudre.

On se donne une fonction f définie sur un intervalle $[a;b]$. Que sait-on sur la monotonie de f ?

a. Algorithme 3 : déterministe à pas constant sur un intervalle borné

Cet algorithme simple repose sur le balayage à pas constant de l'intervalle d'étude et par la comparaison systématique de deux images « successives » ou plutôt du signe de leur différence. Si ce signe ne change jamais, la fonction est peut-être monotone, sinon elle ne l'est certainement pas et on pourra arrêter le balayage en affichant les valeurs considérées .

Cet algorithme pourra permettre d'approfondir la notion de sens de variations.

Variables
 a, b les bornes de l'intervalle d'étude [a ; b]
 f, la fonction à étudier
 N, le nombre d'intervalles
 x, les valeurs successives de la variable
Initialisation
 pas **prend la valeur** (b-a)/N
 sens **prend la valeur signe de la différence** *f* (b) – *f* (a)
 x **prend la valeur** a
Traitement

18 http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_section_search

Pour k **variant de 1 à** N
  Si (*f* (x+pas)-*f*(x) **n'est pas de même signe que** sens **) alors**
    Affiche « la fonction n'est pas monotone »
    Affiche *x* **et** *x*+pas
    Fin du programme

  x **prend la valeur** *x*+pas

Affiche « La fonction semble monotone ».

Sortie

Les affichages du traitement.

Remarques :

– Le type de variable et les valeurs prises par *sens* dépendent du logiciel. Ce pourra être un booléen (valeur logique « vrai » ou « faux »), ou alors les nombres -1 et +1.

– De la même façon, la boucle doit être adaptée sur calculatrice, et selon les logiciels, la sortie du traitement sera programmée différemment. L'instruction de fin de programme dans la boucle ne rentre pas dans les standards de la programmation. Ce choix pragmatique est ici fait pour des raisons de commodité au détriment de la structure de l'algorithme.[19]

Traduction SCILAB :

On définit au préalable la fonction sous SCILAB par :

```
function y=f(x), y=-x^2 + 10, endfunction
```

La même remarque que ci-dessus, au sujet des fonctions définies par morceaux, vaut ici. La définition de la fonction peut même recourir à un algorithme plus complexe comportant des boucles, notamment.

Puis le programme (avec un test supplémentaire pour s'assurer que les deux images ne sont pas égales) :

```
a=input("Entrer la valeur de a : ");
b=input("Entrer la valeur de b : ");
N=input("Entrer le nombre de tests : ");
sens = f(b)-f(a);
x=a;
if sens==0
  disp("Les images f(a) et f(b) sont égales : le programme ne fonctionnera pas");
end;
disp ("f(a) = "+string(f(a))+" et f(b) = "+string(f(b)));
for k=1:N
  if ((f(x+pas)-f(x))*sens<0)
    disp("La fonction n''est pas monotone");
    return;
  end;
  x=x+pas;
end;
disp("La fonction semble monotone");
```

3 / La question du fenêtrage horizontal : comportement asymptotique

On se donne une fonction *f* définie sur **R**. Quel est son comportement lorsque la variable prend des valeurs très grandes ?

On change ici de point de vue, on n'étudie plus la fonction sur un intervalle fermé mais un intervalle ouvert de **R**.

a. Algorithme 4 : exploration de grandes valeurs de la variable

L'objet de cet algorithme est de rechercher des informations sur le maximum de la fonction (s'il existe !). Explorer efficacement un intervalle très grand ne peut se faire « en aveugle » comme le fait une calculatrice, c'est-à-dire par le biais d'une progression arithmétique de la variable. On envisage alors des progressions plus rapides ; la mise en forme proposée ci-dessous explore les images par *f* des carrés des entiers.

Initialisation

f, la fonction à étudier
p, la progression de la variable, exemple : $p(k) = k^2$
N, le nombre d'itérations
max prend la valeur *f*(0)
x prend la valeur 0, ce sera l'antécédent de max.

Traitement

Pour k **variant de** 1 **à** N
  Si *f* (*p*(k))>max **alors**
    x **prend la valeur** p(k)

19 Ce cas est prévu dans certains langages (instruction `break`).

max **prend la valeur** f (x)

Sortie

Affiche x **et** max.

Traduction sur calculatrices

Calculatrice TI :

```
Input N
0→X
0→C
Y1→D
For(K,1,N)
K^2→X
If Y1>D
Then
Y1→D
X→C
End
End
Disp C,D
```

Calculatrice Casio :

```
?→N
0→X
0→C
Y1→C
Y1→D
For 1→K To N
K^2→X
If Y1>D
Then Y1→D
X→C
Ifend
Next
C◄
D◄
```

Remarques :

Cet algorithme peut ensuite être décliné pour tester la monotonie, ou pour explorer de grandes valeurs négatives, ou de petites valeurs proches de 0 … et dans tous les cas on fera prendre conscience du caractère empirique de la réponse obtenue.

La tabulation de la fonction selon ce principe permet d'appréhender le comportement asymptotique (et d'introduire de façon empirique la notion de limite dans le cadre d'une résolution de problème où cette question est porteuse de sens).

Pour une exploration plus efficace, le choix d'une croissance plus marquée peut se faire sentir. Dans ce cas, une progression géométrique de la variable est une stratégie judicieuse (on pourra commencer par suggérer de remplacer k^2 par 2^k).

4 / Recherche de solution d'équation et d'extremum

a. La dichotomie

On se donne une fonction qui change de signe entre *a* et *b*. Résoudre l'équation *f(x)=0*.

De nombreuses situations abordées dans l'année donneront lieu à la résolution graphique, numérique ou algébrique d'équations et d'inéquations.

Face à la multiplicité de ces problèmes, un algorithme automatisant cette tâche est légitime. Évidemment de nombreux outils logiciels intègrent les fonctionnalités numériques ou formelles permettant cette résolution.

Algorithme 5 : jeu du nombre à deviner

Ce texte propose la programmation d'un petit jeu sur calculatrice, avant d'aborder la dichotomie.

Programmer un jeu : deviner le nombre en six essais.

On demande à l'utilisateur de deviner en moins de six essais un nombre tiré au hasard entre 10 et 100.

On lui indique à chaque fois si le nombre proposé est supérieur ou inférieur au nombre cherché. Sans stratégie, il est difficile d'y parvenir.

Le choix des valeurs 10 et 100 qui encadrent le nombre à trouver, ainsi que le nombre d'essais est à mettre en débat dans la classe. En effet, selon le choix de ces valeurs, il sera ou non possible de déterminer à coup sûr la solution avec une bonne stratégie, ou on pourra seulement optimiser les chances de gagner.

Variables

N nombre choisi par l'utilisateur

Initialisation

S, un **nombre entier au hasard** entre 10 et 100

essai **prend la valeur** 1

Traitement

Tant que essai **est inférieur ou égal à** 6

Saisir N

Si N **est supérieur à** S **alors**

Affiche « c'est moins »

Si N **est inférieur à** S

Affiche « c'est plus »

```
        Si n=S alors
            Affiche « gagné »
            fin de programme

        essai prend la valeur essai+1
```

Sortie

Affiche « perdu ».

Une bonne stratégie conduit à l'algorithme utilisant la dichotomie. Cette méthode consiste, en choisissant à chaque fois la valeur située au milieu de l'intervalle en cours, à réduire de moitié à chaque fois l'amplitude de l'intervalle dans lequel se trouve le nombre et comme 2^6 est égal à 64, le dernier intervalle, sur cet exemple, est d'amplitude 1.

Algorithme 6 : recherche d'un zéro par dichotomie

On transpose cette méthode ici. Cela donne l'algorithme suivant :

Variables

m , valeur milieu de l'intervalle « courant »

Initialisation

a et b, les bornes de l'intervalle [a ; b]

f, la fonction (rappel : *f* change de signe entre *a* et *b*)

Traitement

```
Pour i variant de 1 à 50
    m prend la valeur (a+b)/2
    Si f(m) et f(a) sont de même signe alors
        a prend la valeur m
    sinon
        b prend la valeur m
```

Sortie

Affiche a et b

Remarque :

Les variables *a* et *b* changent de valeur au fur et à mesure de l'exécution de la boucle. Comme on exécute 50 fois celle-ci la largeur de l'intervalle initial est divisé par 2^{50} (environ 10^{15}), ce qui donne un bon encadrement de la valeur cherchée.

Traduction SCRATCH :

Le nombre *m* est affiché à l'écran.

```
quand [drapeau] pressé
mettre i à 1
répéter jusqu'à i = 100
    mettre m à (a + b) / 2
    si ((0 - m * m + 10 * m - 23) * (0 - a * a + 10 * a - 23)) > 0
        mettre a à m
    sinon
        mettre b à m
    mettre i à i + 1
arrêter le script

ici f(x)=-x^2+10x-23
```

b. Algorithme 7 : « monter plus haut »

Cet algorithme plus ambitieux que les précédents pose des problèmes dont les réponses sont subtiles. Il n'est pas envisageable d'aborder un tel algorithme avant que les élèves n'aient acquis une bonne maitrise de l'algorithmique.

On se propose ici de déterminer le maximum d'une fonction croissante puis décroissante sur un intervalle $[a;b]$ [20].

La connaissance des variations permet une recherche efficace du maximum.

Sa description naïve est la suivante :

pas **prend la valeur** (b-a)/10

20 On dit qu'une telle fonction est *unimodale*. C'est le cas des fonctions polynômiales du second degré.

Pour k **variant de** 1 à 10
  Tant que les images augmentent, on continue,
  Mais dès que l'image diminue
    on divise le pas par −10 *(et on change de sens)*

Pour pouvoir transposer cet algorithme, il faut le formaliser bien davantage.

En notant x_1, x_2 et x_3 trois valeurs successives de la variable telles que $f(x_1)<f(x_2)$ et $f(x_2)>f(x_3)$, il faut remarquer que le maximum est atteint dans $[x_1 ; x_3]$, mais qu'il n'est pas possible de savoir à priori s'il est atteint pour une valeur supérieure ou inférieure à x_2.

C'est la raison pour laquelle il faut prendre garde à la nouvelle valeur de départ de la variable avant de diviser le pas et de commencer une nouvelle boucle.

Variables
f, la fonction
  a, b les bornes de l'intervalle d'étude.
Initialisation
  pas **prend la valeur** (b – a)/10
  x **prend la valeur** a
Traitement
  Pour k variant de 1 **à** 10
    Tant que [*f*(x+pas) **est supérieur ou égal** *f* (x) **]**
      x **prend la valeur** x+pas
    x **prend la valeur** x + pas
    pas **prend la valeur** −pas/10
Sortie
  Affiche x, x + 20*pas, f(x+10*pas)

Traduction PYTHON:

```
def f(x):
    return 3.0*x-x**2

a=-1.0
b=3.0
pas=(b-a)/10
x=a
for i in range(8):
    while(f(x+pas)>f(x)):
        x=x+pas
    x=x+pas
    pas=-pas/10
print x
print x+20*pas
print f(x+10*pas)
```

À l'issue du traitement, le maximum se situe entre x et $x+20*pas$ (car le pas a été divisé par 10 une dernière fois). En sortie, l'algorithme affiche l'intervalle qui encadre l'antécédent du maximum, et l'image de son centre en guise d'approximation du maximum.

Cet algorithme peut être donné à étudier aux élèves, en leur demandant ce qu'il fait et dans quelle condition. L'enseignant peut aussi en proposer des versions fausses, par exemple en omettant la ligne qui suit la sortie de la boucle Tant que :

  x **prend la valeur** x+pas

ou en échangeant les lignes :

  x **prend la valeur** x+pas
  pas **prend la valeur** −pas/10

puis demander aux élèves, après une analyse, de le corriger.

Algorithmes et probabilités

Les algorithmes proposés ci-après s'insèrent dans le cadre de la simulation, et par conséquent de l'approche dite « fréquentiste » des probabilités.

1 / Le jeu du lièvre et de la tortue

Règle du jeu.

À chaque tour, on lance un dé. Si le 6 sort, alors le lièvre gagne la partie, sinon la tortue avance d'une case. La tortue gagne quand elle a avancé 6 fois.

Question : le jeu est-il à l'avantage du lièvre ou de la tortue ?

a. Algorithme 1 : Simulation d'une partie sans boucle

La partie se finit en au plus six lancés. Il est donc possible de simuler une partie sans avoir recours à une boucle.

Variables
  dé : la face du dé tirée au hasard
  tour : compte le nombre de tours que dure la partie
Initialisation

dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris
tour **prend la valeur** 1

Traitement

Si dé < 6 **alors**
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris
tour **augmente de** 1

Si dé < 6 **alors**
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris
tour **augmente de** 1

Si dé < 6 **alors**
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris
tour **augmente de** 1

Si dé < 6 **alors**
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris
tour **augmente de** 1

Si dé < 6 **alors**
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris
tour **augmente de** 1

Sortie

Si dé = 6 **alors**
Affiche « Le lièvre gagne »
sinon
Affiche « La tortue gagne »

Affiche tour

Remarques :

- Si le support de programmation sur lequel est transposé l'algorithme ne dispose pas des fonctionnalités de recopie de texte, la mise en place d'une boucle peut se justifier.
- Il est possible de modifier un peu la modélisation du jeu, afin de simplifier sa mise en œuvre, en particulier sur tableur ; en effet, la partie est équivalente aux lancers de six dés. Le lièvre gagne s'il existe au moins un six parmi les résultats.
- De cette façon un seul test peut suffire, à condition de disposer de l'instruction appropriée (comme l'instruction NB.SI du tableur).
- Cependant, l'arithmétique booléenne peut aussi se modéliser avec des sommes ou des produits d'entiers. Par exemple, le produit des six nombres (6 – *dé*) vaut 0 si et seulement il y a au moins un six.

b. Algorithme 2 : Cumuler un grand nombre d'expériences

Il suffit d'aménager le programme afin d'insérer la simulation d'une partie dans une boucle et de compter le nombre de parties gagnées par le lièvre ou la tortue. L'intérêt d'un langage de programmation devient évident : l'itération est très rapide aussi bien à écrire, modifier qu'à exécuter (ce qui n'est pas le cas avec le tableur). On pourra noter, à cette occasion, que certains langages sont beaucoup plus rapides que d'autres.

Variables
dé : la face du dé tirée au hasard
N : le nombre de parties à simuler
k : le compteur de boucle
tortue : le nombre de parties gagnées par la tortue

Initialisation
tortue **prend une valeur** 0

Traitement

Pour k **de** 1 **à** N
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris
Si dé < 6 **alors**
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris

Si dé < 6 **alors**
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris

Si dé < 6 **alors**
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris

Si dé < 6 **alors**
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris

Si dé < 6 **alors**
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 compris

Si dé < 6 **alors**
tortue **prend la valeur** tortue + 1

Sortie
Affiche tortue .

Traduction XCAS

```
N:=10;
Tortue:=0;
for (K:=1;K<=N;K:=K+1){
  dé:=rand(6)+1;
  if (dé<6) {dé:=rand(6)+1;}
  if (dé<6) {dé:=rand(6)+1;}
  if (dé<6) {dé:=rand(6)+1;}
  if (dé<6) {dé:=rand(6)+1;}
  if (dé<6) {dé:=rand(6)+1;}
  if (dé<6) {Tortue:=Tortue+1;}
};
print (Tortue);
```

c. Algorithme 3 : Avec une structure itérative conditionnelle.

Évidemment, plutôt que de répéter 6 fois les mêmes instructions, il est possible de simuler une partie à l'aide d'une boucle.[21] De cette façon, il sera facile d'expérimenter de nouveaux jeux en modifiant le nombre de cases que doit parcourir la tortue.

Variables
dé : la face du dé tirée au hasard
case : le numéro de la case sur laquelle se trouve la tortue
N : le nombre de cases que doit parcourir la tortue pour gagner.
Initialisation
N **prend la valeur** 6
case **prend la valeur 0.**
Traitement
Répète
dé **prend une valeur** entière aléatoire entre 1 et 6 inclus.
Si dé < 6 **alors**
case **prend la valeur** case + 1
jusqu'à [dé = 6 ou case = N **]**
Sortie
Si case = N **alors**
Affiche « La tortue gagne »
Sinon
Affiche « Le lièvre gagne »

Traduction SCILAB

```
N=6;
Ncase=0;
de=0;
while (de<6 | Ncase<N) do
  de=floor(rand()*6+1);
  if (de<6)
    Ncase=Ncase+1;
  end;
end;
if (Ncase==6)
  disp("La tortue gagne");
else
  disp("Le lièvre gagne");
end;
```

Remarques :

« *case* » est un mot-clé du langage SCILAB ; la variable s'appelle donc « *Ncase* ».

La structure *repeat..until* n'existe pas dans SCILAB, le code est donc légèrement aménagé par rapport à l'algorithme. Pour entrer dans la boucle une première fois, la variable « *de* » est initialisée avec la valeur arbitraire 0.

21 La transformation de la répétition d'instructions en une boucle, si elle simplifie l'algorithme, ne l'accélère pas pour autant.

2 / Coïncidence de date d'anniversaire dans une classe

Dans la vie courante certaines coïncidences apparaissent « extraordinaires » (comme rencontrer par hasard quelqu'un de connu à des centaines de kilomètres de chez soi). Malheureusement bien souvent ces coïncidences ne se prêtent pas facilement à une modélisation qui permettrait un calcul de probabilité ou une simulation.

Le problème évoqué dans ce paragraphe ne pose pas de grandes difficultés de modélisation; pour autant, le résultat s'avèrera sans doute étonnant pour de nombreux élèves.

Sa mise en place algorithmique peut être l'occasion de travailler des questions proches de celles des tris qui font souvent intervenir deux boucles imbriquées.

Quelle est la probabilité que dans une classe de 30 élèves, il y ait au moins deux élèves qui partagent la même date d'anniversaire ?

Pour effectuer une simulation, il s'agit dans un premier temps de tirer les 30 dates d'anniversaires au sort (parmi 365 jours, en supposant les dates d'anniversaire uniformément réparties sur l'année civile); il faudra ensuite chercher si deux dates coïncident.

Les dates sont mémorisées dans un tableau. Comme c'est souvent l'usage, on note entre crochets l'indice du tableau. Dans l'exemple, on considère que les indices du tableau commencent à 0.

Algorithme 4

```
Variables
    dates : tableau des trente jours d'anniversaire
    trouvé : un booléen qui indique si deux dates coïncident.
    k, p: deux compteurs de boucles.
Initialisation
    Pour k de 0 à 29
        dates[k] prend une valeur entière aléatoire comprise entre 1 et 365 inclus
    trouvé prend la valeur faux
Traitement
    Pour k de 0 à 28
        Pour p de k+1 à 29
            Si dates[k] = dates[p] alors
                trouvé prend la valeur vrai
Sortie
    Affiche trouvé
```

Si le tirage au sort des dates se fait aisément sur tableur, il n'en va pas de même de la recherche de dates identiques (du fait des deux boucles).

Traduction SCILAB :

```
dates=floor(rand(30,1)*365+1);
trouve=%F;
for k=1:29
  for p=k+1:30
    if (dates(p)==dates(k))
      trouve=%T;
    end;
  end;
end;
if (trouve)
  disp("Deux personnes ont même
     anniversaire");
else
  disp("Pas deux anniversaires
     communs");
end;
```

Traduction SCILAB (1000 expériences) :

```
N=0;
for i=1:1000
  dates=floor(rand(30,1)*365+1);
  trouve=%F;
  for k=1:29
    for p=k+1:30
      if (dates(p)==dates(k))
        trouve=%T;
      end;
    end;
  end;
  if (trouve)
    N=N+1;
  end;
end;
disp("Il y a "+string(N)+" coïncidences");
```



Bibliographie

- Projet de programme de Seconde, paru le 19 mai 2009 sur EDUSCOL
- J.-P. KAHANE, *L'enseignement des sciences mathématiques.* Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, éd. CNDP-Odile Jacob, 2002, ISBN : 2-7381-1138-6.
- IREM d'Aix-Marseille - *L'Outil algorithmique au lycée.* Une introduction. (1987)
- Dominique GUIN, Luc TROUCHE, *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique,* La Pensée sauvage (2002).
- B.WARIN, *L'algorithmique,* éd. Ellipses (2002), 328 pages, ISBN : 2-7298-1140-0
- J.-L. CHABERT, *Histoire d'algorithmes,* éd. Belin (1994), 586 pages, ISBN : 2-7011-1346-6
- H.F. LEDGARD, *Proverbes de programmation,* traduit et annoté par J. ARSAC, éd. DUNOD (1983), 162 pages, ISBN : 2-04-010238-8
- C. et P. RICHARD, *Initiation à l'algorithmique,* éd. Belin (1981), 128 pages, ISBN : 2-7011-0838-1

Présentation rapide des logiciels

Les logiciels proposés ci-dessous sont « libres » au sens où leur téléchargement, leur installation sont autorisés sans aucune restriction. On prendra garde, néanmoins, aux différences de licence régissant leur emploi. Bien entendu, cette liste n'est pas limitative et rien n'empêche que d'autres logiciels existants ou à venir puissent être employés avec profit pour illustrer l'algorithmique (par exemple, Ruby). La liste ne suit pas un ordre particulier (mais le premier logiciel est un peu à part).

1 / SCRATCH

SCRATCH est un langage de programmation qui permet de créer des animations, des jeux, de la musique … SCRATCH existe dans de nombreuses langues (on préfèrera la traduction « français-Canada » à la traduction française).
SCRATCH est conçu pour aider les jeunes à créer et partager des projets grâce à la technologie Java.
L'environnement SCRATCH se distingue de ceux qui suivent par sa capacité à gérer la programmation événementielle voire parallèle : un projet SCRATCH ne se réduit pas à un seul algorithme, il inclut généralement des éléments multimédias (sons, images animées) ainsi qu'une multiplicité d'algorithmes s'exécutant tour à tour.

Sites :

http://scratch.mit.edu
    Site officiel (en anglais) pour le téléchargement, avec nombreux exemples, documentation….

http://guides.recitmst.qc.ca/scratch
    Un guide d'apprentissage canadien (en français) de SCRATCH, très complet.

http://fr.groups.yahoo.com/group/scratch_group
    Une liste de diffusion autour de SCRATCH.

http://computerkiddoswiki.pbworks.com/f/Programming+Concepts+and+Skills+Supported+in+Scratch.doc
    Une base de documentation (en anglais).

http://www.howardism.org/Technical/Scratch/Book/Introduction.html
    Autre guide d'apprentissage (en anglais)

2 / XCAS

Xcas est un système de calcul formel pour Windows, Mac OSX et Linux/Unix. Il permet de faire du calcul formel, des représentations graphiques dans le plan ou l'espace, de la géométrie dynamique (dans le plan ou dans l'espace), du tableur, des statistiques et de la programmation. XCAS est aussi accessible en ligne.

Sites :

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/	Site officiel (téléchargement, documentation, exemples)
http://vds1100.sivit.org/giac/giac_online/demoGiacPhp.php	Site où l'on peut utiliser XCAS directement en ligne, sans aucune installation.
http://pcm1.e.ujf-grenoble.fr/XCAS/	Forum exclusivement consacré à XCAS.

3 / LINOTTE

LINOTTE est un langage de programmation utilisant une syntaxe en français (exemple : « tu affiches le texte »). Il fonctionne sous Java . L'apprentissage est rapide car sa syntaxe est le français. On pourra s'appuyer sur Linotte pour faire ses premiers pas dans la programmation.

Site :

http://langagelinotte.free.fr	Site officiel (téléchargement, exemples, documentation, forum dédié).

4 / MAXIMA

MAXIMA est un logiciel de calcul formel avec un module de programmation, existe en version Windows et Linux.

Site :

http://michel.gosse.free.fr	Un site très complet d'où l'on peut télécharger le logiciel. Des documents, des exemples. On y trouve également des liens vers d'autres sites.

5 / PYTHON

Python est un langage de programmation simple, relativement facile à apprendre, polyvalent. Il est disponible sur les plates-formes principales (Linux, Windows, Mac OSX).

Sites :

http://www.python.org/	Site officiel de Python (en anglais).
http://www.framasoft.net/article1971.html	Pour apprendre à programmer en Python
http://python.developpez.com/cours/	Pour apprendre à programmer en Python
http://die-offenbachs.de/eric/	Un excellent environnement de développement Python

6 / SCILAB

SCILAB est un logiciel de mathématiques généraliste qui propose un module de programmation (fonctionne sous Linux, Windows, Mac OSX). Il est par ailleurs adapté aux calculs numériques et à leurs visualisations.

Sites :

http://www.scilab.org/fr/	Site officiel (téléchargement, notamment la version « Scilab pour les lycées »).
http://www.scilab.org/lycee/	Documents, liste de diffusion, adaptés aux lycées.

7 / EXECALGO

EXECALGO est un logiciel conçu par le groupe d'experts qui a rédigé les programmes et le document d'accompagnement de la série L et qui a pour objectif de faciliter la compréhension de la notion d'algorithme (fonctionne sous Windows).

Site :

http://ldif.education.gouv.fr/wws/d_read/eduscol.maths-l/Document%20accompagnement/
donne accès aux documents d'accompagnement et en particulier à ceux concernant l'algorithmique en série L

8 / Tableau de correspondance entre les langages

	Saisir	Prend la valeur	Afficher	Si…alors …sinon	Pour i variant de 1 à N	Tant que…	Répète … Jusqu'à

Calculatrice TI	`Input X`	`2→X`	`Disp X`	`If X=2`
				`Then`
				`...`
				`Else`
				`...`
				`End`
					`For (K,1,N)`
					`...`
					`End`
						`While X<2`
						`...`
						`End`
							`Repeat X=2`
							`...`
							`End`
							Exécute le bloc jusqu'à ce que la condition soit vraie (il peut ne pas être exécuté).

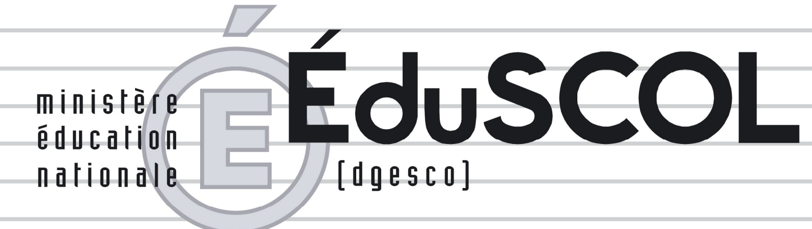
Calculatrice Casio	`?→X`	`2→X`	`C◀`	`If X=2`
				`Then ...`
				`Else ...`
				`IfEnd`
					`For 1→K To N`
					`...`
					`Next`
						`While X<2`
						`...`
						`WhileEnd`
							`Do`
							`...`
							`While X<10`
							Exécuté au moins une fois, puis tant que la condition est vraie.

SCRATCH	Créer une variable, et la contrôler avec un curseur.	à N attribuer 2	dire N	si N < 2 sinon	répéter N fois	répéter indéfiniment si N < 10	répéter jusqu'à N = 0

XCAS	`input("N=",N);`	`N:=2;`	`print(N);`	`if (X==2)`
				`{...}`
				`else {...}`
					`for`
					`(I:=1;I<=N;I:=I+1)`
					`{...}`
						`while (X<2)`
						`{...}`	

SCILAB	`N=input("N=");`	`N=2;`	`disp(N);`
			ou
			`mprintf("N="`
			`+string(N));`
				`if X==2 then`
				`...;`
				`else ...;`
				`end;`
					`for K=1:N`
					`...;`
					`end;`
						`While x<2,`
						`...;`
						`end;`	

PYTHON	`N=input("N=")`	`X=2.0`	`print N`	`if X==2:`
				`...`
				`else:`
				`...`
					`for i in range(N)`
					`...`
						`while X<2:`
						`...`	





Mathématiques

Lycée

Ressources pour la classe de seconde

- Fonctions -

Juillet 2009

Fonctions

Sommaire

1. Quels sont les objectifs à atteindre ?

Comme dans toutes les parties du programme, les paragraphes qui précèdent les tableaux précisant les contenus et les capacités attendues, fixent de façon nette les objectifs à atteindre et les déclinent en termes de ***nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre, précisant également le degré d'autonomie attendu.***

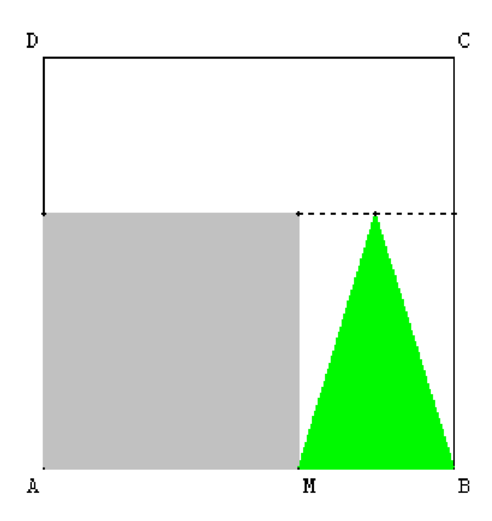
Ces objectifs sont ambitieux, le degré d'autonomie que les élèves doivent montrer pouvant être maximal : autonomie du choix de la démarche, de la nature du traitement à apporter, de la modélisation à mettre en œuvre.

> ***Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes posés sous une forme ouverte.***

Le programme fixe comme objectif la maîtrise de deux familles de problèmes :

- Première famille : problèmes se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ dans le cas où la fonction est donnée mais aussi dans le cas où toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction.
- Seconde famille : problèmes d'optimisation ou du type « $f(x) > k$ ». Dans un premier temps un élève doit pouvoir résoudre un tel problème, de façon exacte ou approchée, à l'aide d'un graphique et de façon exacte si les variations de la fonction et les antécédents de k sont connus. Dans un second temps cette étude peut être faite, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Exemple : une même situation pour divers problèmes



Le carré `ABCD` a un côté de longueur 8 cm. `M` est un point du segment [`AB`] On dessine comme ci-contre dans le carré `ABCD`

- un carré de côté [`AM`]
- un triangle isocèle de base [`MB`] et dont la hauteur a même mesure que le côté [`AM`] du carré.

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle, du motif constitué par le carré et le triangle.

Problème du type n°1 : On voudrait que le motif ait une aire égale à la moitié de celle du carré `ABCD`. Quelles dimensions faut-il donner au motif ?

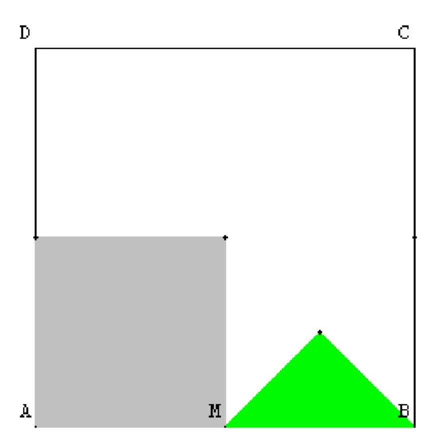
Problème du type n°1 : Est-il possible que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?

Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit la plus grande possible ? Si oui préciser dans quel(s) cas ?

Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit plus grande que l'aire du carré ? Si oui préciser dans quels cas c'est possible.

Problème du type n°2 : Comment évolue l'aire du motif en fonction de `AM` ? en fonction de `MB` ?

Une variante



Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm. M est un point du segment [AB]. On dessine comme ci-contre dans le carré ABCD :

- un carré de côté [AM] ;
- un triangle rectangle isocèle de base [MB].

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle, du motif constitué par le carré et le triangle.

Problème du type n°1 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ? Si oui préciser dans quels cas c'est possible.

Problème du type n°2 : Est-il possible de faire en sorte que l'aire du motif soit la plus grande possible ? la plus petite possible ? Si oui dans quels cas ?

Dans ces deux situations l'élaboration d'une formule reste relativement accessible et ne devrait pas constituer un obstacle insurmontable.

Dans la première situation :

- La façon dont l'aire du triangle évolue en fonction par exemple de AM ne se donne pas *a priori*. En conséquence l'aire du motif non plus.
- Écrire l'aire du motif sous la forme $0,5\,\ell^2 + 4\,\ell$ (si on désigne par ℓ la longueur AM exprimée en cm) peut permettre à certains élèves de donner le sens de variation de la fonction sur l'intervalle utile.
- Un élève pourrait se montrer étonné de constater que dans la classe certains trouvent que l'aire du motif est une fonction croissante (si l'on choisit AM comme variable), alors que d'autres obtiennent une fonction décroissante (ceux qui ont choisi BM comme variable). Cela pourrait être de nature à faire sentir l'importance de la variable.

Dans la seconde situation :

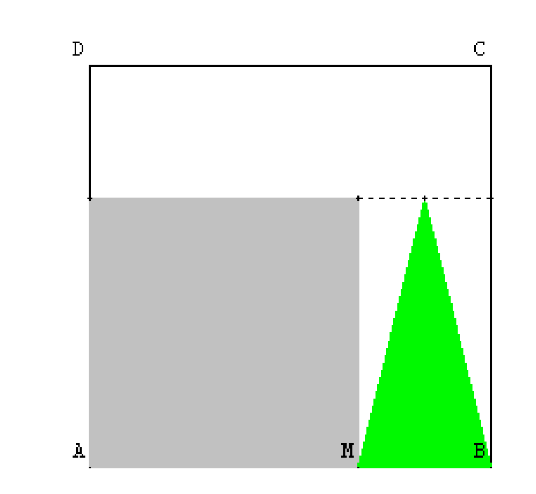
- Le contexte permet d'affirmer que l'aire du triangle est une fonction décroissante de AM : plus AM est grand, plus la base et en conséquence la hauteur du triangle sont petites).
- L'aire du motif a des variations en fonction de AM qui changent en la valeur $1,6$ ($8/5$).

On attend d'un élève qu'il puisse :

- s'approprier le problème en faisant des essais de manière à comprendre que, dans ces deux situations plusieurs quantités varient : le côté du petit carré, la base du triangle, la hauteur du triangle, l'aire du motif. Pour certains élèves un premier obstacle à surmonter est d'identifier que le côté du petit carré et la base du triangle sont liés, (resp. ℓ et $8-\ell$). Quand ils font des essais ils sont assez nombreux à choisir AM et BM indépendamment.
- identifier la variable ℓ (longueur du côté du carré ou longueur du côté du triangle)
- éventuellement prendre l'initiative de récolter des données expérimentales soit en calculant numériquement l'aire du motif pour quelques valeurs de ℓ (à la main ou avec un tableur), soit en utilisant un logiciel de géométrie.

Feuille de calcul

	A	B	C	D
1				
2				
3	c	aire du carré	aire du triangle	Aire du motif
4	0	0	0	0
5	0,5	0,25	1,875	2,125
6	1	1	3,5	4,5
7	1,5	2,25	4,875	7,125
8	2	4	6	10
9	2,5	6,25	6,875	13,125
10	3	9	7,5	16,5
11	3,5	12,25	7,875	20,125
12	4	16	8	24
13	4,5	20,25	7,875	28,125
14	5	25	7,5	32,5
15	5,5	30,25	6,875	37,125
16	6	36	6	42
17	6,5	42,25	4,875	47,125
18	7	49	3,5	52,5
19	7,5	56,25	1,875	58,125
20	8	64	0	64



- constater que ces essais ne lui permettent pas de répondre de façon exacte à la question posée mais qu'en revanche ils peuvent permettre d'y répondre de façon approchée à condition que les essais soient affinés. Ce faisant avoir eu la possibilité d'identifier la nécessité du passage au modèle mathématique pour répondre de façon exacte au problème posé (existence de solution ou pas ? unicité ou pas ? valeur exacte des solutions).

c	aire du carré	aire du triangle	aire du motif
4,94	24,4036	7,5582	31,9618
4,95	24,5025	7,54875	32,05125

- Associer de façon autonome au problème une expression, celle de l'aire du motif en fonction de ℓ :

$$\frac{1}{2}\ell^2 + 4\ell \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\ell(8-\ell) + (8-\ell)^2$$

  suivant le choix fait pour la variable ℓ.
- Conduire une résolution graphique ou algébrique et dans ce cadre :
  - ◇ associer à la formule une courbe tracée à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel et faire une lecture graphique
  - ◇ trouver de façon autonome la forme de l'expression adaptée au problème et, si besoin est, (autrement dit si la maîtrise technique du calcul algébrique n'est pas encore suffisante), l'obtenir en ayant recours au calcul formel
  - ◇ avoir eu une occasion de comprendre (et/ou de montrer qu'il a compris) que la résolution de l'équation donne toutes les solutions ainsi que leur valeur exacte alors que la résolution graphique ne donne qu'une valeur approchée des solutions et une démonstration est nécessaire pour être sûr de les avoir toutes.

En annexe 1 « des exemples de raisonnements possibles à valoriser ».

2. La notion de fonction : une notion à travailler dans la durée

La notion de fonction est, pour beaucoup d'élèves de seconde, une notion difficile à appréhender. Pour autant sa maîtrise est nécessaire à toutes les poursuites d'études.

Le travail sur les fonctions est amorcé au collège. Un objectif essentiel de ce travail consiste à faire émerger progressivement, et sur des exemples concrets, « un processus faisant correspondre à un nombre un autre nombre ». Les fonctions linéaires et affines sont vues à présent comme des exemples particuliers de tels processus, ce qui ouvre davantage la possibilité de soulever quelques questions de fond au sujet de la représentation graphique. Par exemple si l'objectif est de représenter graphiquement la fonction qui à tout nombre associe le carré de ce nombre une question importante et porteuse de sens est « peut-on ou non relier deux points consécutifs d'un nuage par un segment ? ».

La notion de fonction linéaire est présentée comme offrant un modèle pour toutes les situations qui relèvent de la proportionnalité.

Pour beaucoup d'élèves, la notion de fonction ne fait pas encore sens en début de seconde. Il importe donc qu'avant toute formalisation nouvelle, les élèves soient dès le début de l'année et le plus souvent possible confrontés à des situations dans lesquelles il y ait besoin, pour répondre à une question posée au départ,

- d'identifier deux quantités qui varient tout en étant liées,
- d'expliciter le lien entre ces deux quantités de diverses manières :
  - ◇ tableau de valeurs obtenu grâce à des mesures ou à l'utilisation d'un logiciel (logiciel de géométrie ou tableur),
  - ◇ nuage de points dessiné ou obtenu expérimentalement,
  - ◇ courbe liée à la situation posée,
  - ◇ formule exprimant l'une des quantités en fonction de l'autre,
- d'identifier les avantages et les inconvénients de tel ou tel aspect d'une fonction – tableau de valeurs, nuage de points, courbe, formule – selon la question initialement posée.

Les contenus de cette partie du programme ont donc été volontairement recentrés sur les incontournables nécessaires à toute poursuite d'étude et cela de manière à dégager du temps pour que les élèves puissent résoudre des problèmes.

En effet, outre le fait de faire acquérir à tout élève les savoirs utiles et un certain degré de maîtrise technique, cette partie du programme a pour objectif prioritaire de permettre aux élèves de consolider les compétences fondamentales relatives à la résolution de problème et donc être capable de réagir sainement, et sans indication de marche à suivre, devant un problème et de conduire des raisonnements (analyse du problème, élaboration de stratégies ou du traitement à apporter, mise en œuvre du traitement, contrôle de la cohérence des résultats obtenus, exploitation) pour apporter une réponse à la question posée.

3. Une incitation pédagogique

Le programme encourage une programmation moins centrée sur les notions elles-mêmes et davantage sur la nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre.

Par exemple, au niveau du travail à conduire sur le sens de variation des fonctions, l'objectif n'est pas de centrer un apprentissage sur une maîtrise du « comment étudie-t-on en général le sens de variation d'une fonction définie par une expression algébrique ? ». Il s'agit davantage d'obtenir que les élèves donnent sens à ce qu'est une fonction croissante (ou décroissante) sur un intervalle et sachent, quand le sens de variation d'une fonction est connu, comment exploiter une telle information pour répondre à une question.

L'attendu est aussi qu'ils soient capables, pour résoudre un problème, de donner de façon autonome le sens de variation d'une fonction trinôme du second degré. Dans le cadre d'une différenciation pédagogique, on peut s'autoriser à ce que quelques élèves deviennent capables d'aller au-delà et il est même souhaitable de le faire.

4. Notations et raisonnement mathématiques en analyse

a) Éclairer les différents sens des symboles « $=$, $<$, $>$ » en lien avec les quantifications existentielle ou universelle implicites

L'utilisation de ces trois symboles, avec leurs différents sens, intervient à tout moment dans cette partie du programme, les situations conduisant parfois à transformer des expressions algébriques, parfois à résoudre des équations ou des inéquations. Dans ces contextes, les symboles employés entre deux expressions peuvent être les mêmes alors que leur signification et les problèmes sous-jacents sont totalement différents. Par exemple « Vrai ou Faux ? »

$x^2+2x-3=(x+1)^2-4$	$x^2+2x-3 \geqslant 4$	$(a+b)^2=a^2+b^2$
$x^2=-2x+3$	$x^2+2x-3 \geqslant 0$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Chacune des « phrases » écrites ci-dessus est, du point de vue de la logique, une phrase ouverte, c'est-à-dire qu'elle n'a aucune valeur de vérité. Il est donc impossible de répondre à la question posée sans la préciser au préalable. Toutes ces ambiguïtés peuvent être pour les élèves source d'incompréhensions bloquantes. Il est donc essentiel de les aider à devenir capables, de façon autonome, de lever les implicites liés à certaines écritures.

Ainsi :

- « pour tout nombre réel x, $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ » est une proposition vraie ; le démontrer nécessite de faire un calcul. Disposer d'une quantification universelle est la « récompense » d'une démonstration. Il est essentiel de faire comprendre aux élèves que seul un raisonnement permet de gagner un « quel que soit », un « pour tout », un « pour n'importe quel ».
- « pour tout nombre x, $x^2 = -2x + 3$ » est une proposition fausse ; pour le démontrer il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle il n'y a pas égalité.
- « il existe des valeurs du nombre x pour lesquelles on a $x^2 = -2x + 3$ » est une proposition vraie. Un exemple suffit à le prouver.

Quand un élève écrit $x^2 = -2x + 3$, il peut vouloir dire qu'il cherche toutes LES valeurs que l'on peut donner à x pour que l'égalité soit vraie. Il peut aussi faire une erreur et vouloir dire implicitement que l'égalité $x^2 = -2x + 3$ est toujours vraie, c'est-à-dire est vraie quelle que soit la valeur que l'on donnera à x.

L'un des objectifs de ce travail consiste à donner à comprendre aux élèves que ***seul un raisonnement permet de gagner un « quel que soit », un « pour tout », un « pour n'importe quel »***.

Un travail sur les quantifications implicites de certaines formulations peut aider l'élève à clarifier des énoncés et donc à progresser sur les stratégies à adopter pour se prononcer sur la valeur de vérité de ces énoncés.
Des exemples à faire vivre en classe sont donnés **en annexe 2**.

b) Conduire avec les élèves un travail sur la négation

Ce travail s'appuie sur des exemples afin de dégager quelques idées fondamentales :

- conduire les élèves à prouver qu'une proposition universellement quantifiée est fausse ;
  Exemples :
  - prouver que deux expressions ne sont pas égales, par exemple en lien avec un travail sur l'erreur.
  - « Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ est positive sur $\mathbb{R}$ ». VRAI ou FAUX ?
  - « Toute fonction qui n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ ». VRAI ou FAUX ?
- leur faire identifier la non-linéarité de certaines fonctions en lien avec un travail sur l'erreur, par exemple « le carré d'une somme est-il égal à la somme des carrés ? », « l'inverse d'une somme est-il égal à la somme des inverses ? » ;
- les conduire à prouver qu'une fonction n'est pas croissante sur un intervalle.

> Si pour un élève la définition formelle n'est pas encore installée mais que le sens est construit, le raisonnement peut être : « *Je prends deux nombres rangés par ordre croissant dans* $[-2;0]$: -2 *et* -1. *Si la fonction carré était croissante sur* $[-2;0]$, *alors les carrés de ces deux nombres seraient rangés aussi par ordre croissant. On aurait* $4 < 1$. *Or c'est faux* ».
>
> Si la définition formelle d'une fonction croissante sur un intervalle est disponible, un élève peut conduire le raisonnement suivant : « *Dire que la fonction carré est croissante sur* $[-2;0]$ *signifie que "quels que soient les deux nombres* a *et* b *que je prends dans l'intervalle* $[-2;0]$, *chaque fois que j'ai* $a < b$, *alors j'ai* $a^2 < b^2$*". Or je peux trouver deux nombres (il existe deux nombres)* a *et* b *dans l'intervalle* $[-2;0]$ *pour lesquels j'ai bien* $a < b$ *et pourtant je n'ai pas* $a^2 < b^2$. *Je le prouve en prenant un exemple (un contre-exemple)* ».

c) Veiller à ce que les élèves sachent faire la distinction entre avoir DES solutions et avoir LES solutions

> Si x prend la valeur 0 ou la valeur -1 alors l'égalité $x^3 + 101x^2 + 100x = 0$ est vraie. Je peux en déduire que 0 et -1 sont des solutions de l'équation $x^3 + 101x^2 + 100x = 0$.
>
> Si je note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation je peux écrire que $\{0, -1\} \subset \mathscr{S}$.

d) Familiariser les élèves avec les notations propres aux intervalles

Il n'y a pas lieu de consacrer une ou plusieurs séances à la notion d'intervalle.

Au collège les élèves ont eu l'occasion de représenter sur la droite numérique des ensembles de nombres (par exemple tous les nombres solutions d'une inéquation du premier degré à une inconnue). En seconde il s'agit prioritairement de consolider ce qui a été amorcé au collège et en parallèle de proposer, simplement quand le besoin s'en fait sentir, et petit à petit, une façon de noter des ensembles que l'on sait déjà représenter.

5. Place de l'algorithmique en analyse

Relativement aux acquis visés par le collège la nouveauté est la formalisation de la notion d'algorithme. Cette formalisation sera poursuivie tout au long du lycée. L'objectif de la seconde est de poser l'essentiel à savoir, apprendre à :

- identifier le calcul ou le traitement qui est à répéter ;
- automatiser un calcul un nombre donné de fois ou un nombre de fois soumis à un test.

a) Automatiser le tracé progressif de la courbe représentative d'une fonction

La première approche de l'algorithmique en analyse peut être l'automatisation d'une représentation graphique d'une fonction. Bien sûr, les calculatrices graphiques et de nombreux logiciels (grapheurs, logiciels de calcul numérique, de calcul formel, logiciels de géométrie) donnent un tracé de la courbe représentative d'une fonction déterminée par une formule algébrique. Mais ces tracés sont faits de façon opaque. Il est souvent fructueux de conduire les élèves à tracer aussi une courbe « à la main » en partant d'un tableau de valeurs pour obtenir un nuage de points), de les inciter à se poser la question de la manière de joindre les points du nuage.
Proposer ensuite aux élèves d'augmenter par étapes le nombre des points du nuage peut renforcer leur compréhension de ce qu'est la courbe représentative d'une fonction en les aidant à mieux distinguer l'objet mathématique des dessins que l'on peut en faire.
Exemple d'algorithme (par dichotomie) écrit en langage naturel :

Données :
  fonction f,
  bornes a et b,
  nombre d'itérations du nuage N

Variables :
  variable entière pour la boucle : k,
  longueur de l'intervalle entre deux points : L,
  abscisse du point marqué : x

```
Entrer N
L ← (b-a)
Pour k de 1 à N
    | L ← L/2
    | x ← a
    | Tant que x⩽b
    |     | Marquer le point de coordonnées (x,f(x))
    |     | x ← x+L
    | attendre 5 secondes (ou un appui sur une touche)
Fin
```

b) Tracé d'une courbe définie par morceaux, par un processus itératif

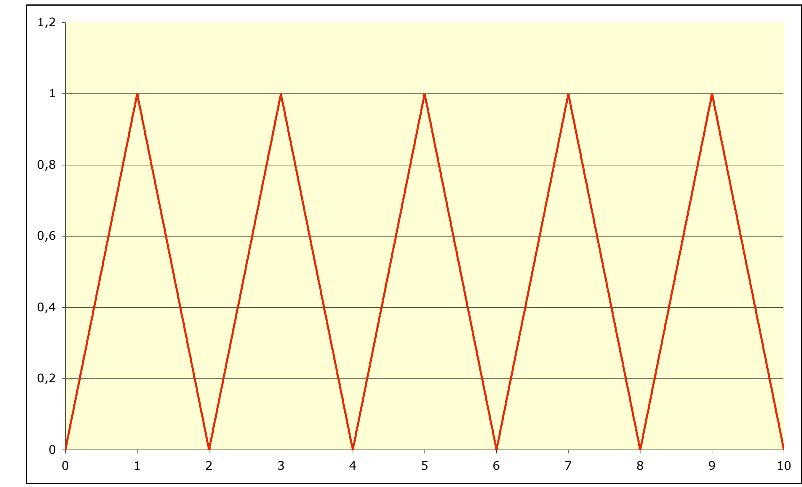
On peut, dans un premier temps, envisager ces types de tracés avec un tableur-grapheur, en employant les fonctions logiques du tableur.

Exemple :

On considère la fonction définie sur $[0;10]$ qui est affine entre deux nombres entiers consécutifs et qui vaut

- 0 pour les entiers pairs ;
- 1 pour les entiers impairs,

conformément au graphique ci-contre :



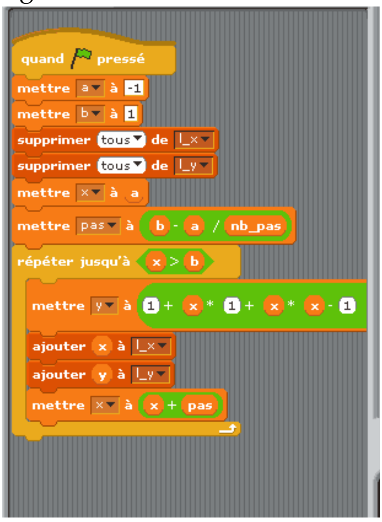
Avec un tableur, si l'on réserve à la variable la colonne A et aux images la colonne B, on peut saisir la première valeur de la variable dans la cellule A2, et dans la cellule B2 la formule suivante :

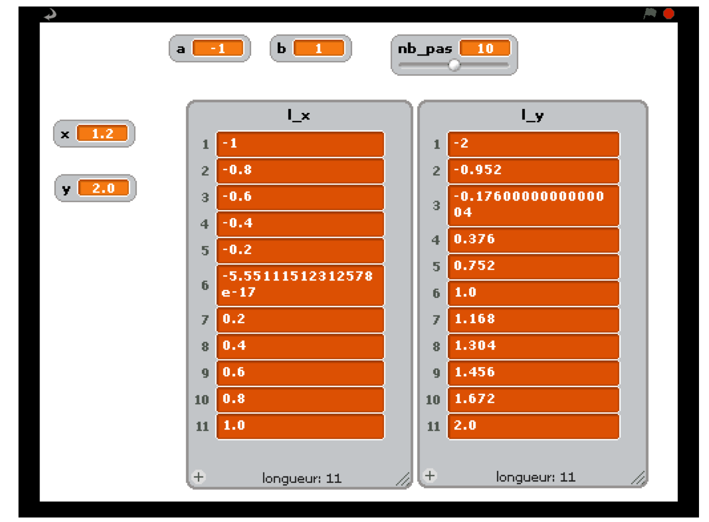
```
=SI(EST.PAIR(A2);A2-ENT(A2);1+ENT(A2)-A2)
```

Il ne reste plus qu'à recopier vers le bas la formule saisie en B2.

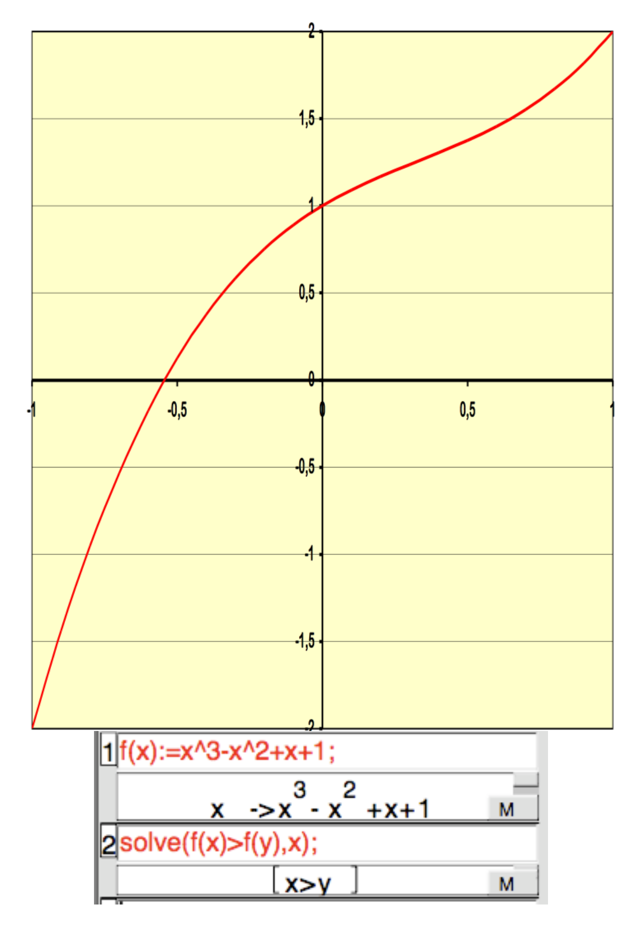
c) Recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation par dichotomie

Exemple : Considérons la fonction $x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$ sur l'intervalle$[-1;1]$. Un tableau de valeurs peut être obtenu avec le logiciel Scratch :





La fonction « passe de $f(-1) = -2$ à $f(1) = 2$ ». Intuitivement, elle va donc s'annuler. Une représentation graphique, donnée ci-contre, permet de conjecturer qu'elle est strictement croissante, ce qui peut être confirmé par un logiciel de calcul formel (voir, sous la courbe, le résultat donné par le logiciel Xcas).



Par exemple sur la calculatrice TI-nspire, l'algorithme de recherche d'une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ peut se traduire par le programme :

Define **dichot**$(a, b, n) =$
Func
Local x, y, c :
$x := a$
$y := b$
While $y - x > 10^{-n}$
  $c := \dfrac{x+y}{2}$:
  If $f(x) * f(c) > 0$ Then
    $x := c$
  Else
    $y := c$
  EndIf
EndWhile
Return x :
EndFunc

L'utilisation de la fonction **dichot**[1] ainsi définie se traduit par :

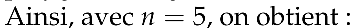
$dichot(-1, 1, 12)$	-0.54368901269208
$solve(f(x) = 0, x)$	-0.54368901269208

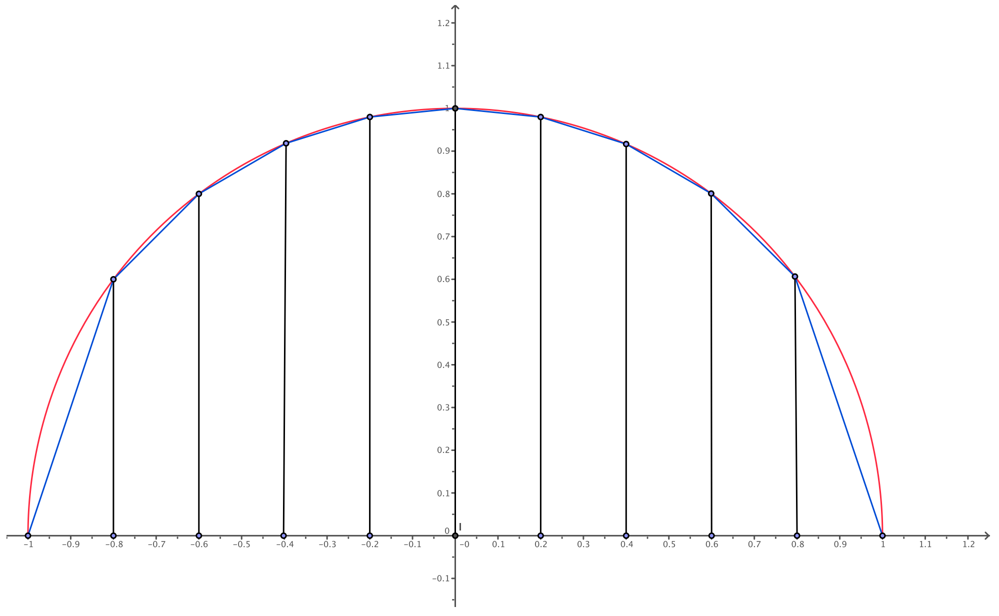
La dernière ligne servant à vérifier le résultat trouvé.

1. Notons au passage que l'algorithmique permet, conformément au programme de confronter les élèves à des fonctions autres que des fonctions d'une variable réelle : fonctions d'une variable entière, fonctions de plusieurs variables.

d) Longueur approchée d'un arc de courbe

Exemple : Vérification expérimentale de la longueur d'un demi- cercle de rayon 1.
Si l'on considère le demi-cercle de rayon 1 formé des points d'ordonnées positives, tout point $M(x, y)$ de ce cercle vérifie $x^2 + y^2 = 1$, soit puisque $y \geqslant 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$. On peut approcher le périmètre du demi-cercle par la longueur d'une ligne polygonale régulière dont les sommets sont sur le demi- cercle, l'origine étant $A(-1, 0)$ et l'extrémité $B(1, 0)$.
Ainsi, avec $n = 5$, on obtient :





Si l'on désigne par $2n$ le nombre d'arêtes de la ligne polygonale obtenue en prenant les points A_i dont les abscisses sont $x_i = -1 + \dfrac{i}{n}$ de sorte que $A_0 = A$ et $A_{2n} = B$, l'algorithme de calcul peut se traduire par le programme suivant (pour la calculatrice TI-nspire) :

Define **y**$(x) =$
Func
Return $\sqrt{1 - x^2}$
EndFunc

Define **norme**$(a, b) =$
Func
Return $\sqrt{a^2 + b^2}$
EndFunc

Define **longueur**$(n) =$
Func
Local $i, L, x1, x2$:
$L := 0 : \ x2 := -1$
For $i, 1, 2 * n$
  $x1 := x2 : \ x2 := x1 + \dfrac{1}{n}$
  $L := L + norme\left(\dfrac{1}{n}, y(x2) - y(x1)\right)$
EndFor
Return L
EndFunc

Ce petit programme donne, pour différentes valeurs de n les résultats ci-dessous, à comparer avec une approximation de π donnée directement par la calculatrice :

longueur (100)	3.1412985671606
longueur (1000)	3.1415833563503
longueur (10000)	3.1415923595898
π	3.1415926535898

e) Aire d'une région comprise entre deux courbes

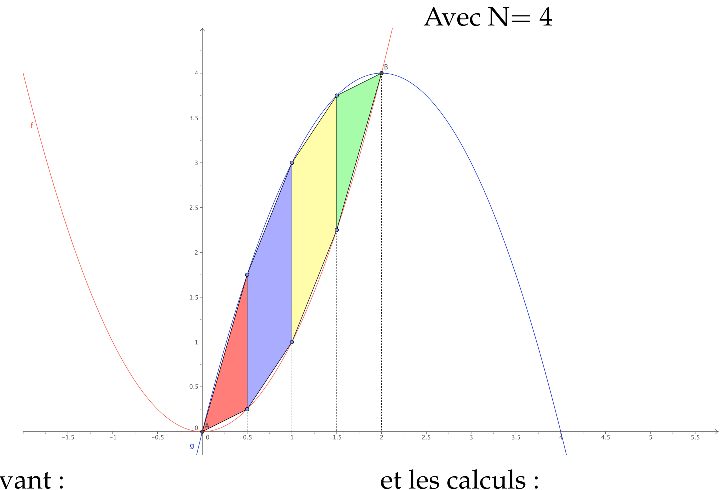
On se propose, par exemple, de calculer une valeur approchée de l'aire comprise entre deux paraboles sécantes. On Considère les deux paraboles $\mathscr{P}_1$ d'équation $y = f(x) = x^2$ et $\mathscr{P}_2$ d'équation $y = g(x) = 4x - x^2$ qui se coupent aux points $A(0,0)$ et $B(2,4)$. En partageant le segment $[0,2]$ de l'axe des abscisses en n segments de longueurs égales et en traçant les parallèles à l'axe des ordonnées, on obtient, en prenant les points d'intersections de ces droites avec les deux courbes, on obtient n trapèzes (le premier et le dernier sont des triangles). On considère que pour n assez grand, la somme des aires de ces trapèzes est une bonne approximation de l'aire comprise entre les deux courbes. L'aire du k-ième trapèze a pour valeur : $\frac{2}{n} \times \frac{\big(g(k/n) - f(k/n)\big) + \big(g((k-1)/n) - f((k-1)/n)\big)}{2}$ et l'algorithme de calcul peut s'écrire (en langage naturel) :

Données : fonction f : x↦ x^2, fonction g : x↦ 4*x−x^2,
nombre d'intervalles N.

Variables :
- variable entière pour la boucle : k,
- abscisses des bornes de l'intervalle en cours : x, y
- longueur de l'intervalle entre deux points : L,
- aire déjà calculée : S.

```
Entrer N
L ← 2/N :   x ← 0 :   y ← 0 :   S ← 0
Pour k de 1 à N
        | x ← y
        | y ← k*L
        | S ← S+(g(y)−f(y)+g(x)−f(x))*L/2
Fin
```

Avec N= 4



L'algorithme décrit ci-dessus donne le programme Scilab suivant :

```
function P1=f(x)
P1=x^2 ;
endfunction ;
function P2=g(x)
P2=4*x-x^2 ;
endfunction ;
function S=Aire(N)
L=2/N ;
x=0 ;
y=0 ;
U=0 ;
for k=1 :N,x=y, y=k*L, U=U+(g(y)-f(y)+g(x)-f(x))*L/2, end ;
S=U ;
endfunction ;
```

et les calculs :

```
-->Aire(10)
  ans =
    2.64
-->Aire(100)
  ans =
    2.6664
-->Aire(1000)
  ans =
    2.666664
-->Aire(10000)
  ans =
    2.6666666
```

6. Quelques précisions sur des points particuliers du programme

a) Autour de la courbe représentative d'une fonction

La notion de courbe représentative d'une fonction est une notion délicate que beaucoup d'élèves peinent à comprendre. Les acquis du collège sur ce point sont encore fragiles (voire très fragiles) et la classe de seconde doit proposer la poursuite d'un apprentissage (qui sera à continuer aussi en cycle terminal) :

- en mobilisant très régulièrement, et dans un premier temps sur de simples nuages de points, le passage du cadre graphique au cadre numérique afin d'en construire durablement la robustesse. Des professeurs le font sous la forme d'un rituel de questions rapides posées au début de chaque séance, ce qui leur permet de revenir très fréquemment et par petites touches sur ces questions de fond.

Voir Annexe 3

- en ne passant pas trop vite sur le passage du nuage de points à une courbe.
  Pour cela des questions de fond gagnent à être cultivées :
  - ◇ Peut-on joindre deux points du nuage par un segment ?
  - ◇ Si non pourquoi ne peut-on pas le faire ou comment le prouver ?
- en aidant les élèves à distinguer la courbe d'une fonction des dessins qu'on peut en obtenir avec un traceur de courbes.

Ce travail est d'autant plus important que, dans une résolution de problème, obtenir un dessin de la courbe représentative d'une fonction apparaît rarement aujourd'hui comme l'aboutissement d'une étude. Il en constitue plus souvent une étape, ce dessin apportant une aide précieuse à la résolution.

Mais cela nécessite que les élèves comprennent bien que, si ce qui est vu à l'écran permet de répondre de façon parfois satisfaisante à une question posée sur une situation concrète (cela peut être le cas dans beaucoup de situations empruntées aux domaines économiques) et peut donner des idées pour transformer la forme d'une expression, ***en aucun cas cela ne permet d'affirmer des propriétés de la fonction***. De la même manière que les élèves ont appris au collège à ne pas se contenter de lire sur un dessin les propriétés des figures géométriques, ils doivent apprendre à distinguer la courbe représentative d'une fonction (qui appartient au monde des objets mathématiques tout comme la figure géométrique) des dessins que l'on peut en faire (qui appartiennent au monde réel tout comme en géométrie, les dessins non codés).

Ce travail de formation est d'autant plus important que l'on souhaite libérer la pratique expérimentale des élèves. Leur apprendre à distinguer ce qui est établi de ce qui est encore à prouver, à utiliser à bon escient le mot « conjecture » est un objectif important à poursuivre.

b) Autour de l'étude qualitative d'une fonction

Les attendus du programme

Un objectif essentiel donné par le programme, et tout à fait suffisant dans un premier temps, est de ***donner sens*** à ce qu'est une fonction monotone sur un intervalle.
La définition formelle d'une fonction croissante (respectivement décroissante) reste trop complexe pour beaucoup d'élèves en début de classe de seconde. Formaliser ces deux définitions trop tôt peut faire véritablement blocage. Il est judicieux de les dégager très progressivement et de ne les formaliser que le plus tard possible. Le programme précise que leur maîtrise n'est un objectif que de fin d'année.
Cette maîtrise du sens est prouvée si :

- Lorsqu'il sait que f est une fonction décroissante sur $[2;+\infty[$ (ou qu'il le déduit du tableau des variations de f), un élève est capable de comparer les images de deux nombres donnés dans l'intervalle $[2;+\infty[$ (par exemple de ranger et , voire comparer les images de a et $a+1$ pour a élément de $[2;+\infty[$.
- L'élève sait que disposer des variations d'une fonction ne lui permet pas de comparer les images de n'importe quels nombres. Par exemple, il sait qu'il ne peut comparer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(3)$ à partir du tableau de variations de f donné ci-après :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	3	↘

Un élève prouve cette maîtrise du sens s'il sait recourir à la connaissance qu'il a du sens de variation des fonctions de référence pour comparer des nombres.

Par exemple comparer, sans utiliser de calculatrice, $(\sqrt{3}+1)^2$ et $\left(\frac{12}{7}\right)^2$.

> ***Le programme ne fixe pas comme objectif qu'un élève devienne capable d'étudier dans le cas général les variations d'une fonction en mobilisant l'effet sur l'ordre d'un enchaînement de fonctions de référence.***

La connaissance des variations des fonctions de référence (affine, carré, inverse) peut, dans un premier temps, n'être formalisée qu'en prenant appui sur le sens. Apporter une preuve nécessite la maîtrise d'une définition formelle et peut n'être entrepris qu'*a posteriori*, quand la maturité des élèves est plus grande.

Pour que les élèves puissent se concentrer sur la résolution de toute une famille de problèmes, l'objectif est qu'ils soient en mesure de disposer du tableau de variations des fonctions polynômes de degré 2 sans que cela ne représente pour eux un obstacle au niveau de la maîtrise technique.

Connaissance des fonctions polynômes du second degré

Concernant les résultats sur les variations d'une fonction polynôme du second degré, il peut suffire de donner la propriété affirmant qu'une telle fonction est soit croissante puis décroissante soit le contraire. En particulier, la méthode consistant en la lecture du coefficient de x^2 peut ne pas être donnée tout particulièrement aux élèves qui ne l'auraient pas repérée. L'objectif essentiel reste de faire raisonner les élèves avec un bagage minimum sans les surcharger de contenus vides de sens à mémoriser et leur demandant une capacité d'abstraction trop importante. En particulier, il ne serait pas judicieux, en classe de Seconde, de donner la valeur de l'abscisse $-\dfrac{b}{2a}$ qui réalise l'extremum d'une telle fonction.

Le programme précise que les résultats concernant les fonctions polynômes du second degré sont donnés en classe et connus des élèves mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Faire l'étude d'une telle fonction dans le cas général (comme cela se fait actuellement en première S) dépasse en effet les capacités d'abstraction de la majorité des élèves de seconde. Plusieurs stratégies pédagogiques sont possibles et relèvent de la liberté pédagogique :

- Faire appel à l'intuition et/ou à l'observation puis marquer la rupture entre propriété conjecturée et propriété non démontrée en classe mais validée par le professeur.
- Apporter une preuve (en mobilisant l'effet sur l'ordre des fonctions de référence) mais seulement sur un exemple générique et avec toute (ou une partie de) la classe.

Lorsqu'il s'agira ensuite pour un élève de donner les variations d'une fonction polynôme du second degré quelconque, il pourra par exemple :

- Prendre appui sur le fait – établi en cours – qu'une fonction polynôme de degré 2 est soit croissante puis décroissante, soit le contraire. Il ne lui restera plus alors qu'à trouver pour quel nombre réel il y a changement de variation.
  - ◇ si la forme canonique est disponible (soit parce que l'expression de la fonction est mise naturellement sous cette forme soit parce que l'élève identifie qu'il en a besoin et qu'il l'obtient en utilisant un logiciel de calcul formel), il pourra en déduire à la fois l'extremum, la valeur en laquelle il est atteint et son caractère (minimum ou maximum) ;
  - ◇ sinon exploiter la symétrie de la courbe de la fonction. Du fait de cette symétrie l'abscisse de l'extremum est la demi-somme des abscisses de deux points de la courbe de même ordonnée. L'élève a donc toute liberté de choisir de rechercher les points communs de la courbe avec l'axe des abscisses, ou prendre l'initiative de chercher les deux antécédents d'un même nombre. Une fois trouvées les coordonnées de l'extremum, la comparaison avec l'ordonnée d'un autre point de la courbe suffit à établir son caractère.
- Articuler observations de l'expression et d'un graphique obtenu avec une calculatrice : par exemple, la fonction semble d'abord croissante puis décroissante. Sur le graphique un maximum égal à 4 semble atteint en la valeur 3. Mise en place d'éléments de contrôle : l'image de 3 est bien 4 ; après calcul algébrique vérification que toute image s'écrit 4 plus quelque chose plus petit que 0 ou 4 moins quelque chose de plus grand que 0. Donc toute image est plus petite que 4. Il y a donc maximum en 3.
- Combiner les deux approches précédentes lorsque, par exemple, l'abscisse de l'extremum n'est pas directement lisible (cas d'une valeur non décimale).

Une porte ouverte à une certaine différenciation pédagogique

La maturité et la capacité d'abstraction que demandent la manipulation des expressions littérales et la mise en place de tels raisonnements sont différentes pour chaque élève et évoluent en cours d'année. Le professeur a toute latitude pour fixer les exigences du niveau de justification attendu dans un objectif d'apprentissage et de compréhension, de faire évoluer ces exigences en cours d'année et de les moduler suivant les élèves.

Par exemple on pourrait accepter d'un élève qu'il écrive à un moment de l'année :

- Je trace la courbe de la fonction avec ma calculatrice .
- Je reconnais une fonction polynôme du second degré ; les résultats du cours me permettent d'affirmer que les variations observées sont exhaustives. J'admets donc (je sais que ne l'ai pas démontré mais que ce résultat est juste) que l'allure de la courbe est bien .
- Avec la calculatrice, j'observe que le sommet de la parabole a pour abscisse $x = -4$. Pour le prouver, il faudrait que je démontre que $f(x)$ est toujours plus grand que $f(-4) = -40$ mais je ne vois pas comment faire.

Plus tard dans l'année, on pourra attendre de cet élève qu'il argumente davantage et que, par exemple, il justifie que le sommet de la parabole a bien comme abscisse -4 ou que $f(x)$ est bien toujours plus grand que -40 (par exemple sollicitation autonome un logiciel de calcul formel pour mettre $f(x)$ sous la forme -40 plus quelque chose de positif.)

Conduire certains élèves à étudier les variations d'une fonction en mobilisant l'effet sur l'ordre d'un enchaînement de fonctions de référence peut participer d'une saine différenciation pédagogique. De même, certains élèves peuvent accéder

à une pratique de la démonstration formelle de la monotonie : pour démontrer qu'une fonction est croissante sur I, il suffit d'établir que pour tous nombres réels a et b dans I, a et b d'une part, $f(a)$ et $f(b)$ d'autre part sont dans le même ordre.

Mais, dans ce cadre, il faudrait veiller tout particulièrement à laisser aux élèves toute liberté de nommer comme ils le souhaitent les deux nombres choisis dans l'intervalle sans leur conseiller de nommer toujours de la même manière le plus grand. En effet un élève ne maîtrise véritablement cette compétence que s'il a bien compris que, de l'inégalité $f(a) < f(b)$ prise isolément, on ne peut rien conclure. Pour cela il faudrait cultiver une confrontation au problème :

« Tu obtiens $f(b) < f(a)$ et ton camarade obtient $f(a) < f(b)$ et pourtant il n'y a pas d'erreur ! »

c) Autour du travail à conduire sur les expressions algébriques

Au collège le travail sur le développement d'une expression algébrique est véritablement amorcé en quatrième alors que la factorisation n'est amorcée qu'en troisième, l'objectif étant simplement que les élèves sachent factoriser des expressions algébriques quand le facteur est apparent[2]. Les acquis des élèves ont donc de bonnes chances d'être plus solides sur « développer » que sur « factoriser ». En revanche transformer une expression rationnelle n'est pas un objectif du collège.

En seconde il s'agit de poursuivre cet apprentissage du calcul algébrique (qui sera à continuer aussi au cycle terminal).

Si un certain degré de maîtrise technique est à faire acquérir aux élèves et donc à travailler, il est essentiel, pour lui donner du sens, de toujours situer le calcul algébrique dans la perspective d'une résolution de problème, le fait d'associer à un problème une formule devant être obtenu des élèves eux- mêmes. Sur ce point précis, un objectif de formation prioritaire pour tout élève consiste à faire travailler l'intelligence du calcul, à donner des occasions de raisonner. Il est important de développer une aptitude à anticiper la forme de l'expression utile pour résoudre un problème. Pour ce faire, on peut conduire les élèves à réfléchir sur les différentes formes possibles que peut prendre une expression, en lien avec des courbes obtenues avec un traceur ou une calculatrice, et sur les questions auxquelles chacune de ces formes permet de répondre.

> Par exemple un élève qui cherche à trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'expression $f(x)$ prend la valeur 0 ou à étudier ce que l'on appelle le signe de $f(x)$, suivant les valeurs de x, devrait être en capacité de dire, sans aide, que c'est la forme factorisée qui convient. Un élève qui veut prouver que, pour toutes valeurs de x, $f(x)$ est toujours inférieur (resp. supérieur) à un nombre k, devrait penser à essayer de mettre $f(x)$ sous la forme k moins (resp. plus) quelque chose qui serait toujours positif.

Ce travail doit offrir aussi des occasions de démontrer (tout particulièrement pour obtenir une quantification universelle). Toutefois le degré de technicité attendu de certains élèves peut, et doit, rester modeste. Quand la complexité du calcul devient plus grande, ou du moins trop grande pour eux, un recours à des logiciels de calcul formel est possible et est à favoriser.

Voir exemple en Annexe 4

Une autre porte ouverte à la différenciation pédagogique

Acquérir de l'autonomie en calcul nécessite bien entendu une part d'entraînement technique. Toutefois faire acquérir cette maîtrise technique à tous n'est pas la priorité. En revanche les élèves qui ont des facilités en mathématiques ou qui auront besoin de faire des mathématiques d'un bon niveau pour réussir leur projet d'orientation doivent acquérir ces automatismes de calcul. Prolonger l'entraînement donné à tous en proposant à ces élèves des « gammes » supplémentaires, voire des « défis de calcul », peut participer de la différenciation pédagogique à mettre en place.

2. La factorisation et la notion d'équation ne sont pas des exigibles du socle commun

Quelques illustrations

1. Situation n°1 : Une histoire de diviseurs

Partie A :

À chaque nombre supérieur ou égal à 1, on associe le nombre de diviseurs de sa partie entière.

1. Quel(s) est (sont) le(s) nombre(s) associé(s) à 10 ? à 43,7 ? à $\frac{182}{3}$?
2. Quel est le plus petit nombre auquel on associe 8 ?
3. Représenter graphiquement la situation de départ, pour tous les nombres compris entre 1 et 25.
4. On donne un nombre a quelconque. Quelles conditions doit respecter le nombre a pour qu'il puisse être le nombre associé à un nombre de départ ?

Partie B :

À chaque nombre supérieur ou égal à 1, on associe les diviseurs de sa partie entière.

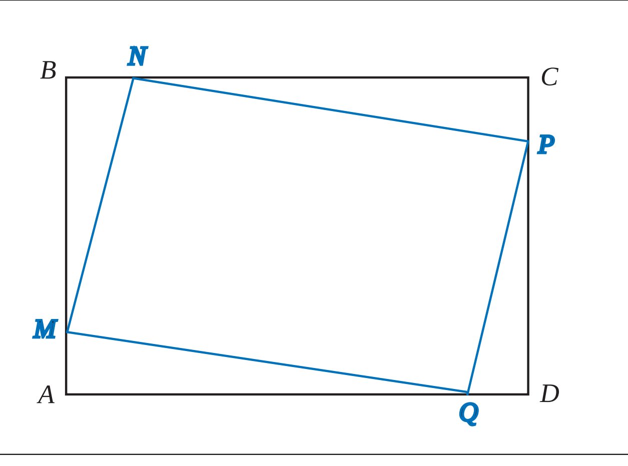
1. Quel(s) est (sont) le(s) nombre(s) associé(s) à 17 ? à 50,9 ? à $\frac{106}{7}$?
2. Peut-on représenter graphiquement cette situation ? Si oui, réaliser cette représentation pour tous les nombres compris entre 1 et 25.

2. Situation n°2 : Le quadrilatère tournant

On considère un rectangle $ABCD$ de dimensions données, $AB = 6$cm, $BC = 8$cm. Sur le petit côté $[AB]$, on choisit un point M quelconque.

On considère ensuite les points N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$ tels que : $AM = BN = CP = DQ$.

On s'intéresse aux variations de l'aire ou du périmètre du quadrilatère $MNPQ$.



Pour l'aire, le calcul donne :

$$\text{aire}(MNPQ) = 48 - AM(6 - AM) - AM(8 - AM) = 48 - 2AM(7 - AM)$$

Pour le périmètre :

$$\text{per}(MNPQ) = 2\sqrt{AM^2 + (8 - AM)^2} + 2\sqrt{AM^2 + (6 - AM)^2}$$

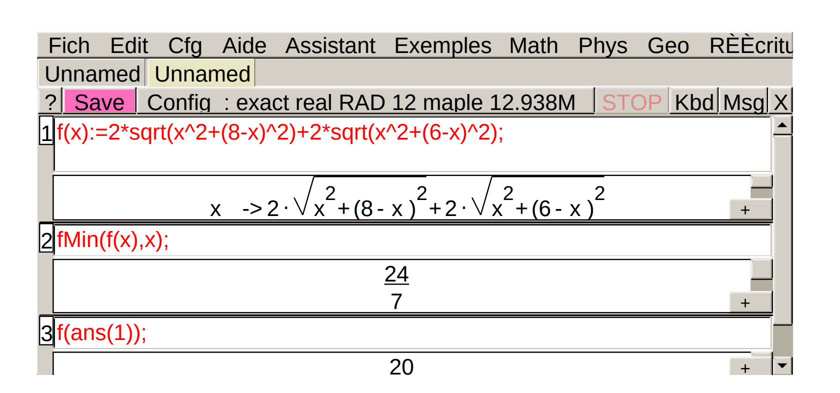
Différents types de problèmes :

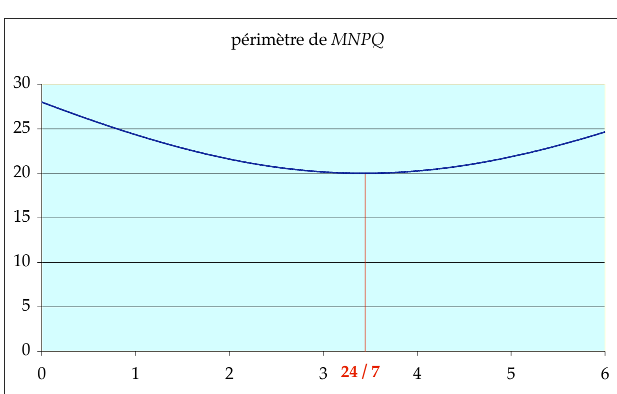
- Si on connaît la valeur de AM, peut-on déterminer la valeur de l'aire ? du périmètre ?
- Peut-on construire un quadrilatère dont l'aire est égale à un nombre donné ?
- Comment varie l'aire de $MNPQ$? (charge à l'élève de dire « varie mais en fonction de quoi ? »)
- Est-il possible de placer le point M de sorte que l'aire de $MNPQ$ soit la plus grande possible, la plus petite possible ?
- Est-il possible de placer le point M de sorte que le périmètre de $MNPQ$ soit le plus grand possible, le plus petit possible ?

Activités possibles des élèves :

- À l'aide d'un logiciel, représenter les courbes donnant l'aire et le périmètre en fonction de AM. Déterminer expérimentalement les valeurs minimales et maximales de l'aire et du périmètre.
- Calculer l'aire, le périmètre.
- Déterminer le maximum et le minimum de l'aire.
- À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer le minimum du périmètre ou à l'aide d'un logiciel de calcul numérique, en déterminer une valeur approchée.

Le travail relatif à l'aire étant classique, nous nous concentrons dans la suite sur le périmètre. En utilisant le logiciel de calcul formel Xcas, on obtient les valeurs exactes, étayées par la représentation graphique :





Le calcul qui suit a pour but de montrer comment pourrait être justifié, dans le cadre du programme de seconde, le résultat trouvé. Ce calcul est évidemment hors de portée d'un élève de seconde, mais peut être mené par le professeur avec l'aide d'un logiciel de calcul formel. Celui-ci ne pourra être utile que si l'on voit *a priori* les calculs qui doivent être faits, consistant essentiellement à « chasser les racines carrées du numérateur » en multipliant numérateur et dénominateur par des « quantités conjuguées » bien choisies. C'est une illustration de ce que peut être un travail sur l'intelligence du calcul.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{per}(MNPQ)-20}{2} &= \sqrt{2x^2-16x+64}+\sqrt{2x^2-12x+36}-10 \\
&= \frac{4x^2-28x+2\sqrt{(2x^2-16x+64)(2x^2-12x+36)}}{\sqrt{2x^2-16x+64}+\sqrt{2x^2-12x+36}+10} \\
&= \frac{4(2x^2-16x+64)(2x^2-12x+36)-(4x^2-28x)^2}{D} \\
&= 16\frac{(x^2-8x+32)(x^2-6x+18)-(x^2-7x)^2}{D} \\
&= 16\frac{x^4-14x^3+98x^2-336x+576-x^4+14x^3-49x^2}{D} \\
&= 16\frac{49x^2-336x+576}{D} = 16\frac{(7x-24)^2}{D} \geqslant 0, \text{ nul pour } x=\frac{24}{7}.
\end{aligned}$$

On a posé :

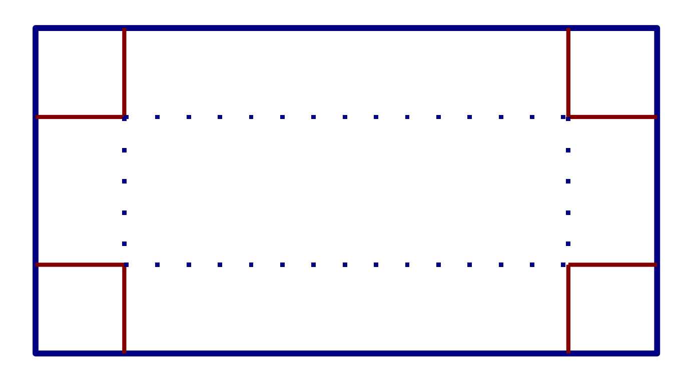
$D=\left(\sqrt{2x^2-16x+64}+\sqrt{2x^2-12x+36}+10\right)\left(2\sqrt{(2x^2-16x+64)(2x^2-12x+36)}+28x-4x^2\right)>0$

puisque $28x-4x^2=4x(7-x)>0$ pour $x\in]0;6]$.

3. Situation n°3 : Patrons de récipients

Dans le document ressource du collège « du numérique au littéral », figure le problème classique de la plaque carrée dans laquelle on découpe 4 carrés identiques dans chaque coin pour former une boîte en forme de parallélépipède rectangle. En fonction du côté de l'encoche, on peut calculer l'aire et le volume de la boîte. On peut aussi chercher le maximum du volume de la boîte.
Sur ce thème de la construction du patron d'un récipient dans une figure donnée, on peut varier les approches, en changeant la figure initiale ou en changeant la forme du récipient. Nous proposons ci-dessous trois exemples de difficultés variées pour la construction de récipients ouverts [3].

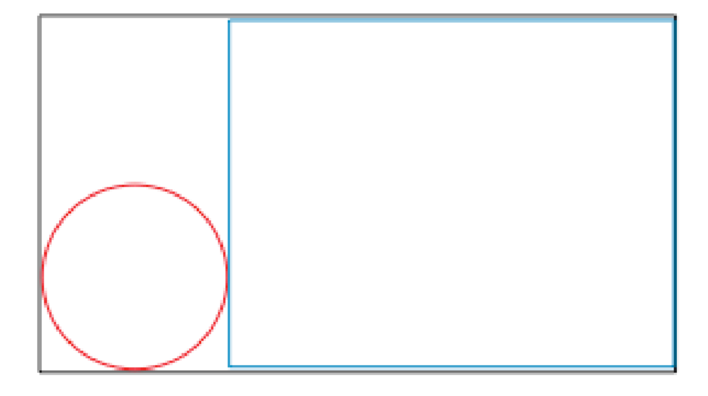
a) Patron d'un parallélépipède rectangle ouvert dans un rectangle



Pour certains élèves, on se limitera à des valeurs numériques de la largeur et de la longueur du rectangle. Pour ceux qui sont plus à l'aise avec le calcul littéral, il est possible de prendre les dimensions du rectangle comme paramètres.

b) Patron d'un cylindre ouvert dans une plaque rectangulaire

Exemple de configuration possible :



Dans cette configuration, une des difficultés pour les élèves réside dans le rapport π qui doit exister entre une des dimensions du rectangle et le diamètre du cercle. Les valeurs numériques de la longueur et de la largeur du rectangle initial sont données.

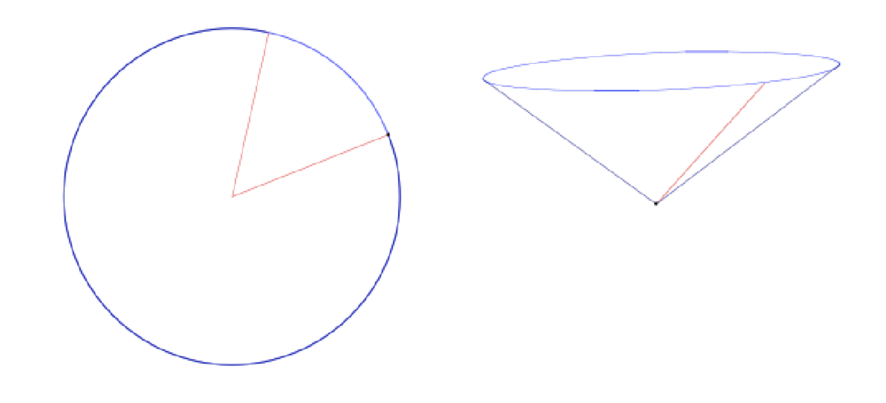
Questionnements possibles

- Comment peut-on découper dans un rectangle un disque et un rectangle pour constituer le patron d'un cylindre ouvert ?
- Quelles valeurs peuvent prendre le diamètre, la hauteur, le volume de ce cylindre ?
- Comment faire que le cylindre ait le volume le plus grand possible ?

3. Le qualificatif « ouvert » signifie que les récipients sont sans couvercle.

c) Patron d'un cône de révolution ouvert (cornet) dans un disque

On enlève dans un disque un secteur angulaire pour former le patron d'un cône de révolution.

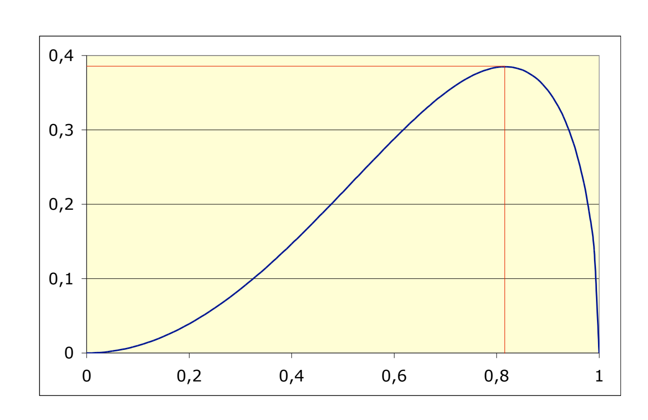


Si le disque est de rayon R et le secteur angulaire conservé est dans un rapport k avec un tour, la base du cône a pour périmètre $2\pi Rk$ donc pour rayon Rk.

D'après le théorème de Pythagore, la hauteur du cône vaut $h = \sqrt{R^2 - (Rk)^2} = R\sqrt{1-k^2}$

et le volume $V = \dfrac{\pi R^3}{3} k^2 \sqrt{1-k^2} = \dfrac{\pi R^3}{3} V_1(k)$.

On représente la fonction $V_1 : k \mapsto k^2\sqrt{1-k^2}$:



Pour la détermination du maximum, on peut poser $k^2 = x$ puis $f(x) = \left(V_1(k)\right)^2 = x^2(1-x)$. Laissons alors Xcas faire les calculs :

```
1 f(x):=x^2*(1-x);
      x ->x^2·(1-x)
2 fMax(f(x),x)|x>0 and x<1;
  // Warning: x,f, declared as global variable(s)
      2/3
3 factor(f(2/3)-f(x),x);
      (3·x-2)^2·(3·x+1)/27
```

De l'égalité obtenue $f\left(\dfrac{2}{3}\right) - f(x) = \dfrac{(3x-2)^2(3x+1)}{27} \geqslant 0$, on déduit que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ et, si l'on revient au volume :

le volume maximum est obtenu pour $k = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et vaut $V_{\max} = \dfrac{2\pi R^3\sqrt{3}}{27}$

4. Situation n°4 : Une formule de physique concernant la puissance électrique

Le produit de la tension efficace U aux bornes d'un dipôle ohmique par l'intensité efficace I du courant qui le traverse est égal à la puissance électrique P que le dipôle consomme : $P = UI$, où U s'exprime en volts, I en ampères et P en watts.

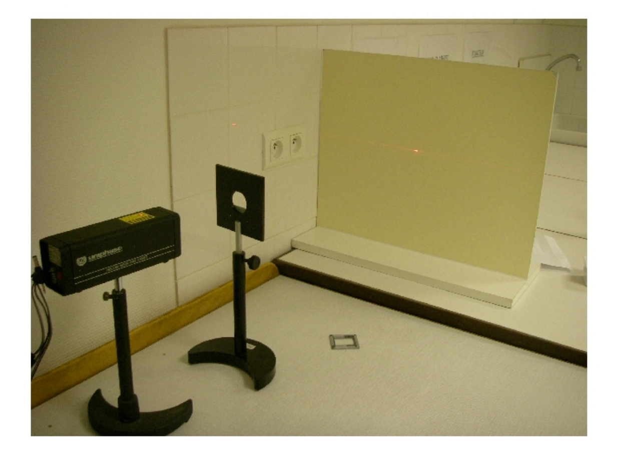
Questionnements possibles :

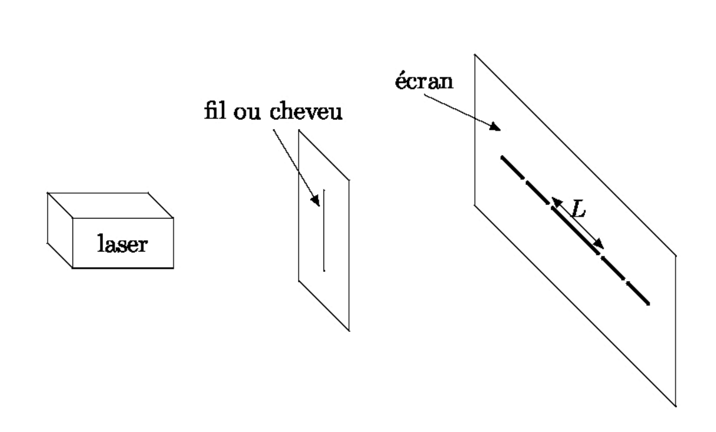
- Une lampe à incandescence porte les indications : 6V-100mA. Qu'est-ce que la formule permet alors de calculer ? Rédiger un énoncé de problème et le résoudre.
- Envisager le cas d'une ampoule qui porte les indications 230V-75W.
- Que peut-on dire à propos d'un fer à repasser qui ne porterait que la seule indication 1300 W ?
- Une rallonge de fil électrique porte les indications 230V-max 2200W. Peut-il être parcouru sans risque par un courant de 5A ? de 10A ? de 15A ? Rédiger un énoncé de problème et le résoudre.
- Quelle fonction peut-on associer à cette situation ? Proposer plusieurs exemples.
- Pour U donnée, s'interroger sur les accroissements de P et de I.
- Pour P donnée, s'interroger sur les accroissements de U et de I.

5. Situation n°5 : Mesure de l'épaisseur d'un cheveu par diffraction

a) Observation du phénomène de diffraction

Sur le trajet horizontal d'un faisceau laser, on place un fil (fixé verticalement sur un cadre support), et on observe l'étalement du faisceau sur un écran situé au-delà du fil.





Quand la lumière rencontre un objet de petite taille, le trajet des rayons lumineux n'est plus rectiligne (voir photo ci-dessous). Le faisceau « s'étale » derrière l'obstacle, et forme sur un écran une figure appelée figure de diffraction (figure ci-dessous). Sur cette figure de diffraction, il est possible de mesurer la largeur L de la tache centrale qui dépend de la taille de l'objet.

b) Observation de la figure de diffraction

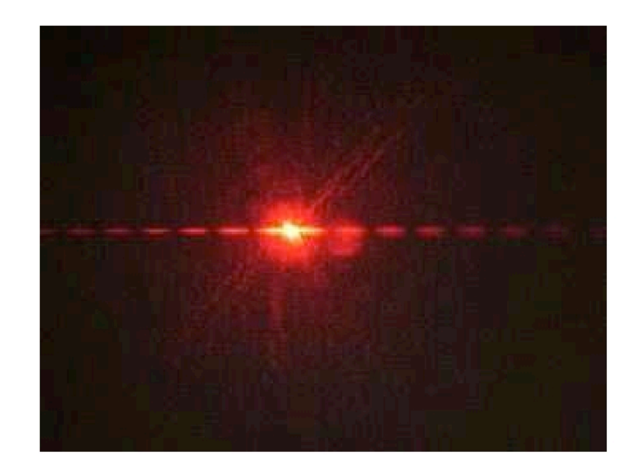


Photo de l'écran

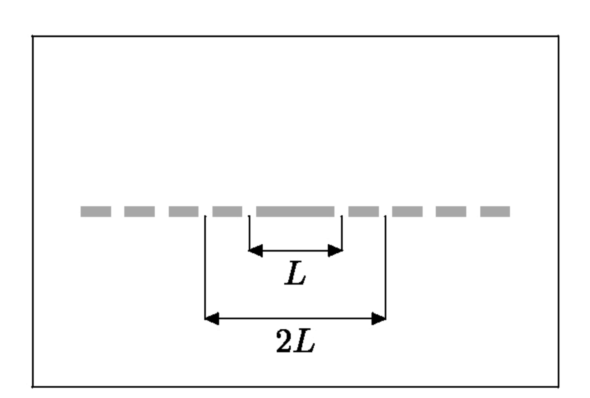


Schéma associé

Les taches lumineuses sont représentées en gris sur le schéma ci- dessus. Le disque central plus lumineux sur la photo n'est pas représenté sur le schéma.

c) Mesures de L avec les fils calibrés

La distance entre le fil et l'écran étant maintenue constante, un groupe d'élèves a réalisé des mesures de L avec une règle graduée au millimètre pour différents fils calibrés de diamètre d. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

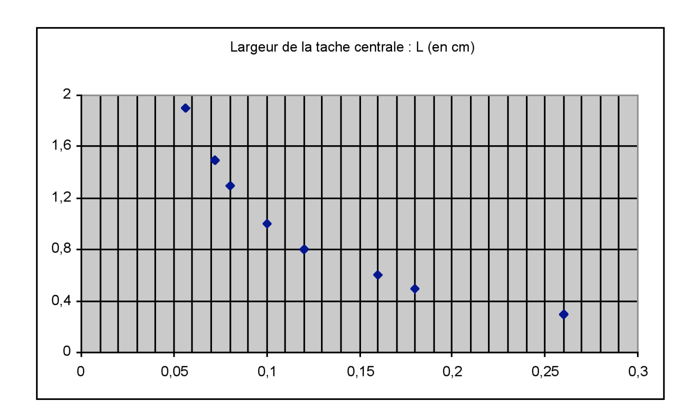
Diamètre du fil : d (en mm)	$0,08$	$0,056$	$0,072$	$0,10$	$0,12$	$0,16$	$0,18$	$0,26$
Largeur de la tache centrale : L (en cm)	$1,3$	$1,9$	$1,5$	$1,0$	$0,8$	$0,6$	$0,5$	$0,3$

Les données expérimentales sont celles obtenues par un groupe d'élèves lors d'une séance de travaux pratiques. Il est possible d'obtenir des mesures plus précises avec un matériel plus perfectionné, mais qui n'est pas celui utilisé en général par les élèves.
On souhaite connaître la mesure du diamètre d'un cheveu : pour cela on remplace le fil par le cheveu d'un élève. La mesure de L donne la valeur 1,2 cm.
Peut-on déterminer l'épaisseur du cheveu en mm ? Si l'élève avait utilisé du gel coiffant, la valeur de L aurait-elle été supérieure ou inférieure à 1,2 cm ?

Remarques

L'attendu d'un élève est que :

- il prenne l'initiative de représenter graphiquement les données expérimentales ;
- il identifie que ces données ne lui permettent pas de répondre immédiatement à la question posée ;
- il s'interroge sur la nature du lien existant entre L et d : L varie en fonction de d. Plus d augmente plus L semble diminuer. Si cela est juste la mesure qui l'intéresse est comprise entre $0,08$ et $0,1$;
- il s'interroge sur la manière de déterminer une valeur approchée de la mesure du diamètre du cheveu et donc de relier deux points du nuage (approximation affine ?).

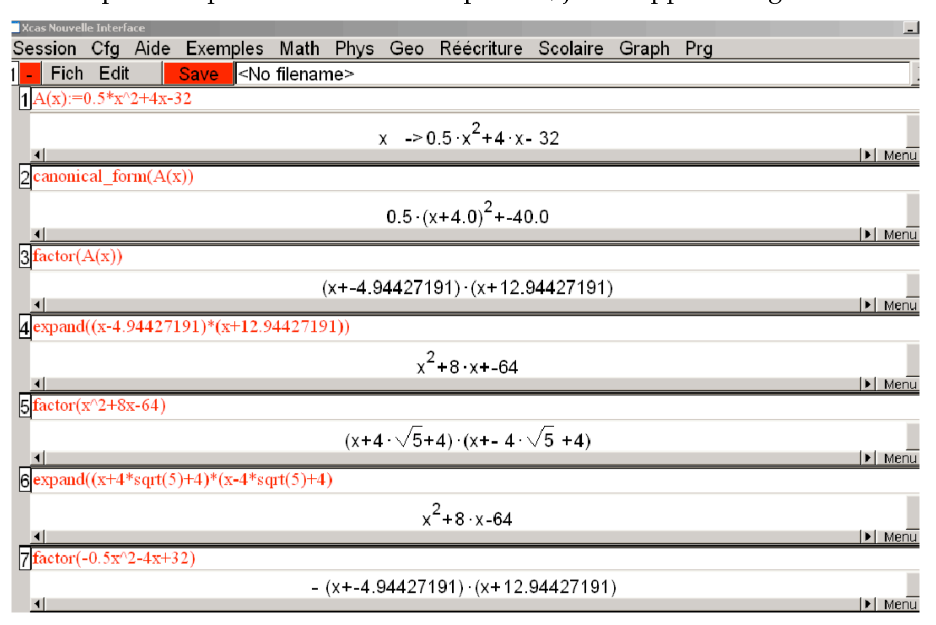


Annexes

Annexe 1. Des exemples de raisonnement à valoriser

Exemple 1 : On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à la résolution de l'équation $\frac{1}{2}\ell^2 + 4\ell - 32 = 0$.

- J'ai besoin de factoriser l'expression pour résoudre cette équation ; je fais appel au logiciel de calcul formel :



> Ce travail sur les expressions algébriques peut être l'occasion de différencier les exigences au niveau du degré de maîtrise technique des élèves : on peut, en effet, s'autoriser à ne demander qu'à certains élèves de déterminer la factorisation, la forme canonique étant donnée (ou non).

- Je résous l'équation en reconnaissant la forme factorisée comme étant celle la mieux adaptée à mon problème : j'ai donc démontré qu'il n'y a qu'une solution au problème et que sa valeur exacte est $4\sqrt{5} - 4$.

Exemple 2 : On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à la résolution de l'équation $\frac{1}{2}\ell(\ell + 8) - 32 = 0$.

- Avec ma calculatrice, je trace la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 0,5x(x + 8) - 32$.
- Je conjecture qu'il y a existence et unicité de la solution sur l'intervalle $[0; 8]$ car la fonction semble croissante sur cet intervalle.
- Je sais que sur ma calculatrice je n'observe qu'un dessin « faussé » de la courbe représentative de la fonction et que cela ne suffit donc pas à démontrer les propriétés de cette fonction. Je dois donc démontrer que la fonction est croissante sur $[0; 8]$:
  - ◇ f est une fonction polynôme du second degré, je sais d'après les résultats vus en cours qu'elle est croissante puis décroissante ou le contraire.
  - ◇ Je constate que $f(0) = f(-8) = 32$; J'ai deux points de la parabole qui ont même ordonnée . J'en déduis l'axe de symétrie. Les variations changent en -4.
  - ◇ 0 et 2 sont tous les deux plus grands que -4. Or $f(0) = 32$ et $f(2) = -22$ ainsi $f(0) < f(2)$. f n'est donc pas décroissante mais bien croissante à partir de -4. Donc la fonction est bien croissante sur $[0; 8]$.

  J'ai démontré qu'il n'y avait qu'une seule solution au problème posé et je peux maintenant en chercher une valeur approchée.

Exemple 3 : On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à rechercher si la quantité $\frac{1}{2}\ell^2 + 4\ell$ peut être rendue la plus grande possible (la plus petite possible) quand ℓ appartient à l'intervalle $[0; 8]$.
(techniquement plus exigeant et seulement à la portée de quelques élèves)

- Des essais me permettent de conjecturer que la quantité devient de plus en plus grande ; sa plus petite valeur est 0 (pour $\ell = 0$) et sa plus grande valeur est 64 (pour $\ell = 8$). Autrement dit la fonction $x \mapsto 0,5x^2 + 4x$ est croissante sur $[0; 8]$

- Je dois le démontrer :
  - ⋄ Je prends deux réels a et b quelconques dans $[0;8]$ avec b plus petit que a. Je veux démontrer que $f(b)$ est plus petit que $f(a)$ soit $0,5b^2 + 4b < 0,5a^2 + 4a$
  - ⋄ Or $b < a$ donc $b^2 < a^2$ car la fonction carrée est croissante sur $[0;8]$,
  - ⋄ donc $0,5b^2 < 0,5a^2$,
  - ⋄ donc $0,5b^2 + 4b < 0,5a^2 + 4b < 0,5a^2 + 4a$ car $b < a$ donc $4b < 4a$ donc soit $f(b) < f(a)$.

  Conclusion : Pour tout b plus petit que a, $f(b)$ est plus petit que $f(a)$.
- J'ai donc bien démontré que la fonction est croissante sur $[0;8]$.

Annexe 2. Des exemples à faire vivre en classe

Exemple 1 :

Soit x un nombre réel strictement positif. Affirmation :« L'aire d'un carré de côté $x+3$ est égale à la somme des aires de deux carrés de côtés respectifs x et 3. » VRAI ou FAUX ?

L'affirmation est, du point de vue de la logique, une phrase ouverte. Pour répondre à cette question il est nécessaire de préciser explicitement la quantification sous-jacente.

- Si l'affirmation est :

  L'aire d'un carré de côté $x+3$ est ***toujours*** égale à la somme des aires de deux carrés de côtés respectifs x et 3 cela se traduit par l'examen de la proposition :

  « ***pour tout réel*** x strictement positif, on a : $(x+3)^2 = x^2+9$ »

  la réponse à donner est FAUX. Dans ce cas, donner un contre-exemple suffit pour le prouver .
- Si l'affirmation est :

  On peut trouver une valeur d'un nombre réel strictement positif x pour laquelle l'aire d'un carré de côté $x+3$ est égale à la somme des aires de deux carrés de côtés respectifs x et 3. Ou encore

  « ***il existe au moins*** une valeur de x strictement positive pour laquelle on a : $(x+3)^2 = x^2+9$ ».

  Dans ce cas, démontrer que cette affirmation est fausse nécessite la résolution de l'équation c'est à dire la recherche de toutes les valeurs de x telles que $(x+3)^2 = x^2+9$.

Ce travail d'entraînement à la logique à conduire dans la durée peut se faire par exemple via des questions rapides posées en début de séance.

Exemples :

1. VRAI ou FAUX ?

   Si $x < 2$ alors $x < 3$
   Si $x < 3$ alors $x < 2$
   Si $x \leqslant 3$ alors $x < 3$
   Si $x < 3$ alors $x \leqslant 3$
   Si $x = 2$ alors $2x+3 = 7$
   Si $2x+3 = 7$ alors $x = 2$
   Si $2x-5 < 2$ alors $x < 3$
   Si $x < 3$ alors $2x-5 < 2$

   Avec des questionnements et des discussions sur les quantifications sous-jacentes.

2. Faire des propositions vraies du style « pour tout réel x, si ... alors ... » en utilisant les énoncés

   $x^2 = 16,\ x = 4,\ x = -4,\ x = 4$ ou $x = -4,\ x^3 = 64$.

3. « Il existe au moins un réel x tel que si $x^2 = 4$ alors ... »

   a) Compléter la proposition pour qu'elle soit fausse ;
   b) Compléter la proposition pour qu'elle soit vraie.

4. Si $x = x(x-2)$, alors $x = 3$. VRAI ou FAUX ?

   « Pour tout réel x, si $x = x(x-2)$, alors $x = 3$ » est une proposition fausse : le contre-exemple $x = 0$ le démontre.
   « Pour tout réel $x > 0$, si $x = x(x-2)$, alors $x = 3$ » est une proposition vraie.

5. Autre exemple de travail possible
Voici le tableau de « signes » d'une fonction :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Répondre aux affirmations suivantes par : VRAI, FAUX, ou par ON NE PEUT PAS SAVOIR.

(a) $f(2) = 6$

(b) L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions

(c) La fonction f est une fonction affine

(d) L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solutions $]-3;5[$

(e) Le point $A(0;5)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.

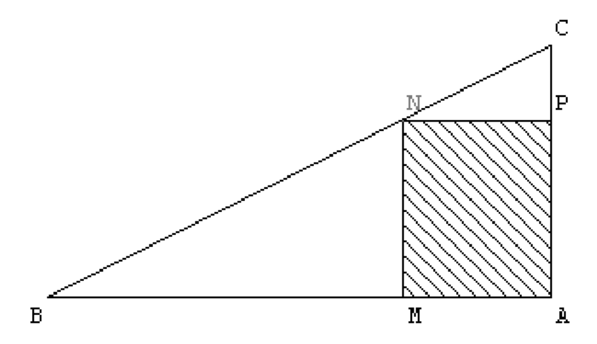
(f) Si $f(1) = -4$, alors le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est -4.

Annexe 3. Des activités rapides

Sous les titres A) à C) qui suivent sont donnés des exemples de questions qui peuvent être posées en activités rapides (pratique qui peut être un rituel de quelques minutes au début de chaque séance).

A) Pour anticiper sur l'articulation entre programme de calcul, formule, nuage de points, tableau de nombres ou la pérenniser

1) Thème 1



BM	aire du quadrilatère
0	0
$0,5$	$1,375$
1	$2,5$
$1,5$	$3,375$
2	4
$2,5$	$4,375$
3	$4,5$
$3,5$	$4,375$
4	4
$4,5$	$3,375$
5	$2,5$
$5,5$	$1,375$
6	0

ABC est un triangle rectangle en A $AB = 6$cm et $AC = 3$cm. M est un point variable du segment $[AB]$

L'aire du quadrilatère $MNPA$ est donnée, en $\texttt{cm}^2$, par la formule :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} BM \times (6 - BM).$$

a) Que vaut l'aire $\mathscr{A}$ si $BM = 2\texttt{cm}$?

b) Est-il vrai ou faux que l'aire $\mathscr{A}$ est égale à $2,5\texttt{cm}^2$ si $BM = 5\texttt{cm}$?

c) Quelle fonction f formalise le lien entre la distance BM et l'aire $\mathscr{A}$ du quadrilatère $MNPA$? Quel est son ensemble de définition ?

d) Quelle est l'image de $1,5$ par f ?

e) Les informations dont on dispose permettent-elles de donner le ou les antécédents du nombre $5/2$ par f ? qu'en est-il pour le nombre 0 ?

1) Thème 2

Associer une formule au programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Ajouter 3
- Mettre au carré
- Prendre l'opposé

1) Thème 3

Associer une formule au programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Prendre son inverse
- Multiplier par -5
- Ajouter 7
- Mettre au carré

1) Thème 4

Associer un programme de calcul à la formule $3(x-2)^2+7$.

1) Thème 5

À température constante et pour une quantité de matière donnée, l'état d'un gaz parfait suit la loi de Boyle-Mariotte : $P \times V = k$ où k est une constante, P est la pression du gaz en Pa et V le volume du gaz en m^3.

a) J'observe la pression.
- Sur quel paramètre vais-je agir ?
- Je représente graphiquement mes résultats ; quelle grandeur placer en abscisses ? et en ordonnées ?
- Donner la fonction modélisant cette situation

b) J'observe le volume occupé par le gaz
- Sur quel paramètre vais-je agir ?
- Je représente graphiquement mes résultats ; quelle grandeur placer en abscisses ? et en ordonnées ?
- Donner la fonction modélisant cette situation

1) Thème 6

L'équation d'état d'un gaz parfait est : $PV = nRT$

P : pression en Pa T : température en Kelvin
V : volume en m^3 R : constante du gaz parfait n : quantité de matière en mole

a) n, R et P étant fixés, donner un programme de calcul permettant de calculer la température à partir du volume ;

b) n, R et T étant fixés, donner un programme de calcul permettant de calculer la pression à partir du volume

1) Thème 7

On filme le mouvement d'un palet de hockey sur glace et on mesure la distance d qu'il parcourt en fonction du temps. On obtient le tableau suivant :

t en s	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2	0,24	0,28	0,32
d en m	0,04	0,08	1,35	1,75	2,10	2,55	3,05	3,40

a) On trace un graphique (nuage de points) à partir des données. Donner les coordonnées d'un point placé.

b) On modélise la situation par la fonction f qui à x associe $11x$.
Donner la formule modélisant le lien entre les deux grandeurs t et d.

c) Quelle est la distance parcourue par le palet en 0,2 s ? Quelle est l'image de 0,2 par la fonction f ?

d) Estimer le temps au bout duquel le palet aura parcouru 10 mètres.

1) Thème 8

La période T des oscillations d'un pendule dont la longueur du fil est ℓ est donnée par la relation $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ où g est l'accélération de la pesanteur.

a) Donner un programme de calcul permettant de calculer la période à partir de la longueur.

b) Donner la fonction modélisant cette situation.

B) Pour construire dans la durée la notion de courbe représentative

Remarque : *Ces questions ne sont surtout pas à poser d'un seul coup. En revanche il est fructueux d'y revenir par petites touches. Un jour on peut poser 1.a), 2.c) et 3.b), un autre 1.d), 2.a) et 3.a), etc.*

1. $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f.

a) L'image de -1 par la fonction f est 2,5. Donner les coordonnées d'un point de $(\mathscr{C})$.

b) Le point de coordonnées $(0,3)$ appartient à $(\mathscr{C})$. Traduire cela de plusieurs manières sur la fonction f.

c) Le seul point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 5 a pour abscisse -1. Traduire cette information sur la fonction f.

d) Il n'y a pas de point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse -2. Traduire cela sur f.

e) Il n'y a pas de point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 6. Traduire cela sur f.

f) f transforme le nombre $1,5$ en le nombre 7. Traduire cette information de diverses manières sur f et sur $(\mathscr{C})$.

2 $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f qui à tout nombre x associe le nombre $2x^2 - 3$.

a) A est le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 2. Quelle est l'ordonnée de A ?

b) E est le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse -1. Peut-on donner l'ordonnée de E ?

c) B est un point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée -3. Peut-on donner l'abscisse de B ?

d) K est un point de $(\mathscr{C})$. L'ordonnée de K est égale à 1. Peut-on donner l'abscisse de K ?

e) M est un point de $(\mathscr{C})$. On note x son abscisse. Peut-on donner son ordonnée ?

3 $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f.

a) f est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $\dfrac{2}{x^2+3}\cdot$ Donner l'ordonnée du point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 0.

b) f est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $5 - 2x^2$. Donner la plus grande ordonnée possible d'un point de $(\mathscr{C})$.

c) f est la fonction qui à tout nombre t associe le nombre $(2-t)(3-t)$. Donner les coordonnées de tous les points de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 0.

C) Pour revenir fréquemment sur la caractérisation des points de la courbe représentative d'une fonction

Par exemple :

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$.

a) Le point A de coordonnées $(-1;-1,5)$ appartient-il à la courbe $(\mathscr{C})$?

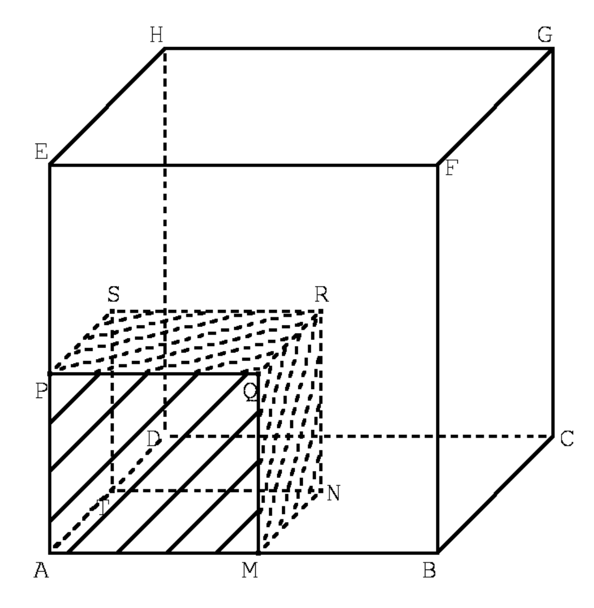
b) Le point B de coordonnées $(1;1,6)$ appartient-il à la courbe $(\mathscr{C})$?

Remarque : Ces questions sont l'occasion aussi de faire conduire aux élèves des raisonnements logiques.

- Si $f(-1) = -1,5$ alors le point A de coordonnées $(-1;-1,5)$ appartient à $(\mathscr{C})$. Ce qui est bien le cas.
- Si le point B de coordonnées $(1;1,6)$ appartient à $(\mathscr{C})$ c'est que f transforme 1 en $1,6$. Donc je calcule l'image de 1. Or $f(1) = 3/2 = 1,5$ et $f(1)$ n'est donc pas égal à $1,6$. Donc le point B n'appartient pas à $(\mathscr{C})$.

Dans la section 4, figure un extrait du travail réalisé dans le cadre des actions mutualisées SDTICE (Nantes 2009)

Annexe 4. Des Pavés dans un cube



Énoncé :

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 cm.

On construit un point M appartenant au segment $[AB]$ et le point P appartenant au segment $[AE]$ tel que $AM = EP$. On construit alors le pavé droit $AMNTPQRS$ de telle façon que $AMNT$ soit un carré.

On souhaite savoir comment varie le volume du pavé droit $AMNTPQRS$ quand M varie sur le segment $[AB]$.

En posant $AM = x$, l'expression du volume du pavé s'écrit $V(x) = x^2(6-x)$.

En utilisant un traceur de courbe ou un tableur les élèves conjecturent sans problème l'existence d'un maximum atteint pour $x = 4$.
Il s'agit alors de prouver cette conjecture en étudiant le signe de $V(x) - V(4)$ quand x appartient à l'intervalle $[0;6]$.
Cela revient à prouver que :

- pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;6]$, $V(x) \leqslant V(4)$;
- ou encore $V(x) - V(4) \leqslant 0$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;6]$.

Or $V(x) - V(4) = x^2(6-x) - 32$.
Cette expression est une différence et son signe n'est pas facile à étudier. Pour bon nombre d'élèves cet obstacle technique est insurmontable.

Pour autant certains ont bien anticipé sur la forme qu'ils voudraient donner à $V(x) - V(4)$ et montrent qu'ils souhaitent factoriser. Pour cela ils décident de mobiliser le logiciel Xcas dans un but précis : factoriser.

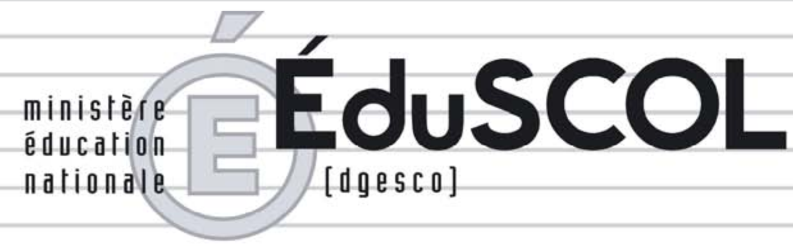
D'autres sont encore hésitants sur la forme à donner. Ils décident alors aussi de mobiliser Xcas et obtiennent plusieurs nouvelles écritures de l'expression $V(x) - V(4)$.

```
1 V(x):=x^2*(6-x)
      x -> x^2·(6-x)                Menu
2 V(x)-V(4)
      x^2·(6-x)-32                  Menu
3 expand(V(x)-V(4))
      -x^3+6·x^2-32                 Menu
4 factor(V(x)-V(4))
      -(x-4)^2·(x+2)                Menu
```

Suit alors un travail de réflexion sur ces différentes écritures : quelle est l'écriture la plus adaptée à l'étude du signe de $V(x) - V(4)$?
Discussions intéressantes ?
Dans la classe le consensus se fait et la forme factorisée est choisie : $V(x) - V(4) = -(x+2)(x-4)^2$. Tous sont alors en capacité de finaliser la preuve.

Remarques :

- La stratégie de résolution du problème est entièrement restée ***à la charge de l'élève***.
- Le calcul formel a permis de générer plusieurs écritures d'un polynôme du troisième degré (obtenir ces différentes écritures dépasse le degré de maîtrise technique attendu d'un élève de seconde).
- C'est bien à l'élève qu'est laissé le soin d'analyser les différentes écritures obtenues et de ***choisir l'écriture la mieux adaptée pour résoudre son problème*** (l'intelligence du calcul lui est donc laissée).
- Le calcul formel exécute une factorisation trop difficile pour un élève de seconde, mais ***l'élève a identifié son besoin de calcul*** puis il confie au calculateur un calcul dont il maîtrise la nature (j'ai besoin d'une forme factorisée ou je me demande quelle forme serait la mieux adaptée) mais dont il ne maîtrise pas la difficulté.





Mathématiques

Lycée

Ressources pour la classe de seconde

- Probabilités et Statistiques -

Juin 2009

Table des matières

I. Introduction

L'enseignement de la statistique et des probabilités constitue un enjeu essentiel pour la formation du citoyen, lui donnant des outils pour comprendre l'information chiffrée, décider et choisir de façon éclairée et participer au débat public. Il est par ailleurs très utile aux autres disciplines qui s'appuient fréquemment sur des modèles statistiques ou probabilistes. Le rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques exprimait en ces termes l'enjeu de cet enseignement : « *l'objectif d'une initiation aux probabilités et à la statistique au niveau collège et lycée est d'enrichir le langage, de repérer des questions de nature statistique, de définir des concepts qui fonderont un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace* ».

Les programmes du collège ont inscrit l'étude des séries statistiques avec des indicateurs de position et de dispersion. Des notions de probabilité sont abordées en classe de troisième à partir de situations familières permettant, entre autres, de rencontrer des probabilités qui ne soient pas uniquement définies à partir de considérations intuitives de symétrie mais qui prennent appui sur l'observation d'épreuves répétées et la stabilisation des fréquences.

	Classe de sixième	Classe de cinquième	Classe de quatrième	Classe de troisième
Organisation et gestion de données	Organiser des données en choisissant un mode de représentation adapté. Lire et compléter une graduation sur une demi-droite graduée. Lire et interpréter des informations à partir d'une représentation graphique.	Repérage sur une droite graduée et dans le plan. Classes, effectifs, fréquences. Tableaux de données : lectures, interprétation, élaboration, représentations graphiques.	Moyenne pondérée.	Caractéristiques de position : médiane, quartiles. Approche de caractéristiques de dispersion : étendue. Notion de probabilité

En conséquence, il s'agit de veiller à bien inscrire l'enseignement de la classe de seconde en continuité avec celui du collège. Cela vaut autant pour la seconde générale et technologique que pour la voie professionnelle dont les programmes en vigueur à la rentrée 2009 font une part importante aux probabilités et à la statistique[1]. Il conviendra notamment d'éviter des révisions systématiques et de proposer des situations permettant le réinvestissement des notions abordées dans les classes précédentes.

Le travail statistique sur données réelles, brutes ou préalablement traitées avec l'aide incontournable de l'outil informatique, est de nature à favoriser la prise d'initiative et la conduite de raisonnements pour interpréter, analyser ou comparer des séries statistiques sur des sujets en prise avec l'actualité des élèves. Pour reprendre le rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, « *le matériau brut travaillé par la statistique est constitué de données expérimentales, les outils théoriques utilisés sont essentiellement la géométrie et l'algèbre linéaire pour la statistique exploratoire et les probabilités pour la statistique inférentielle et l'outil matériel est l'ordinateur* ».

Ainsi les outils de statistique descriptive travaillés au collège pourront être efficacement sollicités lors de l'exploration de fichiers comportant des données réelles afin d'exhiber des

[1] BO spécial n°2 du 19/02/2009

régularités, des dominantes ou des caractéristiques que la masse de données ou le nombre de variables étudiées ne livrent pas facilement. Cette pratique de fouille de données (statistique exploratoire, data mining) est de nos jours essentielle tant les données disponibles sont nombreuses et constituent des repères indispensables pour les entreprises ou les politiques publiques dans leurs choix stratégiques et décisionnels. Histogrammes, représentations graphiques, calculs de moyennes, de médianes, de quartiles sont autant d'outils que les élèves pourront utiliser pour faire émerger des questions sur les données, dégager des problématiques d'étude ou résumer l'information essentielle, d'autant plus que les outils informatiques accessibles aux élèves permettent de travailler sur des gros fichiers.

Les premiers éléments de probabilité ont été abordés au collège essentiellement dans des situations de jeux (lancers de dés ou de pièces, loteries, tirages dans des urnes). Cela a permis une première approche de quelques lois de probabilité qui seront progressivement décontextualisées au lycée en vue de fournir des modèles pour d'autres champs d'application, tant dans les domaines scientifiques (sciences physiques et chimiques, sciences de la vie et de la terre, sciences de l'ingénieur, etc.) que dans les sciences économiques et sociales. Ainsi les élèves ont été familiarisés, par des lancers de pièces équilibrées, avec la loi uniforme sur {0 ; 1} qui permettra, par exemple, d'aborder de nombreux sujets (sex-ratio, parité). De même le tirage dans une urne composée de boules de deux couleurs différentes, dans des proportions p et $(1 - p)$, fournit une première approche de la loi de Bernoulli, qui s'ouvrira sur des applications aux sondages (estimations à la sortie des urnes les soirs d'élection), au contrôle de qualité des productions industrielles (maîtrise statistique des processus de production) ou aux diverses estimations sur échantillon. Toutes ces questions relèvent de la statistique inférentielle, qui fonde ses résultats sur des considérations probabilistes et permet l'induction à partir de données observées.

Les questions de fluctuation d'échantillonnage constituent un axe important de la formation du futur citoyen, qui aura ainsi été sensibilisé au lycée à la nécessaire prudence à avoir avant d'interpréter une évolution ou d'effectuer des comparaisons. En effet toute évolution de moyenne ou de proportion, toute comparaison d'échantillons doit être nuancée et relativisée au regard des variations liées à la fluctuation d'échantillonnage.

Afin d'entrer vraiment dans une démarche statistique en lien avec les concepts probabilistes, on gagnera à utiliser, comme fil rouge, un fichier de données réelles pour mettre en œuvre ou pour illustrer les différentes notions inscrites au programme[2]. En procédant ainsi, on limite le temps d'appropriation des données et les élèves peuvent plus rapidement se concentrer sur les outils mathématiques, la situation étudiée devenant familière.

Par ailleurs, c'est en ayant recours à des données réelles que l'on développe les capacités d'observation et de raisonnement des élèves : comprendre la nature des données, repérer l'organisation d'un tableau, imaginer et réaliser des représentations ou des calculs adaptés, comprendre un graphique sont autant d'occasions de raisonner et d'exercer l'esprit critique. Dans les exemples développés dans ce document, on a tenu à souligner ces différents aspects de la formation, montrant l'ampleur et l'ambition des raisonnements conduits, ainsi que la place légitime de cet enseignement dans le programme de mathématiques.

---

[2] Voir le dossier proposant une progression et des activités utilisant le fichier des populations des communes françaises : http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/Exemple%20de%20progression.zip (fichiers à laisser dans le même dossier)

II. Des statistiques aux probabilités

1. Statistique descriptive, analyse de données

1.1. Résumé des notions abordées au collège

Les notions de moyenne, médiane, étendue, quartiles et écart interquartile ont été développées au collège ainsi que leurs interprétations.

Ces notions pourront être sollicitées en classe de seconde dans plusieurs domaines en lien avec les autres disciplines, par exemple pour étudier des séries de mesures expérimentales en sciences physiques. Il est alors possible de traiter plusieurs questions autour de l'intervalle interquartile, de son amplitude, etc.

1.2. Analyse de données

La classe de seconde est l'occasion d'une part de consolider l'utilisation des fonctions statistiques des calculatrices et d'autre part de traiter, à l'aide d'un tableur, des séries statistiques riches et variées comportant un grand nombre de données brutes en lien avec des situations réelles. À titre d'exemples, on pourra trouver de telles données :

- sur le site de l'INSEE , population des régions, départements et communes :
http://www.insee.fr/fr/ppp/bases-de-donnees/recensement/populations-legales/france-departements.asp

- sur le site de l'INED, espérance de vie à la naissance :
http://www.ined.fr/fichier/t_telechargement/18154/telechargement_fichier_fr_sd2006_t2_fm.xls

- sur le site de météo France ou des sites de particuliers tel :

http://www.meteociel.com/climatologie/climato.php

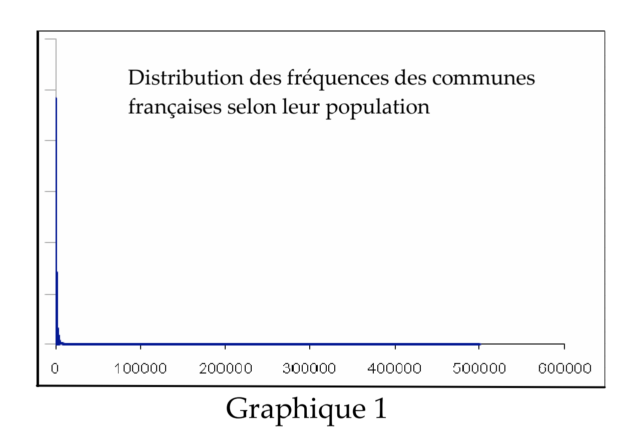
Par ailleurs on pourra exploiter, dans le cadre de travaux interdisciplinaires, des données issues d'autres disciplines (sciences physiques, sciences de la vie et de la terre, sciences de l'ingénieur etc.).

Exemple : fichier des communes françaises
Le nombre important de données peut inciter, dans un premier temps, à effectuer une représentation graphique (graphique 1).

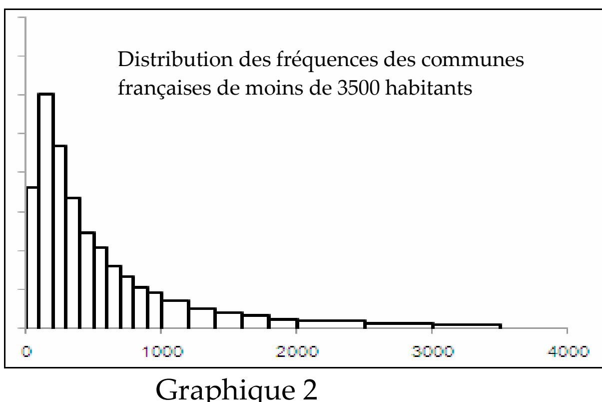
Le résultat obtenu est surprenant et soulève immédiatement la question de la répartition des communes en fonction de leur nombre d'habitants, suggérant de scinder la série, par exemple en isolant les communes de moins de 3500 habitants qui est le seuil retenu dans la loi électorale de 2007. Le graphique 2 donne la répartition de ces communes[3].

---

[3] Réalisation d'histogrammes à classes d'amplitudes inégales, on pourra consulter :
http://www.ac-grenoble.fr/maths/guppy/pages/fiches/Mediane/Tableur_stats_1_Var.htm



Graphique 1

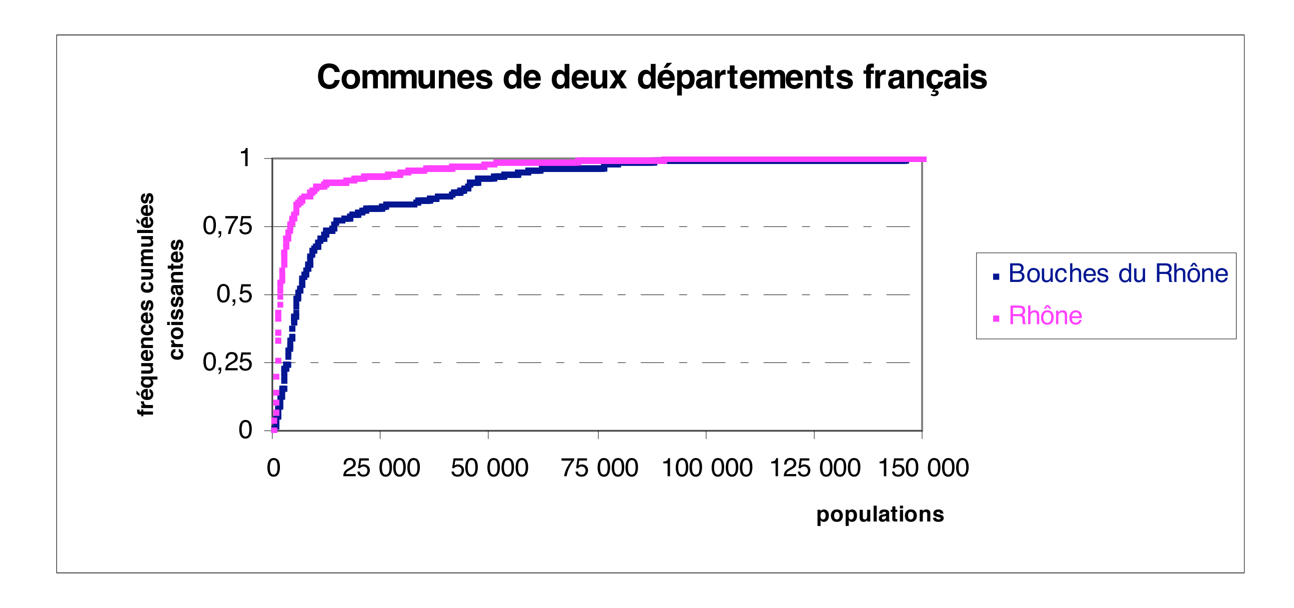


Graphique 2

Il est clair, en observant le graphique 1 ci-dessus que la moyenne (1760 habitants) n'est pas pertinente pour résumer cette série statistique. On lui préfèrera ici la médiane et les quartiles.

1.3. Fréquences cumulées croissantes

La courbe des fréquences cumulées croissantes[4] permet de représenter la distribution d'une série statistique ainsi que l'illustre l'exemple ci-dessous.
Exemple : comparaison entre deux départements[5]
Le graphique ci-après est réalisable à partir du fichier INSEE des régions, départements et communes de France. La compréhension des deux courbes conduit les élèves à des raisonnements formateurs pour répondre aux questions suivantes :
- comment interpréter l'antécédent[6] de 0,5 (resp 0,25 ; 0,75) par chacune de ces fonctions ?
- l'une des courbes est située en dessous de l'autre ; comment interpréter cette propriété ?



[4] Elle permet de retrouver une valeur approchée de la médiane, mais ce n'est pas une méthode à préconiser lorsque l'objectif est uniquement de déterminer une valeur médiane.
[5] Activité à l'adresse suivante :
http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/Exemple de progression/activite_communes.doc
[6] Sous l'hypothèse que les points aient été reliés.

2. Probabilité sur un ensemble fini

Le travail sur les probabilités, initié en classe de troisième, est stabilisé et consolidé en classe de seconde avec, en perspective, une démarche de modélisation de phénomènes réels.

2.1. Résumé des notions abordées en troisième

Notion de probabilité, calcul dans des situations familières (lancer de pièces ou de dés, roue de loterie, urnes). Probabilités estimées par des fréquences observées sur de longues séries. Application pour modéliser des situations de la vie courante. Les expériences aléatoires concernent des situations à une ou deux épreuves qui n'excèdent pas 6 éventualités au total.

2.2. Distribution de probabilité sur un ensemble fini, probabilité d'un événement

Il s'agit dans un premier temps de consolider les notions abordées en classe de troisième.

Une distribution de probabilité sur un ensemble Ω est définie par la donnée des probabilités des éléments de Ω. Un événement est défini comme sous-ensemble de Ω. C'est cette définition ensembliste qui permet de calculer la probabilité d'un événement en ajoutant les probabilités des éléments qui le constituent. On consolide à l'occasion la notion d'ensemble ou de sous-ensemble, ce qui permet, entre autres, d'ancrer l'idée que dans un ensemble on ne répète pas les éléments et que leur ordre n'importe pas.

Les distributions de probabilité peuvent être estimées par observation de la stabilisation des fréquences[7] sur de longues séries d'expériences[8] ou bien par des considérations géométriques ou physiques en référence à l'équiprobabilité.

De même qu'au collège les élèves ont utilisé, sans formalisme, quelques éléments de langage sur les probabilités[9] , de même en classe de seconde certaines notations usuelles seront utilisées pour leur commodité et sans donner lieu à un formalisme excessif :
$\overline{A}$, p({1,2,3}), p($A \cap B$) ou p(A et B), p($A \cup B$) ou p(A ou B), card(A).

2.3. Modélisation, modélisations ?

La simulation a pour préalable de choisir un modèle.

Exemple 1 : somme de deux dés
Cette situation se prête volontiers à la mise en œuvre d'une démarche consistant à proposer un modèle et à le confronter aux données d'expérience. Les résultats compris entre 2 et 12 peuvent conduire certains élèves à faire porter l'équiprobabilité sur l'ensemble des 11 résultats observables. Par quelques expérimentations avec des dés, puis en ayant recours à des simulations, on est conduit à rejeter ce modèle pour proposer de faire porter l'équiprobabilité sur les 36 couples de résultats {(1,1) ;(1,2) …(6,6)}, présentés usuellement sous forme de tableau croisé.

[7] On en restera à la perception intuitive de la loi des grands nombres.
[8] On trouvera un exemple d'approche fréquentiste page 13 dans le document ressource des nouveaux programmes de lycée professionnel http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/Proba_stat_LP.doc
[9] Cf. document ressource du collège :
http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/doc_ressource_clg_probabilites.pdf

D’autres exemples[10] pourront être développés, montrant aux élèves les cheminements de pensée entre les modèles retenus et les expériences réelles, et posant la question de l’ensemble sur lequel porte l’équiprobabilité.

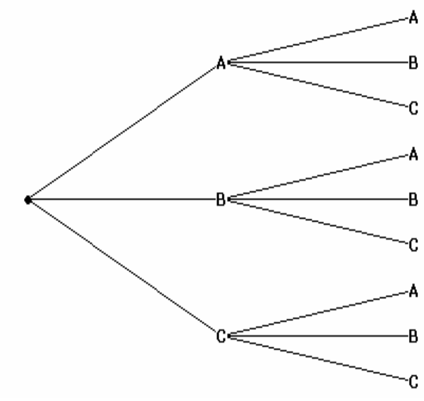
Exemple 2 : le problème des deux personnes qui s'assoient "au hasard "

Un square est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent successivement et s’installent au hasard. Quelle est la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte ?

En faisant l'hypothèse de l'équiprobabilité des issues :

Première modélisation[11] : on numérote les six places 1, 2, 3, 4, 5 et 6, chaque paire représente les deux places occupées. En comptant les paires {1,2}, {1,3} … {5, 6}, on obtient pour cet événement une probabilité de $\frac{3}{15}$ soit $\frac{1}{5}$.

Deuxième modélisation[12] *:* on note les trois bancs A, B et C, les résultats de l'expérience peuvent être codés par des couples, par exemple (B,A) : la première personne s'assoit sur le banc B et la deuxième sur le banc A. On peut aussi construire l'arbre des possibles :



On obtient une probabilité de $\frac{1}{3}$.

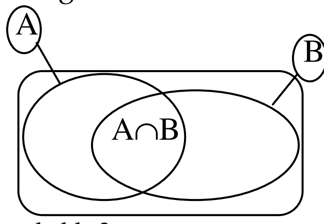
Ces deux modèles donnent des résultats différents, « tirer au hasard » n'étant pas une information suffisante, même en rajoutant une hypothèse d'équiprobabilité. Une description plus précise de l'expérience doit être fournie pour induire un choix de modèle.

3. Calculs de probabilités

3.1. Réunion et intersection de deux événements

Les symboles d’union et intersection sont introduits en liaison avec les conjonctions « ou » et « et », en comparant leur sens mathématique avec leur usage dans la langue commune.

La formule $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$ pourra être illustrée par un diagramme de Venn :



[10] Le problème du Duc de Toscane : lancer de trois dés, quelle est la somme la plus probable ? : http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/Le paradoxe du Duc de Toscane.doc

[11] On peut imaginer que le choix de la place s’effectue par tirage sans remise dans une urne avec 6 jetons numérotés de 1 à 6.

[12] Le choix du banc pourrait s’effectuer par tirage avec remise dans une urne contenant 3 jetons A, B et C.

Exemple : avec le fichier des communes françaises
On choisit au hasard une commune dans l'ensemble des communes de France.
Quelle est la probabilité de l'événement A : « cette commune est dans votre région » ?
Quelle est la probabilité de l'événement B : « sa population est inférieure à 1000 habitants » ?
Définir les événements $A \cup B$ et $A \cap B$ puis calculer leur probabilité.
Cet exemple, à partir d'un fichier comportant de très nombreuses données, peut conduire les élèves à pratiquer des instructions logiques dans les conditions appelées par la fonction NB.SI.

3.2. Tableaux croisés

Les tableaux croisés rencontrés dans des résumés d'enquêtes se prêtent à des calculs simples de probabilités d'intersections ou d'union[13].

3.3. Arbres des possibles

Les arbres décrivant de façon exhaustive les issues d'une expérience ont pu être abordés en classe de troisième ; on peut consolider cette pratique pour aider les élèves à se construire des images mentales fiables et être plus assurés dans les modélisations et les calculs.

Ces arbres aident au dénombrement et sont des supports de raisonnement. Il n'est pas toujours nécessaire ni matériellement possible d'en représenter toutes les branches. On peut développer les capacités d'abstraction des élèves en utilisant des pointillés dans leur construction.

Exemple : probabilité d'avoir la même date anniversaire[14]
En regardant les dates anniversaires des élèves dans les classes du lycée, on peut être surpris du nombre de classes dans lesquelles deux élèves fêtent leur anniversaire le même jour.

Ce résultat étonnant peut inciter à faire un calcul de probabilité.

On pourra proposer de commencer par un exemple plus simple :

« Dans un groupe de quatre personnes prises au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même mois ? On suppose que, pour chaque personne, tous les mois d'anniversaire sont équiprobables et on les numérote de 1 à 12. ».

On peut reformuler ce problème en assimilant l'expérience à un tirage aléatoire dans une urne : « une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12, on effectue au hasard et avec remise quatre tirages successifs, et l'on note les numéros obtenus, dans l'ordre d'apparition. Chaque numéro tiré correspond au mois d'anniversaire d'une des personnes ».

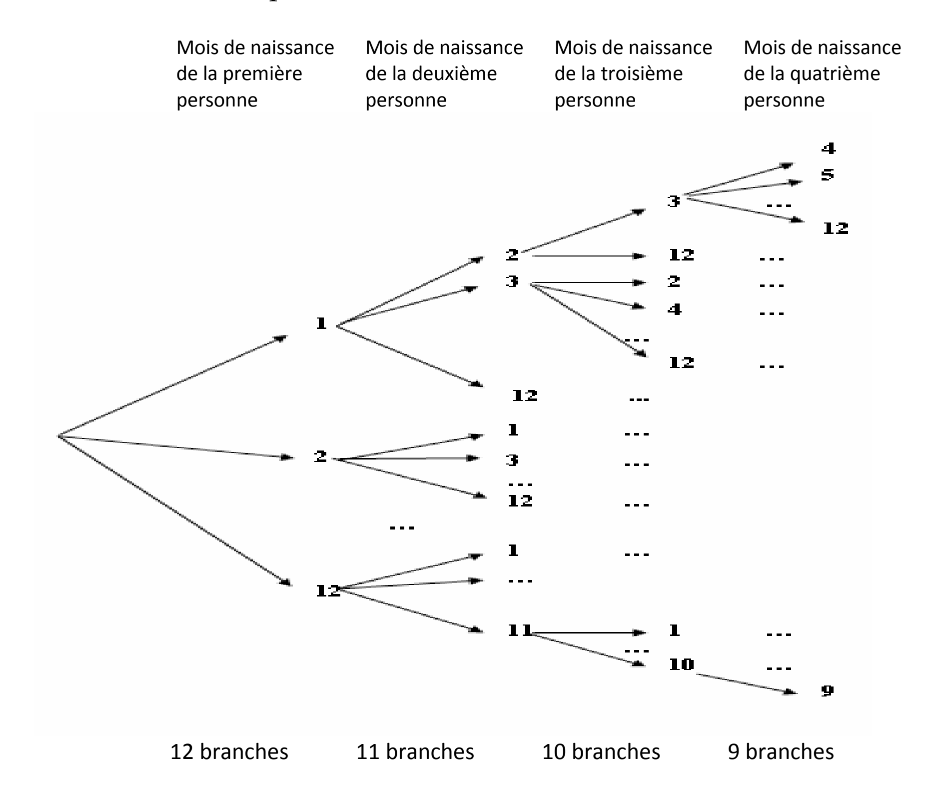
On peut compter le nombre total des issues avec un arbre comportant des pointillés.

Ensuite on peut rechercher le nombre d'éléments de l'événement étudié, montrer la difficulté que l'on rencontre pour décrire et compter directement les cas favorables, puis faire réfléchir à l'intérêt et à l'énoncé de l'événement contraire (négation de "au moins…").

---

[13] On peut utiliser des tableaux croisés disponibles sur le site de l'INSEE, par exemple le diplôme le plus élevé selon l'âge et le sexe : http://www.insee.fr/fr/themes/tableau.asp?reg_id=0&ref_id=NATCCF07235
[14] Cf. feuille de calcul
http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/Anniversaires_probabilit%E9s_simulation.xls

Illustration de l'arbre des possibles de l'événement contraire:



Pour bien s'assurer de la compréhension de l'arbre, on peut suivre un trajet de la racine à une extrémité de branche et demander aux élèves d'interpréter le résultat par une phrase.

On trouve au total $12\times11\times10\times9 = 11880$ issues possibles. Ce qui donne comme probabilité de l'événement contraire : $\dfrac{12\times11\times10\times9}{12^4}$, soit environ 0,43 ; d'où la probabilité cherchée (environ 0,57). On peut ensuite adapter ces calculs de probabilité pour un groupe de cinq, puis six personnes[15].

Retour au problème initial : le même raisonnement, immédiatement transposé, permet de résoudre la situation des mêmes dates anniversaires et de rechercher la taille du groupe de personnes pour avoir une probabilité supérieure à 0,8 qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniversaire à la même date.

Utilisation d'un algorithme

Si n désigne le nombre de personnes du groupe, il s'agit de déterminer à partir de quelle valeur de n le nombre $q=\dfrac{365\times364\times\cdots\times(365-(n-1))}{365^n}$ est inférieur à 0,2, avec $q=1-p$.

En remarquant que q peut s'écrire comme une répétition de multiplications : $q=\dfrac{365-0}{365}\times\dfrac{365-1}{365}\times\dfrac{365-2}{365}\times\cdots\times\dfrac{365-(n-1)}{365}$, on peut élaborer un algorithme de calcul de ce nombre selon la valeur de n (algorithme 1), puis par essais successifs, déterminer la première valeur de n qui répond à la question[16].

---

[15] Réponses: 0,62 et 0,78.

[16] Pour $n = 35$, on trouve $p\approx0{,}814$, alors que pour $n = 34$ on a $p\approx0{,}795$.

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables n, i entiers et q réel Entrées Saisir n Initialisations q prend la valeur 1 Traitement Pour i variant de 1 à $n-1$ q prend la valeur $q\times\frac{365-i}{365}$ Sorties Afficher $1-q$	Variables i entier, p et q réels Entrées Saisir p Initialisations q prend la valeur 1, i prend la valeur 0 Traitement Tant que q est supérieur à $1-p$ q prend la valeur $q\times\frac{365-i}{365}$ i prend la valeur $i+1$ Fin du Tant que Sorties Afficher i

On peut aussi utiliser un algorithme avec boucle et condition d'arrêt (algorithme 2) pour éviter le tâtonnement et répondre rapidement à cette question ou à une question du type : déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle p est supérieur à 0,99, ou à 0,999, et observer l'évolution de n.

Le calcul précédent pourrait également être réalisé à l'aide d'un tableur.

3.4. Arbres pondérés

Les situations simples à deux épreuves ont pu être travaillées au collège à l'aide de petits arbres pondérés[17]. Il s'agit d'entretenir, sans aucun nouveau développement ni aucune complexification, ce type de présentation et son mode opératoire, comme l'illustre l'exemple ci-dessous. Toute connaissance sur le conditionnement est hors programme.

Exemple :

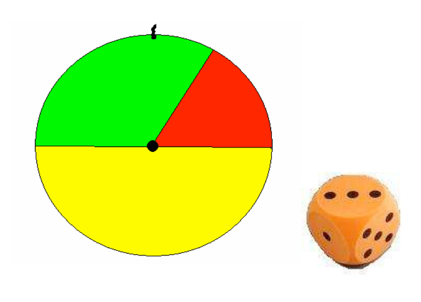
Un forain propose le jeu suivant : "À tous les coups l'on gagne"

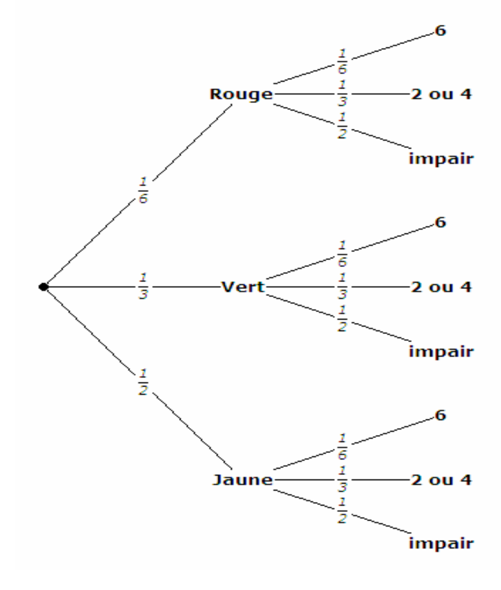
Le joueur fait tourner une roue divisée en secteurs de mesures 60°, 120° et 180° puis il lance un dé équilibré. Il gagne un petit lot si la couleur sortie sur la roue est le vert et si le dé sort un numéro impair. Il gagne un gros lot si la couleur sortie sur la roue est le rouge et si le dé sort un six. Dans les autres cas, il gagne une pacotille.

Quelle est la probabilité de gagner un gros lot ?

Quelles sont les probabilités de gagner un lot (petit ou gros) ?

De gagner une pacotille ?





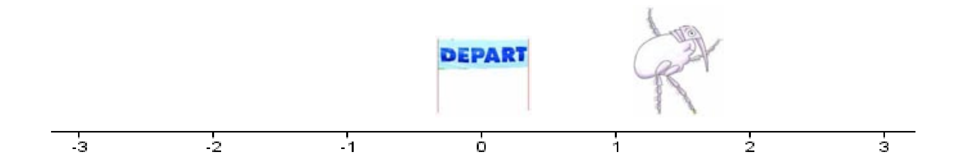
[17] Cf. document ressource du collège : http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/doc_ressource_clg_probabilites.pdf

L'arbre pondéré ci-dessus permet de répondre à la première question où il s'agit d'évaluer la probabilité de l'événement (R,6) : dans un arbre, la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin[18]. Cet arbre permet d'autre part de trouver facilement les formules donnant la probabilité d'une réunion ou d'un événement contraire, en leur donnant du sens.

3.5. Exemples d'algorithmes : marche aléatoire et temps moyen

Une marche aléatoire est une trajectoire constituée de pas successifs, aléatoires et indépendants. Les applications des marches aléatoires sont multiples tant en botanique (le botaniste Robert Brown, notait en 1827, le caractère apparemment erratique du déplacement de particules de pollen dans l'eau, appelé par la suite mouvement brownien), en sciences physiques (trajectoires d'une molécule dans un liquide ou un gaz), en économie (variations du cours d'une action en bourse) ou en sciences informatiques (certains moteurs de recherche utilisent des marches aléatoires pour parcourir les pages internet) etc.

Exemple : des sauts de puce[19]



Une puce se déplace sur un axe gradué : à chaque saut elle se déplace d'une unité, de manière aléatoire et équiprobable vers la droite ou vers la gauche. Elle part de l'origine et effectue une marche de 30 sauts.
Proposer un algorithme donnant la position d'arrivée de la puce, c'est-à-dire la position du trentième saut.
Enrichir l'algorithme précédent pour donner la liste des positions d'arrivée de N marches aléatoires.

La fonction alea fournit un nombre aléatoire dans l'intervalle [0;1[; l'entier x désigne la position de la puce :

```
Algorithme 1
    Variables
        x, i entiers
    Initialisations
        x prend la valeur 0
    Traitement
        Pour i variant de 1 à 30
            Si alea < 0,5
            alors x prend la valeur x + 1
            sinon x prend la valeur x – 1
            Fin du Si
        Fin du Pour
    Sorties
        Afficher x
```

[18] On en reste à une perception intuitive, lorsque les épreuves successives sont indépendantes (au sens où la première épreuve n'a aucune influence sur la seconde), comme cela est évoqué dans le document ressource sur les probabilités au collège en page 11 :
http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/doc_ressource_clg_probabilites.pdf
[19] Cf. une proposition de fiche élève :
http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/fiche_eleve_marches_aleatoires.doc

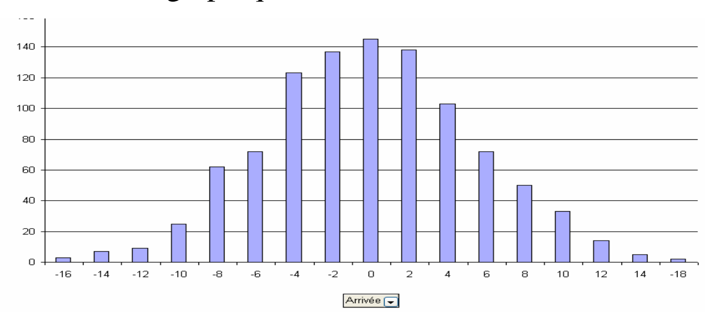
On peut demander aux élèves d'examiner ce que fait l'algorithme suivant :

```
Algorithme 2
        Variables
                N, S, x, i, j entiers
        Entrées
                Saisir N
        Initialisations
                S prend la valeur 0
        Traitement
                Pour j variant de 1 à N
                  x prend la valeur 0
                  Pour i variant de 1 à 30
                      Si alea < 0,5
                      alors x prend la valeur x + 1
                      sinon x prend la valeur x – 1
                      Fin du Si
                  Fin du Pour
                  S prend la valeur S+x
                Fin du Pour
        Sorties
                Afficher S/N
```

Enfin, on peut s'interroger sur la fréquence des différentes positions d'arrivée et pour cela simuler N marches aléatoires de 30 sauts, grâce à l'algorithme suivant :

```
Algorithme 3
        Variables
                N, x, i, j entiers, L liste
        Entrées
                Saisir N
        Initialisations
                Vider la liste L
        Traitement
                Pour j variant de 1 à N
                  x prend la valeur 0
                  Pour i variant de 1 à 30
                      Si alea < 0,5
                      alors x prend la valeur x + 1
                      sinon x prend la valeur x – 1
                      Fin du Si
                  Fin du Pour
                  L(j) prend la valeur x
                Fin du Pour
        Sorties
                Afficher la liste L
```

Pour mieux se représenter les résultats, il peut être utile de représenter les données aléatoires ainsi obtenues, sous la forme du graphique suivant :



Exemple : nombre de lancers pour sortir tous les numéros d'un dé cubique[20]

On souhaite estimer le nombre de lancers nécessaires pour sortir toutes les faces d'un dé cubique.

Comme pour l'exemple précédent, la réponse est aléatoire. On peut, dans un premier temps, écrire un algorithme permettant de simuler une expérience, puis faire tourner plusieurs fois cet algorithme et observer que la moyenne des résultats obtenus se stabilise[21] pour un grand nombre d'expériences. Cette moyenne, elle aussi aléatoire, permet néanmoins de proposer une réponse au problème en termes de probabilités.

```
Algorithme
        Variables
              L liste
              S, n, x entiers
        Initialisations
              Vider la liste L
              S et n prennent la valeur 0
        Traitement
              Tant que[22] n est inférieur à 6
              S prend la valeur S +1
              x prend la valeur d'un nombre aléatoire entier entre 1 et 6
              si x ne figure pas dans la liste L alors
                     n prend la valeur n+1
                     L(n) prend la valeur x
              Fin du Tant que
        Sorties
             Afficher S
```

On peut, pour estimer le nombre moyen de lancers permettant de sortir les six faces du dé, modifier l'algorithme précédent en s'inspirant de l'algorithme 2 ci-avant.

III. Échantillonnage

1. Fluctuation d'échantillonnage

1.1. Notion d'échantillon

Le terme « échantillon » prenant différents sens, il convient de préciser ce qu'il recouvre dans le programme de seconde.

Dans le sens commun des sondages, ce terme s'apparente à un sous-ensemble obtenu par prélèvement aléatoire dans une population. Ainsi parle-t-on usuellement de résultats estimés sur échantillon.

---

[20] On peut examiner en variante le nombre moyen de tablettes de chocolat qu'il faut acheter pour obtenir la collection complète des six images qui sont jointes. Cf. une expérimentation en classe à l'adresse http ://www.statistix.fr/spip.php ?article15

[21] On en restera à une approche intuitive de la loi des grands nombres.

[22] On peut observer que cette condition n'assure pas que l'algorithme se termine en un nombre fini d'opérations. Il suffirait alors de modifier légèrement le critère de sortie de boucle, en fixant par exemple un nombre maximum pour S au-delà duquel le programme s'arrête.

En statistique, un échantillon de taille n est la liste des n résultats obtenus par n répétitions indépendantes de la même expérience[23]. Par exemple, un échantillon de taille 100 du lancer d'une pièce est la liste des résultats pile ou face obtenus successivement en répétant 100 fois le lancer de la pièce. De même pour un échantillon de taille 100 relatif au lancer d'un dé dont on observe l'apparition ou non de la face 6, ou bien encore pour un échantillon obtenu par tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules blanches et une boule verte. Ces trois exemples relèvent en fait du même modèle, celui de Bernoulli qui affecte la probabilité p au nombre 1 et la probabilité $(1 - p)$ au nombre 0, seule situation abordée en classe de seconde.

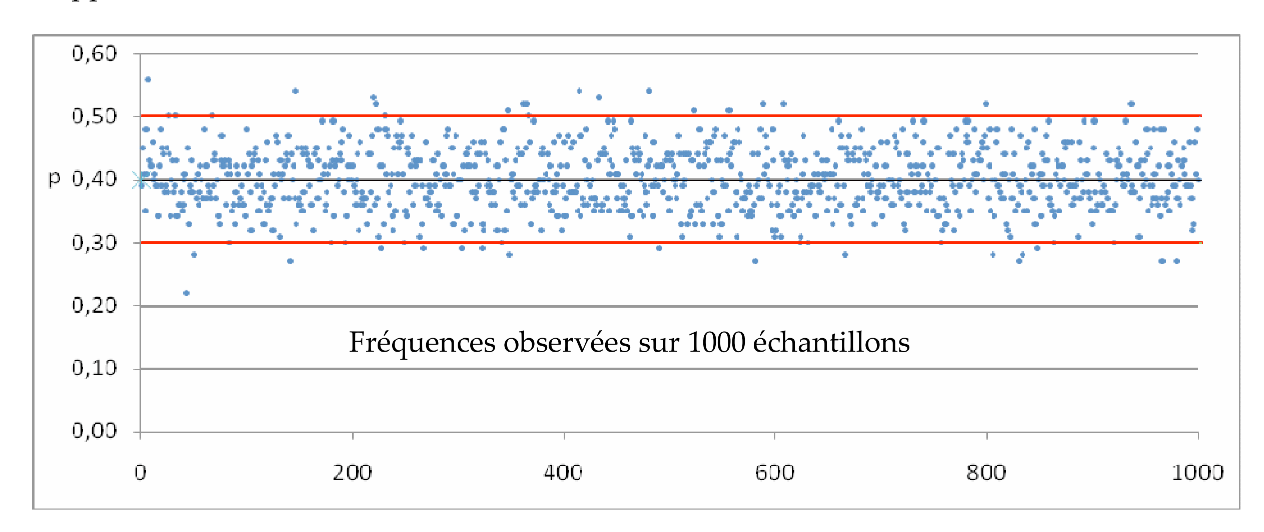
Cette notion d'échantillon fournit un cadre théorique pour démontrer les résultats énoncés ci-dessous sur la fluctuation d'échantillonnage.

En outre, ces résultats théoriques pourront s'appliquer aux sondages destinés à estimer une proportion p (par exemple le pourcentage de votes « oui » lors d'un référendum), en remarquant qu'un tirage sans remise d'un échantillon dans une population suffisamment nombreuse est assimilable à la répétition d'un tirage avec remise dans une urne.

1.2. Intervalle de fluctuation[24]

On peut, par expérimentation et simulation, faire observer aux élèves que les échantillons de taille n obtenus à partir d'un modèle de Bernoulli ont, pour environ 95% d'entre eux, des fréquences d'apparition du nombre 1 qui fluctuent[25] dans un intervalle centré en p et d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

On a simulé ci-dessous[26], 1000 échantillons de taille 100 d'un modèle de Bernoulli avec $p = 0,4$. Chaque échantillon est représenté par un point dont l'ordonnée est sa fréquence d'apparition du 1. On observe que la plupart des échantillons ont des fréquences d'apparition du 1 dans l'intervalle [0,3 ; 0,5].



---

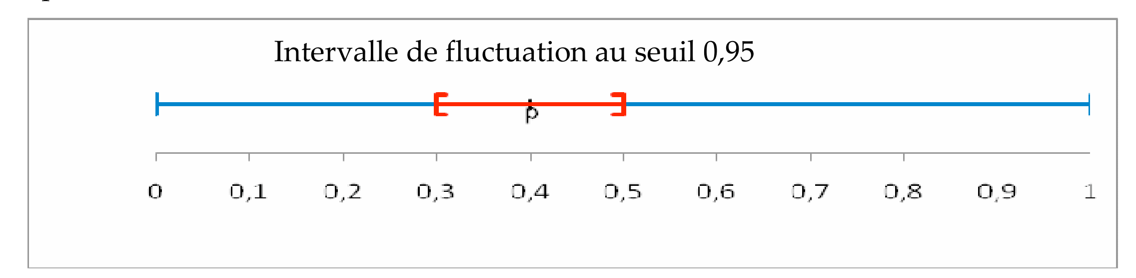
[23] C'est-à-dire relative au même modèle.

[24] Voir les simulations avec un tableur :
http ://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/intervalles_fluctuation_confiance.xlsx
ou http ://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/intervalles_fluctuation_confiance.ods

[25] Pour n assez grand, on observera que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est l'ordre de grandeur de cette fluctuation autour de p au seuil 95%.

[26] Ici la simulation a été effectuée au tableur à l'aide de la formule ENT(ALEA()+0,4)

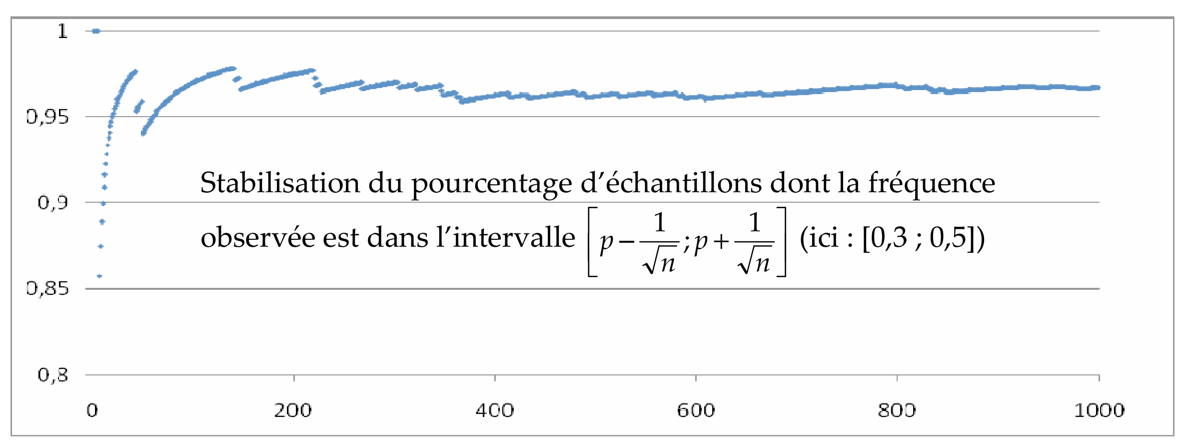
On peut alors définir[27] l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, relatif aux échantillons de taille n, comme l'intervalle centré autour de p, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille n.



Dans la pratique, on utilise l'intervalle[28] $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, pour des probabilités p comprises entre 0,2 et 0,8, et des échantillons de taille n supérieure ou égale à 25.

Pour p donné, on peut faire calculer les bornes de cet intervalle pour quelques valeurs de n, et remarquer qu'il faut multiplier la taille de l'échantillon par k^2 pour diviser par k l'amplitude de l'intervalle. On pourra calculer l'amplitude correspondant aux échantillons de taille 1000, taille souvent retenue dans les sondages.

Il est possible de visualiser[29] le pourcentage d'échantillons dont les fréquences d'apparition du 1 sont situées dans l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Le graphique[30] suivant est obtenu à partir des 1000 échantillons simulés et représentés ci-avant.



---

[27] Il faudrait en fait considérer le plus petit intervalle où se situent les fréquences observées avec une probabilité au moins égale à 0,95. Mais pour une première approche de cette notion, on s'est limité à l'énoncé ci-dessus.

[28] Il s'agit d'un résultat asymptotique, résultant de la convergence en loi de la variable aléatoire f_n correspondant à la fréquence d'un échantillon de taille n vers la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sigma=\sqrt{p(1-p)}$. Ainsi, pour n assez grand, f_n appartient avec une probabilité d'environ 0,95 à l'intervalle $\left[p-\frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}, p+\frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ qui est inclus dans $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ (car $\sigma=\sqrt{p(1-p)}\leq\frac{1}{2}$). On pourra se référer au document d'accompagnement du programme 2001 de la classe de seconde à l'adresse :
http ://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/doc_proba_stat_seconde2001.pdf

[29] cf. feuille de calcul : http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/intervalles_fluctuation_confiance.xlsx ou http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/intervalles_fluctuation_confiance.ods

[30] Lecture : parmi les 200 premiers échantillons de taille 100 obtenus, environ 97% ont une fréquence d'apparition du 1 dans l'intervalle [0,3 ; 0,5]

2. Applications de la fluctuation d'échantillonnage

2.1. Prise de décision à partir d'un échantillon

On pourra développer quelques exemples de prises de décision sur échantillon fondées sur la connaissance de l'intervalle de fluctuation.

Exemple : la parité, c'est quoi ?
Deux entreprises A et B recrutent dans un bassin d'emploi où il y a autant de femmes que d'hommes, avec la contrainte du respect de la parité. Dans l'entreprise A, il y a 100 employés dont 43 femmes ; dans l'entreprise B, il y a 2500 employés dont 1150 femmes (soit 46%). Or 46% est plus proche de 50% que 43% : les chiffres parlent d'eux-mêmes, pourrait-on dire, et l'entreprise B respecte mieux la parité que l'entreprise A. Si on admet que la parité, c'est exactement 50% de femmes, il est vrai que B en est plus proche que A. Mais une telle définition, à l'unité près, de la parité n'aurait ici pas de sens.
La parité, cela signifie que l'identité sexuelle n'intervient pas au niveau du recrutement, c'est-à-dire qu'au niveau du caractère homme ou femme, les résultats observés pourraient être obtenus par choix au hasard des individus dans la population. Dans ce cadre, l'entreprise A est assimilable à un échantillon de taille 100 du modèle de Bernoulli (avec $p = 0{,}5$) dont l'intervalle de fluctuation est [0,4 ; 0,6] et l'entreprise B à un échantillon de taille 2500 dont l'intervalle de fluctuation est [0,48 ; 0,52]. La valeur 43% est donc dans l'intervalle de fluctuation, alors que 46% ne l'est pas. Autrement dit, pour l'entreprise B, la proportion de 46% s'observe dans moins de 5% des échantillons obtenus selon le modèle accordant une probabilité égale d'obtenir un homme et une femme. On peut alors rejeter l'hypothèse que cette entreprise respecte la parité.

En résumé, le raisonnement pour apprécier si une fréquence observée f sur un échantillon de taille n est compatible ou non avec un modèle de Bernoulli de probabilité p, est le suivant : on regarde si cette fréquence est dans l'intervalle de fluctuation à 0,95[31] relatif aux échantillons de taille n du modèle, c'est-à-dire si l'écart entre f et p est probable, au sens où le hasard produirait un tel écart dans 95% des échantillons envisageables. Si f est en dehors de l'intervalle de fluctuation, on considère que l'observation n'est pas compatible avec le modèle, en ce sens que dans un tel modèle elle ne s'observerait que dans 5% des échantillons de taille n (avec le risque de prendre la mauvaise décision dans 5% des cas). On s'interrogera alors, par exemple dans le contrôle de qualité industrielle, sur le réglage d'une machine lorsque dans un lot de pièces produites la fréquence de défauts observés est peu probable au regard du modèle indiquant une probabilité p de défauts.

Ce type de raisonnement, qui intègre la connaissance de l'intervalle de fluctuation, est à la base de ce que l'on appelle parfois une « preuve statistique ».

On trouvera de nombreuses activités pour la classe dans le document ressource relatif au nouveau programme de mathématiques de la voie professionnelle, disponible à l'adresse suivante : http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/Proba_stat_LP.doc. On s'y interroge par exemple, à l'aune de la fluctuation d'échantillonnage, sur la fréquence des cas de leucémie chez les garçons de moins de 15 ans dans une petite ville des États-Unis (9 cas sur 5969, soit une fréquence de 0,0015 alors que la proportion constatée sur l'ensemble du territoire est de 0,00052). De même on questionne les 16 naissances masculines sur les 20

[31] Le seuil 0,95 est conventionnel. D'autres seuils sont retenus selon les questions ou domaines étudiés.

naissances d'un petit village de Chine ou encore les 46 naissances de garçons parmi les 132 naissances dans une petite ville du Canada. Dans ces différents exemples, le raisonnement statistique permet de mettre en évidence des observations « rares » au regard de la fluctuation d'échantillonnage, qui ont déclenché des investigations complémentaires, extérieures au champ des mathématiques, pour rechercher et analyser les causes des phénomènes observés.

Par ailleurs, une activité étudie, au regard des probabilités de défections constatées à l'embarquement, le risque de surréservation que prend une compagnie aérienne lorsqu'elle vend plus de billets que de places.

On y aborde aussi un exemple de contestation d'un jugement au Texas au motif que la désignation des jurés était discriminante à l'égard des américains d'origine mexicaine. Cette possibilité de quantifier, en termes de probabilité, si la fréquence observée (ici la proportion de jurés d'origine mexicaine) est rare ou fréquente dans un modèle considéré, fournit au juge des éléments qui, agrégés à d'autres arguments, fondent son jugement.

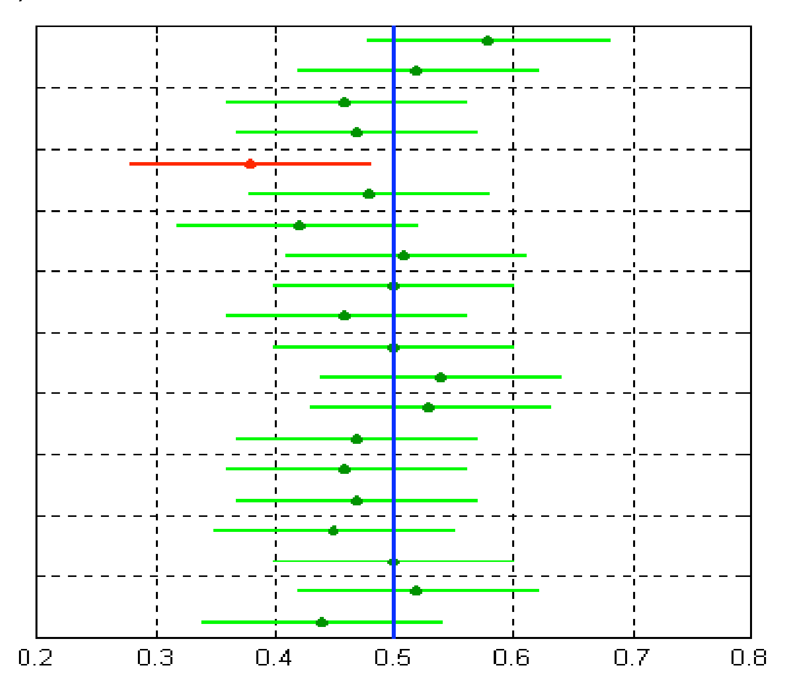
Exemple : élection annulée
Dans un entretien retranscrit dans le livre : "le hasard aujourd'hui ", Jean-Louis Boursin relate ce qui s'est passé lors d'une élection dans la région parisienne :
[… Un candidat aux élections législatives soupçonnait de fraude un certain nombre de bureaux de vote. Il pensait que dans ces bureaux là, il y avait un risque parce qu'il n'avait pas confiance en ceux qui tenaient les bureaux. Il a fait faire des sondages extrêmement précis, il a fait une étude sur les élections précédentes et, muni de ces chiffres et des résultats, centaine par centaine, il est allé au tribunal administratif et a affirmé que le hasard ne pouvait pas produire cela : " voilà une centaine de bulletins qui donnent 98 bulletins à mon adversaire et 2 à moi, cela n'est pas possible. Le calcul des probabilités montre que cela a une chance sur dix ou quinze millions de se produire ". Le tribunal lui a donné raison sur un simple raisonnement probabiliste…].

2.2. Estimation d'une proportion

On se place dans la situation de référence suivante, d'une urne contenant plusieurs centaines de petites billes de couleur blanche ou verte dans une proportion p inconnue de billes vertes. On cherche à estimer p à partir d'un échantillon de taille n (on imagine aisément des applications de cette situation, par exemple à l'estimation du résultat d'un référendum).

On considère alors un échantillon de taille n (par répétition de n tirages aléatoires avec remise dans l'urne) et on calcule la fréquence des billes vertes dans cet échantillon. On dispose ainsi d'un échantillon parmi tous ceux qu'on aurait pu obtenir et, d'après le paragraphe 1.2, on sait qu'environ 95% des fréquences observées sont dans l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Or l'appartenance de f à $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ équivaut à celle de p à l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ (appelé aussi fourchette de sondage), ce qui permet de dire que, parmi tous les échantillons de taille n possibles, 95% des intervalles associés $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contiennent le nombre p.

On a représenté ci-dessous[32], les fourchettes associées à 20 échantillons de taille 100 dans le cas p = 0,5. Un échantillon (en rouge) donne une fourchette ne contenant pas *p*, les autres (en vert) contiennent *p*.



Pour exprimer l'idée qu'avant tirage[33] de l'échantillon on avait 95% de chances d'obtenir une fourchette $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ qui contienne *p*, on dira que la fourchette obtenue, une fois l'échantillon tiré, est un intervalle de confiance au niveau 0,95 de *p*. On notera que l'intervalle de confiance associé à un échantillon au niveau 0,95 ne dépend que de la taille *n* de l'échantillon et non pas de la taille de la population[34].

Exemple : estimation par sondage du pourcentage d'artisans parmi les entreprises d'un département.

À partir de données réelles[35] indiquant, pour les entreprises d'un département, si elles ont ou non le statut d'artisan, on peut estimer grâce à un échantillon de taille 1000 la proportion d'artisans. Un tirage aléatoire de 1000 entreprises[36] a donné 36,5% d'artisans. Ainsi,

---

[32] D'après le document d'accompagnement du programme de seconde publié en 2001 consultable à l'adresse : http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/doc_proba_stat_seconde2001.pdf
Voir aussi des simulations :
http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/intervalles_fluctuation_confiance.xlsx
ou http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/intervalles_fluctuation_confiance.ods

[33] Il est clair qu'une fois l'échantillon tiré, l'intervalle de confiance associé est entièrement fixé et qu'il n'y a alors que deux possibilités : *p* appartient ou n'appartient pas à l'intervalle. C'est pourquoi il est incorrect de dire que *p* a une probabilité 0,95 d'appartenir à cet intervalle.

[34] Dans son livre " Les structures du hasard", Jean Louis Boursin explique ceci à l'aide d'une métaphore : étudier un échantillon c'est comme prendre une louche dans une grande marmite pour goûter la soupe, peu importe la taille de la marmite, on aura déjà beaucoup de renseignements sur la soupe à partir de cet échantillon.

[35] D'après l'INSEE, fichier à l'adresse :
http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/Exemple de progression/activites_artisans.doc

[36] On trouvera un exemple d'algorithme qui permet d'extraire un échantillon d'une liste, utilisable aussi sur calculatrice : http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/Annexe_algorithme_echantillons.doc

l'intervalle [33,3% ; 39,7%] est un intervalle de confiance au niveau 0,95 du pourcentage d'artisans dans ce département (la vraie valeur de 37,34% pouvant en l'occurrence être calculée). Cette situation réelle permet aux élèves de pratiquer une estimation par sondage statistique.

IV. Repères pour l'évaluation

La diversité des objectifs visés par l'enseignement des statistiques et des probabilités, tels qu'ils sont précisés dans le programme, invite à proposer des formes d'évaluation variées, prenant davantage en compte l'usage des TIC ou l'expression orale.

Bien sûr, de nombreuses capacités attendues peuvent aisément s'évaluer sous la forme habituelle d'un devoir en temps limité, comme par exemple tout ce qui a trait aux calculs de probabilités, aux représentations graphiques ou aux résumés statistiques.

En revanche, s'agissant de la fluctuation d'échantillonnage, l'objectif est de faire réfléchir les élèves à la conception et à la mise en œuvre d'une simulation et de les sensibiliser aux notions d'intervalle de fluctuation, d'intervalles de confiance et à l'utilisation qui peut en être faite. Aussi, semble-t-il prématuré d'exiger dans des contrôles écrits une autonomie totale des élèves pour conduire les raisonnements qui sont attachés à ces notions : on prendrait en effet le risque de restitutions par cœur pour compenser une assimilation naissante et encore fragile.

C'est pourquoi, l'évaluation des capacités attendues suivantes :

- concevoir, exploiter et mettre en œuvre des simulations de situations concrètes à partir d'un tableur ou d'une calculatrice,
- exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage,
- utiliser un logiciel ou une calculatrice pour étudier une série statistique,

devrait majoritairement être réalisée sous forme de comptes-rendus de travaux pratiques ou de devoirs à la maison. Ces modalités d'évaluations donnent accès à des situations statistiques ou probabilistes appelant l'usage d'un logiciel ou d'une calculatrice, et permettent, en raison de l'interaction possible entre le professeur et les élèves, d'ouvrir le champ de l'évaluation à des situations plus riches et plus ouvertes, qui mobilisent davantage les capacités de recherche, d'expérimentation et d'initiative.

Par ailleurs, concernant tout particulièrement ce chapitre, la place de l'oral gagnerait à être développée, tant cette forme de communication facilite, par le questionnement interactif qu'elle permet, l'explicitation de certains raisonnements statistiques délicats à consigner à l'écrit. Dans ce cadre, on peut envisager de proposer des situations dont l'étude est réalisée en classe et dont le compte-rendu, rédigé à la maison, est suivi d'un exposé en classe ou bien d'échanges avec le professeur permettant d'approfondir certaines argumentations ou démarches imparfaitement restituées à l'écrit afin de les améliorer.

L'expérience acquise lors de l'expérimentation de l'épreuve pratique de mathématiques[37] et les critères d'évaluation qui y ont été explicités constitueront de précieux points d'appui, transférables à ces nouvelles modalités d'évaluation.

---

[37] Cf. le site du groupe des mathématiques de l'inspection générale : http://igmaths.net/

Exemple : discrimination et statistique[38]

À partir de l'activité « contester un jugement » présentée en page 15 dans le document ressource relatif aux nouveaux programmes de lycée professionnel[39], on peut proposer un travail pratique en classe amenant les élèves à reformuler la question sur la discrimination éventuelle des jurés d'origine mexicaine (339 sur 870 jurés) dans un contexte statistique prenant en compte la fluctuation d'échantillonnage. Il s'agit alors de concevoir l'ensemble des jurys désignés à ce jour comme un des échantillons de taille 870 de la loi de Bernoulli de paramètre p, où p désigne la proportion au Texas d'américains d'origine mexicaine ($p \approx 0{,}791$). Cette reformulation étant effectuée, les élèves sont amenés ensuite à simuler des échantillons de taille 870 pour voir si la fréquence observée est dans la zone de fluctuation au seuil 95% ou bien ils peuvent utiliser l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Il leur faut enfin conclure au regard du problème étudié.

Il est clair que ces différentes étapes peuvent donner lieu à des échanges oraux avec le professeur et à des productions écrites partielles qui peuvent être évaluées. L'évaluation peut porter, par exemple, sur la capacité des élèves à tirer profit du questionnement oral du professeur ou de ses indications pour reformuler ce problème de discrimination dans le cadre statistique de l'échantillonnage, ou aussi sur la capacité à mettre en œuvre une simulation sur tableur ou sur calculatrice, ou bien encore sur la capacité à interpréter les résultats de la simulation pour conclure. Tous ces éléments peuvent ensuite être intégrés dans l'évaluation globale de la situation étudiée, soit sous la forme d'une notation intermédiaire, soit par des appréciations qui seront prises en compte lors de la notation finale à la suite de la production écrite. D'une façon générale la notation ne peut être dissociée de l'évaluation des compétences acquises.

Vouloir évaluer sous une forme traditionnelle les capacités mobilisées dans de telles activités amènerait le professeur à proposer des questions intermédiaires qui limiteraient la prise d'initiative et l'intérêt que les élèves peuvent porter à l'étude de situations en lien avec la vie courante, avec des faits de société ou des questions scientifiques.

Signalons, pour terminer, l'idée originale qui a amené les professeurs de mathématiques du groupe « statistique et citoyenneté » de l'IREM de Paris Nord[40] à travailler avec des professeurs de français sur le même thème et à comparer la preuve statistique ainsi apportée aux critères d'un texte argumentatif en français[41].

Une bibliographie et des compléments pour le professeur sont disponibles à la fin du document ressource pour les lycées professionnels.

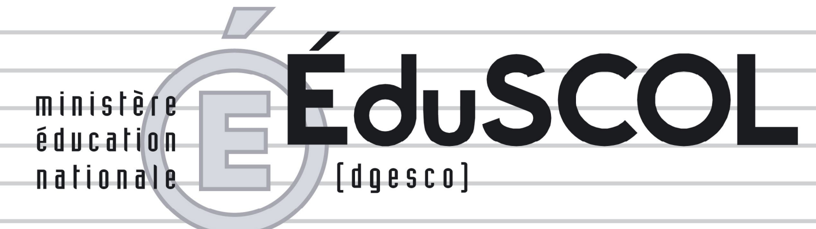
---

[38] Activité du groupe « statistique et citoyenneté » de l'IREM de Paris Nord présentée sur le site statistix (http://www.statistix.fr/spip.php?article27) et disponible aussi à l'adresse http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/discrimination.doc.

[39] Voir document ressource pour les lycées professionnels : http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/Proba_stat_LP.doc

[40] Les travaux de ce groupe sont disponibles à l'adresse : http://www-irem.univ-paris13.fr/spip/spip.php?rubrique15

[41] Cf. http://www.ac-grenoble.fr/maths/docresseconde/discrimination.doc





Mathématiques

Lycée

Ressources pour la classe de seconde

- Notations et raisonnement mathématiques -

Juillet 2009

eduscol.education.fr/ D0015

NOTATIONS ET RAISONNEMENT MATHÉMATIQUES

SOMMAIRE

I. Introduction

1. Place de la logique dans les programmes

Depuis 1969, les différents programmes mentionnent la place de l'enseignement de la logique dans l'acquisition des connaissances. En 1969, le langage des ensembles était un objet d'apprentissage qui n'est plus apparu aussi explicitement dans les programmes ultérieurs. On retrouve néanmoins un point commun important à tous ces programmes : tout exposé de logique mathématique est exclu.
L'étude des formes diverses de raisonnement et la nécessité de distinguer implication mathématique et causalité sont essentielles à la formation mathématique. Cette acquisition doit être répartie tout au long de l'année, lorsque les situations étudiées en fournissent l'occasion et il n'est pas question de traiter la logique dans un chapitre spécifique.

2. Logique et raisonnement

Dans le nouveau programme, il est mentionné que « l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant... Mais tout exposé de cours sur ces notions est exclu, les notations et le vocabulaire mathématique étant des conquêtes de l'enseignement et non des points de départ. » A la fin du programme, un certain nombre de notions à travailler sont détaillées.
Dans ce document, nous ne reviendrons pas sur les différents types de raisonnement, le document ressource du collège restant à ce sujet une référence indispensable à consulter sur le site www.eduscol.education.fr.

II. Programme et éléments de logique ou de raisonnement

La logique et le raisonnement concernent chaque partie du programme : fonctions, géométrie, statistiques et probabilités. Mais certaines notions sont plus faciles à appréhender dans un domaine plutôt qu'un autre. Ce paragraphe propose, sous forme d'exemples, une intégration possible de ces notions dans les différents domaines.

1. Fonctions

1.1. Notion d'ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion

Exemple 1

Soit (O, I, J) un repère orthonormal d'unité 1 cm. On considère les points suivants :

A(2 ; 5,5), B(1,1 ; 1,21), $C(\sqrt{3};2\sqrt{3})$, $D(\frac{2}{3};\frac{3}{2})$, E(–1,21 ; –1,1) et $F(-\frac{5}{3};-8)$.

Parmi ces points, quels sont ceux dont les coordonnées vérifient la relation : $x^2 + y^2 = 25$?

Placer dans le repère d'autres points dont les coordonnées vérifient cette relation.

L'objectif de cet exemple est de faire comprendre la notion d'appartenance à un ensemble, ici un ensemble de points défini analytiquement. Cet exemple unique est insuffisant. Un scénario possible d'exploitation dans la classe peut être de grouper les élèves et de proposer différentes relations du type : $3x - 2y + 5 = 0$; $xy = 1$; $y = x^2$; $x = y^2$; $3x + 5 = 0$… chaque groupe choisissant une relation différente.
À cette occasion, la définition de la courbe représentative d'une fonction peut être travaillée ou reprise.

Exemple 2

Compléter le tableau suivant donnant trois traductions de chaque énoncé, sachant que x est un nombre réel :

Intervalle	Inégalités	Langue naturelle
$x \in [3, 5]$		
		x appartient à l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à 6
	$2 \leq x$	

Dans cet exemple, il s'agit de proposer aux élèves différents registres pour traduire une inégalité. Une quatrième colonne peut être introduite pour représenter l'intervalle sur la droite des réels.
Par la suite, lorsque l'élève sera confronté à un énoncé plus difficile et s'il en ressent le besoin, le professeur pourra l'inviter à revenir sur les différentes traductions d'une même propriété, conformément à cet exercice de référence.

Par exemple, la compréhension de l'énoncé suivant,
« Soit x un nombre réel qui vérifie $2{,}6 \leq x \leq 3{,}8$. Donner le meilleur encadrement possible de ce nombre par deux entiers »
suppose l'acquisition des compétences suivantes :

- savoir traduire les conditions « $x \geq 2{,}6$ et $x \leq 3{,}8$ » en termes d'intervalle ou de positionnement des réels sur la droite des réels ;
- comprendre que l'intervalle $[2{,}6 ; +\infty[$ est inclus dans l'intervalle $[2 ; +\infty[$ (c'est-à-dire avoir conscience de la transitivité de l'inégalité) et que l'intervalle $]-\infty ; 3{,}8]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty ; 4]$.

1.2. Explicitation des quantifications

Les élèves ont fréquemment rencontré au collège des énoncés comportant des quantifications implicites. C'est le cas, par exemple :

- dans l'énoncé de règles de calcul dans le programme de 5e
- dans la présentation des identités remarquables

En classe de seconde, l'explicitation des quantifications doit être faite dans l'optique d'aider les élèves à mieux comprendre les énoncés. Elle ne doit pas être systématique mais doit être faite dès qu'il peut y avoir ambiguïté de la situation proposée. Il est inutile de compliquer les notations lorsque ce n'est pas utile à la compréhension.
Les quantificateurs seront introduits en situation progressivement tout au long de l'année, la langue naturelle et le langage symbolique devant coexister pendant toute l'année.
Les étapes « comprendre la nécessité de quantifier », « être capable d'expliciter les quantifications » et « être capable de rédiger avec des quantificateurs » sont des étapes différentes ; la dernière étant un objectif de fin de lycée et non de la classe de seconde.
Il convient d'amener progressivement les élèves à prendre l'habitude de faire apparaître les quantifications dans leurs productions écrites, quand la compréhension le demande.

Exemple 3

Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.
(*Pour tout nombre réel x, l'image de x par la fonction f est égale à* $2x + 5$)
L'équation $f(x) = 2x + 5$ a-t-elle des solutions ?
(*Existe-t-il des nombres réels x pour lesquels* $f(x)$ *et* $2x + 5$ *sont égaux ?*)
Résoudre l'équation $f(x) = 2x + 5$.
(*Trouver l'ensemble de tous les réels x pour lesquels* $f(x)$ *et* $2x + 5$ *sont égaux*)

Dans les deux énoncés, la trace écrite (au tableau ou sur le cahier) est souvent la même :

$$f(x) = 2x + 5.$$

Cependant les deux énoncés n'ont bien sûr pas le même statut : le premier énoncé définit une fonction, le second conduit à résoudre (graphiquement ou par calcul) une équation. Il est important de clarifier par oral ces différents statuts dès que l'occasion se rencontre, et dans certains cas, de faire noter les quantifications par écrit, sans formalisme excessif.

Exemple 4

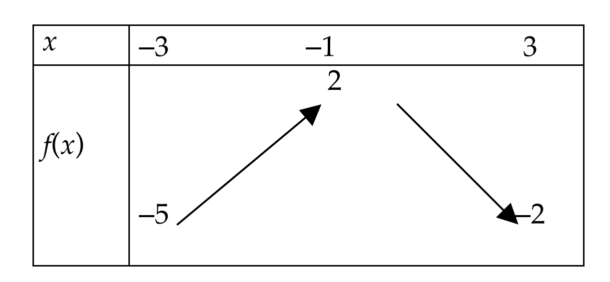
L'énoncé : « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ » est-il vrai ?

Ici, il s'agit de faire prendre conscience de la nécessité de ***préciser le contexte de la proposition conditionnelle***, c'est-à-dire l'ensemble auquel appartient x pour pouvoir donner la valeur vraie ou fausse à cet énoncé. En effet, si x est un nombre positif, l'énoncé est vrai, si x est un réel, l'énoncé est faux et un contre-exemple est facilement trouvé.
La nécessité de ce type de précision se retrouve dans la modélisation d'une situation où il est nécessaire de préciser le domaine de définition de la variable.

Certains élèves n'interprètent pas de la même façon les phrases suivantes :
« si $x \leq -1$ alors $x^2 \geq 1$ » et « $x^2 \geq 1$ si $x \leq -1$ ». La première est déclarée vraie, la deuxième est déclarée fausse, comprise à tort comme « $x^2 \geq 1$ si et seulement si $x \leq -1$ ». Cette confusion provient du sens commun dans la langue naturelle. La résolution d'équations et inéquations et le travail sur des encadrements à partir de courbes et de tableaux de variations de fonctions sont des occasions pour préciser la signification de ces phrases.

Exemple 5

Le tableau de variation ci-contre est celui d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.
En exploitant les informations données, justifier pour chacune des propriétés suivantes, si elle est vraie ou fausse.
a. Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ qui a une image par f strictement inférieure à 0.
b. Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ ont une image par f négative.
c. Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ ont une image par f strictement inférieure à 3.



1.3. Implication et équivalence

Exemple 6[1]

A. Voici deux propositions où a et b désignent des nombres réels :

[1] $(a + b)^2 = 0$ [2] $a = 0$ et $b = 0$

Si a et b sont des nombres réels tels que la proposition [2] est vraie, alors la proposition [1] est vraie. On note : pour a et b réels, [2] ⇒ [1] et on dit que, pour a et b réels la proposition [2] implique la proposition [1].

Est-il vrai que pour a et b réels, la proposition [1] implique la proposition [2] ?

B. Voici quelques propositions où a et b désignent des nombres réels :

[1] $a^2 = b^2$	[2] $a = b$	[3] $a = -b$
[4] $(a + b)(a - b) = 0$	[5] $a = b$ ou $a = -b$	[6] $a = 0$ ou $b = 0$

a. Quelles sont les implications du type [1] ⇒ [..], vraies pour a et b réels ?

b. Quelles sont les implications du type [..] ⇒ [1], vraies pour a et b réels ?

c. Quelles sont les propositions équivalentes pour a et b réels ?

d. Application : résoudre l'équation $(2\,x - 3)^2 = (2\,x + 9)^2$.

Cet exemple peut être traité en utilisant la représentation de la fonction carré et des fonctions polynômes de degré 2. Un débat oral, par groupes ou collectivement, permet de faire prendre conscience de la signification des termes « et » et « ou ».
Le plus important est de faire émerger les conceptions des élèves sur l'implication, terme utilisé fréquemment dans la langue naturelle (s'impliquer dans une démarche, impliquer les autres membres d'un groupe dans un travail, par exemple). Une fois assimilé, cet exemple peut devenir un exemple de référence pour les résolutions d'équations.

2. Géométrie

Le travail sur le raisonnement en géométrie, initié au collège, est stabilisé et consolidé en classe de seconde avec, en perspective, une démarche de modélisation de situations concrètes. Les élèves sortant de collège sont habitués à manipuler des énoncés contenant une implication correspondant à un raisonnement logique. La proposition réciproque d'une proposition conditionnelle a aussi été rencontrée (comme la réciproque du théorème de Pythagore) mais n'était pas un exigible du collège. La reprise de certains résultats vus au collège peut fournir l'occasion d'approfondir la notion d'implication.
Des mises au point sur la notion d'implication et des exemples sont également proposés dans le paragraphe III.

2.1. Condition nécessaire, condition suffisante

L'étude de problèmes d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle ou d'un polygone, comme le préconise le programme, est l'occasion de travailler les conditions suffisantes. En effet, si conjecturer que des points sont alignés, à l'aide d'un logiciel de géométrie par exemple, est une tâche accessible à beaucoup d'élèves, établir la preuve de cette conjecture est souvent difficile. La recherche de cette preuve suppose d'avoir « l'idée du ou des théorèmes » à appliquer. Une des aides possibles est d'apprendre aux élèves à raisonner par conditions suffisantes : que suffit-il de savoir si la conclusion à obtenir est l'alignement de trois points ? Il peut être suffisant de montrer par exemple que ces points appartiennent à une droite particulière d'un triangle, ou bien que les coordonnées de ces trois points vérifient une même équation de droite, ou bien que deux des vecteurs formés par ces trois points sont colinéaires. Par chaînage arrière (c'est-à-dire en continuant à raisonner par conditions suffisantes), on risque de rencontrer des pistes de solution qui n'aboutissent pas. Certaines méthodes seront

---

[1] Exemple issu de la brochure APMEP « pour les mathématiques vivantes en seconde »

écartées, soit parce qu'elles ne peuvent être mises en œuvre, soit en raisonnant par conditions nécessaires.

Exemple 7

> Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Les milieux des côtés [BC] et [CD] sont notés respectivement I et J.
> Que peut-on dire de la position du point d'intersection de la droite (AC) et de la droite (IJ) ?

Ici, il s'agit de montrer qu'un point est le milieu d'un segment donné. Le professeur pourra inciter l'élève à explorer les différentes méthodes qu'il connaît pour prouver qu'un point est le milieu d'un segment. Suivant le contexte, ce dernier peut chercher les coordonnées de ce point et vérifier que ce sont bien celles du milieu du segment ; il peut aussi chercher si c'est effectivement le point d'intersection d'un côté d'un triangle et d'une droite parallèle à un autre côté ou bien encore chercher à démontrer que c'est le point d'intersection de diagonales d'un parallélogramme.

Il est également possible de revoir certains des énoncés de géométrie appris au collège et d'expliciter s'ils expriment une condition nécessaire, une condition suffisante ou une propriété caractéristique.

Exemple 8

> Voici un énoncé de classe de cinquième :
> « Chaque médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire »
> Exprimer une condition suffisante pour qu'une droite partage ce triangle en deux triangles de même aire. Cette condition est–elle nécessaire ?

Pour démontrer que cette condition est nécessaire, un raisonnement par l'absurde est possible. On admet ici qu'une droite qui partage le triangle en deux triangles passe nécessairement par un sommet, une justification intuitive pouvant être acceptée.
On peut alors faire remarquer que l'on a obtenu deux propriétés qui peuvent s'énoncer comme suit.
Propriété 1
Soit ABC un triangle. Si une droite D est une médiane de ce triangle, alors elle partage ce triangle en deux triangles de même aire.
Cette propriété correspond à une condition suffisante pour partager un triangle en deux triangles de même aire.
Propriété 2
Soit ABC un triangle. Si D est une droite qui partage le triangle en deux triangles de même aire, alors D est une médiane de ce triangle.
Cette propriété correspond à une condition nécessaire pour partager un triangle en deux triangles de même aire[2].

On peut faire observer que les deux propriétés précédentes peuvent être regroupées dans un énoncé commun sous la forme suivante :
Soit ABC un triangle. Une droite D du plan est une médiane du triangle ABC si et seulement si elle le partage en deux triangles de même aire.
Il est ensuite possible de revenir sur la notion de propriété caractéristique rencontrée au collège.

[2] pour en savoir plus sur les aires,
se référer à l'article de D. Perrin (2006), Aires et volumes : découpage et recollement,
euler.acversailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/perrin/iprdp.pdf

2.2. Appartenance d'un point à une droite

Un travail analogue à celui sur les courbes peut être fait avec les questionnements suivants :
- trouver les coordonnées de points d'une droite connaissant son équation.
- reconnaître qu'un point appartient à une droite.

3. Statistiques et probabilités

3.1. Réunion et intersection

Les symboles d'union et intersection sont introduits en liaison avec les conjonctions « ou » et « et », en comparant leur sens mathématique avec leur usage dans la langue courante.
On pourra utiliser des diagrammes de Venn qui permettent de mieux visualiser les ensembles.

Exemple 9

Un club sportif propose des cours de judo et des cours de karaté. On note :
A le groupe des adhérents inscrits au judo
B le groupe des adhérents inscrits au karaté.
C le groupe des adhérents inscrits au judo et au karaté.
D le groupe des adhérents inscrits au judo ou au karaté.
E le groupe des adhérents inscrits à un seul de ces deux sports.
Farid s'est inscrit uniquement au karaté, Katia uniquement au judo, et Léo s'est inscrit aux deux cours.
De quels groupes A, B, C, D ou E chacun fait-il partie ?
Myriam est dans le groupe D. Fait-elle partie du groupe des adhérents inscrits au judo ?

3.2. Négation

Expliciter des événements contraires peut être l'occasion de nier des propositions : des exemples sont donnés dans la partie III.

III. Langage courant et langage mathématique

1. Langage courant explicite et implicite

« Si tu es sage, tu auras des bonbons ». Le sens commun laisse penser que l'enfant qui reçoit des bonbons a été sage. Il est important de montrer sur un exemple ou deux que cette logique tient compte du contexte, du ton employé par l'interlocuteur et de la sémantique.

Exemple 10

Paroles d'un père à son enfant :
(1) « Si la température dépasse 25° alors tu pourras aller te baigner ». L'enfant aura-t-il la permission de se baigner s'il fait 20° ? s'il fait 28° ?
(2) « Tu pourras aller te baigner si la température dépasse 25° ».
Est-ce que les phrases (1) et (2) ont la même signification dans le langage courant ?

Suivant la logique mathématique, il est clair que l'enfant pourra se baigner s'il fait 28° et qu'on ne sait pas ce que son père décidera s'il fait 20°. Cependant en langage courant le « si » de la phrase (1) signifie en général « seulement si » et dans la seconde phrase (2) il peut signifier « si et seulement si ».
D'un point de vue mathématique, les phrases (1) et (2) sont équivalentes mais dans le langage courant, l'ordre des propositions a une influence sur la compréhension que l'on a de la phrase. D'autres éléments interviennent aussi, comme l'intonation et le degré de crédibilité de la personne qui parle, ou encore le principe du « maximum d'information » selon lequel celui qui parle est supposé expliciter clairement sa pensée.

2. Implication mathématique

Deux grands types d'implication sont mis en œuvre :

- les implications correspondant à une inclusion (ou de type ensembliste) ;
- les implications correspondant à un raisonnement logique (faisceau d'informations permettant d'en déduire une conclusion).

Pour ce deuxième type, il est intéressant de faire un parallèle entre les situations issues de la vie courante et le transfert vers les situations mathématiques.

Exemple 11[3]

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.
1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.
Est-il cosmonaute américain?
2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.
Est-il cosmonaute américain?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.
Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.
Porte-t-il une chemise rouge ?

L'énoncé qui permet le raisonnement peut s'écrire de manière analogue à un théorème tel que l'apprend un élève de collège : « Soit un cosmonaute. S'il est américain, alors il porte une chemise rouge. ».

Les questions 2 et 3 sont difficiles car la bonne réponse « on ne peut pas savoir » est peu rencontrée dans un cours de mathématiques, sauf dans les exercices de « vrai- faux ». Ce type de question revient à se poser la question de la vérité de la proposition réciproque d'un énoncé.

Cet exercice peut être repris avec des énoncés de géométrie de collège comme par exemple dans l'exemple suivant où l'énoncé proposé est : «Soit un quadrilatère ABCD. Si ABCD est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur ».

Exemple 12

1. Les diagonales d'un quadrilatère mesurent 3 cm et 5 cm. Est-ce un rectangle ?
2. On sait que ABCD est un parallélogramme. Est-ce un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur ?
3. Un quadrilatère a des diagonales de même longueur. Est-ce un rectangle ?
4. Un quadrilatère a trois angles droits. A-t-il des diagonales de même longueur ?

Dans le langage courant, les locutions « il faut », « il suffit » ont souvent une utilisation différente de celle qu'elles ont en mathématiques et les connecteurs « donc », « or » ne sont pas utilisés conformément à la logique mathématique. Un travail en coordination avec l'enseignant de lettres peut s'avérer tout à fait approprié. Dans le cadre de ce travail, il peut être aussi intéressant de comparer l'argumentation en français où il est demandé d'apporter et de développer un certain nombre d'arguments de manière parallèle avant de conclure et le raisonnement déductif en mathématiques où chaque conclusion intermédiaire est réutilisée, si elle n'est pas la conclusion finale.

[3] Exemple issu de l'article « les cosmonautes » de Marc Legrand, Petit *x* n°1

3. « ou, et, un »

Certains mots tels que « et », « ou », « un » n'ont pas toujours la même signification dans le langage courant et dans leur utilisation en mathématique. Il est important d'attirer l'attention des élèves sur les similitudes et les différences de leur emploi dans ces deux domaines.

3.1. « ou, et »

Exemple 13

Sur le menu du restaurant scolaire il est écrit : fromage ou yaourt. Est-il permis de prendre une portion de fromage et un yaourt ?

Il est clair qu'ici le « ou » est exclusif alors que le « ou » mathématique est par défaut inclusif.
Dans la résolution des équations-produit, on écrit :

« $A(x) \times B(x) = 0$ si et seulement si $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ».

Cela peut être une occasion de travailler le sens du « ou » mathématique si on propose des situations dans lesquelles les deux facteurs sont simultanément nuls.

Le lien entre les connecteurs « et » et « ou » nécessite aussi d'être explicité.

Exemple 14

Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse participeront au spectacle de fin d'année.
1. Sophie suit les deux options, participera-t-elle au spectacle ?
2. Les deux phrases suivantes : « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre <u>ou</u> l'option danse » et « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre <u>et</u> tous ceux qui suivent l'option danse » désignent-elles les mêmes élèves ?

La première question met en évidence que l'intersection de deux ensembles est incluse dans leur réunion.
La seconde question montre une utilisation du mot « et » en langue naturelle qui correspond à une réunion.
Une analogie peut être faite avec l'emploi des mots « et » et « ou » dans la phrase suivante :
« $A(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ **ou** $x = 2$
donc les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sont 1 **et** 2. ».

3.2. « un »

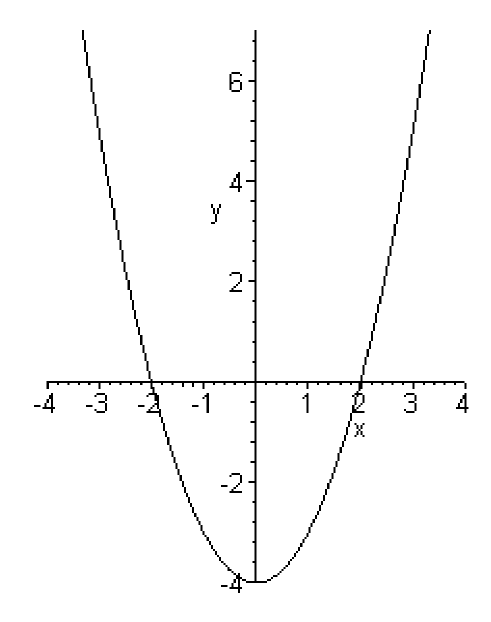
Le mot « un » a plusieurs significations en langage courant comme en mathématiques :

- le nombre qui sous-entend « exactement un » comme dans la phrase « le prix d'un sandwich est deux euros » qui veut dire que « pour deux euros, on n'a effectivement qu'un seul sandwich » ;
- l'article indéfini qui signifie « au moins un » comme dans la phrase« pour la sortie de demain, emporte un sandwich » : il est tout à fait possible d'en emporter plusieurs ;
- l'article indéfini qui signifie « tout » comme dans la phrase « un sandwich est composé de pain et d'autres ingrédients »
- « un parmi d'autres » comme dans la phrase « je cherche un sandwich sans mayonnaise ».

En mathématiques, la bonne interprétation du mot « un » est indispensable pour pouvoir interpréter correctement les énoncés.
« Un parallélogramme a ses diagonales qui se coupent en leur milieu » : ici, un est l'article indéfini qui signifie « tout ». Par contre, dans la phrase « ABCD est un parallélogramme », le mot « un » a le sens de « un parmi d'autres ».

Exemple 15

La courbe ci-contre représente la fonction *f* définie sur R, $f : x \mapsto x^2 - 4$.
Existe-t-il un nombre qui a pour image 3 par *f* ?



Les élèves qui interprètent « un » comme « exactement un » répondent FAUX puisqu'il y a deux nombres qui ont pour image 3 par *f*. Il convient donc d'attirer leur attention sur le fait qu'en l'absence de précision « un »peut signifier « au moins un » dans ce type d'énoncé.

4. Négation

Comme cela a été dit dans la partie II, expliciter des événements contraires peut être l'occasion de nier des propositions : par exemple, écrire l'événement contraire de « tous les murs de la pièce sont blancs » ou encore « le temps est chaud et humide ».
Ce type d'exercice, nouveau et délicat, pourra faire l'objet d'un entraînement tout au long de l'année.

IV. Pour conclure

Il est exclu de consacrer un chapitre à ces notions de logique et raisonnement. Il s'agit de procéder par petites touches présentées sous forme de bilan, de synthèse ou de généralisation.
La langue naturelle et le langage symbolique doivent coexister tout au long de l'année, l'apprentissage du langage symbolique devant être étalé sur le cycle terminal.
Il s'agit de profiter des questions, des erreurs des élèves ou des situations évoquées pour faire émerger et approfondir les notions de logique. L'objectif est que l'élève dispose d'exemples de référence à partir d'objets connus, qu'il pourra réutiliser dans d'autres domaines.
Les notions de condition nécessaire et condition suffisante sont difficiles pour les élèves de seconde ; il s'agit dans un premier temps de revoir des propriétés ou théorèmes étudiés au collège afin de travailler les notions de condition nécessaire et condition suffisante dans un contexte mathématique connu.
Les notions de réunion, intersection et inclusion ont été rencontrées lors du travail sur les intervalles. Ici, il s'agit de faire le lien entre «et », « ou » et les symboles $\cap$ et $\cup$. Il faut rappeler que dans le programme de seconde pour la rentrée 2009, ***le travail sur les intervalles***, comme le travail sur les notations et le raisonnement, ne fait pas l'objet d'un chapitre et ***ne doit pas être le thème d'un cours spécifique***.

1. La question des traces écrites

Comme le rappelle le document ressource sur le raisonnement et la démonstration au collège (site www.eduscol.education.fr), une part non négligeable des élèves arrivant en seconde sont aptes à conduire des raisonnements sans pour autant les produire par écrit sous une forme aboutie. L'objectif du travail fait sur la logique et le raisonnement au cours de l'année de seconde est de les conduire peu à peu à mieux comprendre la logique mathématique et à s'approprier notations et vocabulaire. L'introduction du programme le précise : le raisonnement et le langage mathématique doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. Mais quelle trace écrite peut alors être notée par les élèves ? Une des pistes possibles prend appui sur le fait que certains exemples traités au cours de l'année peuvent servir d'exemples de référence. On peut donc prévoir une partie du cahier ou du classeur dans laquelle l'élève note ce qu'il a appris en traitant tel ou tel exercice. Cet écrit peut être à la charge de l'élève seul (ce peut être un travail donné à la maison) ou bien pris en charge collectivement. La mise en forme peut alors être faite par l'enseignant à partir des propositions des élèves. Rappelons qu'un cours sur la logique est bien entendu exclu.
La trace écrite est aussi celle que l'élève produit lorsqu'il rédige un travail de recherche : réorganiser ses idées, essayer de les mettre en forme en choisissant des notations qui lui permettent d'être précis. Ce type d'écrit ne peut en aucun cas être soumis à un protocole rigide et doit être varié (plan de la solution, rédaction d'une partie d'un travail cherché en groupes, rédaction d'une démonstration cherchée collectivement) afin de permettre à tous de s'engager dans la restitution.
Il y a des différences entre ce qui est dit et ce qui est écrit. Si l'enseignant annonce toujours ce qu'il est en train de faire (comme par exemple, résoudre une équation dans l'ensemble des réels ou résoudre une inéquation par lecture graphique), il est fréquent de ne pas trouver de telles indications au tableau et il est rare de les trouver dans les notes des élèves. Cela ne pose pas de problème lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. En revanche, il est important de faire prendre conscience aux élèves de la nécessité et de l'intérêt de certaines explicitations, et de les amener progressivement à préciser leur démarche lorsqu'ils rédigent la solution d'un problème. Toutefois cette exigence, qui n'est pas une fin en soi, ne peut être prise en compte par les élèves que si on leur a laissé le temps de comprendre les concepts et de chercher : ainsi, l'écriture formalisée d'une démonstration ne prend du sens que lorsque les élèves ont bien compris les différents statuts d'un énoncé, la notion d'implication et qu'ils ont trouvé une piste pour la résolution.

2. Pistes pour l'évaluation

Les compétences évoluées « raisonner, démontrer, élaborer une démarche » ou « développer une démarche connue, mettre en forme un raisonnement » sont des compétences évaluées au baccalauréat dans toutes les séries. Il convient donc d'évaluer progressivement dès la classe de seconde les apprentissages sur la logique et le raisonnement. Mais comment y répondre ?
L'évaluation peut être faite à l'oral. Etre capable de reformuler de manière mathématique un énoncé est une compétence qu'il convient de faire acquérir dans le dialogue et le débat.
A l'écrit, de la même manière qu'au collège, deux principes essentiels doivent être retenus :

- distinguer le fond de la forme
- valoriser des écrits intermédiaires (cf. document ressource collège).

Dans la mesure où on rend les élèves attentifs à la nécessité de préciser ce dont ils parlent, il semble essentiel de valoriser les efforts de clarté et d'explicitation. On peut envisager une valorisation sous forme de bonus.



éduscol

Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe de première générale et technologique

Statistiques et probabilités

juin 2011

SOMMAIRE

I. INTRODUCTION

La place des probabilités et des statistiques dans l'enseignement des mathématiques en collège et en lycée s'est considérablement accrue depuis ces dernières années. Pour les élèves entrant en classe de première, l'apprentissage des probabilités débute désormais dès la classe de troisième.

Au collège, l'objectif de cet enseignement est de développer une réflexion sur l'aléatoire en général et de sensibiliser les élèves au fait que les situations aléatoires peuvent faire l'objet d'un traitement mathématique. Un vocabulaire spécifique est introduit et quelques règles du calcul des probabilités sont mises en place.

La Seconde est l'occasion pour l'élève d'approfondir la formalisation de ces notions en dégageant notamment la notion de modèle probabiliste, et d'être sensibilisé, à travers des situations de prise de décision ou d'estimation d'une proportion, aux premiers éléments de statistique inférentielle comme la notion d'intervalle de fluctuation et celle d'intervalle de confiance, introduites sous des conditions de validité qui les rendent rapidement opérationnelles.

Avec la notion de variable aléatoire et la découverte de la loi binomiale, le programme de Première fournit les outils mathématiques qui permettent, en prenant appui sur la réflexion initiée en Seconde autour de la prise de décision, de construire un intervalle de fluctuation et d'établir une démarche de prise de décision valables en toute généralité pour une proportion et une taille d'échantillon quelconques. Ce thème se prête en particulier à la mise en œuvre d'algorithmes et de raisonnements logiques et, au-delà, à une adaptation de ces raisonnements au domaine de l'aléatoire et de l'incertain.

En Terminale, la problématique de prise de décision sera travaillée à nouveau, et la réflexion initiée en Seconde sur l'estimation sera approfondie avec l'introduction d'outils mathématiques supplémentaires.

Dans ce document ressource, le professeur trouvera des compléments théoriques et un ensemble de situations développées dans le cadre du programme officiel. L'accent est surtout mis sur les notions nouvelles par rapport aux précédents programmes de Première : répétition d'expériences identiques et indépendantes, loi géométrique tronquée, loi binomiale, échantillonnage et prise de décision avec la loi binomiale.

Les exemples d'application ont été choisis pour montrer la variété, la richesse et l'actualité des applications possibles des probabilités et de la statistique. Ils ne prétendent pas à l'exhaustivité et ne sont pas conçus comme des activités pédagogiques « clé en main », tout comme le plan adopté pour les exposer ne se veut pas une progression pédagogique. Ces situations visent plutôt à ouvrir des pistes de travail susceptibles d'être exploitées par le professeur ; c'est pourquoi elles sont traitées de façon suffisamment détaillée afin de permettre au professeur de s'en inspirer pour élaborer, à partir de la connaissance de sa classe et de sa pratique professionnelle, des activités pédagogiques ajustées au niveau de ses élèves.

Enfin les points présentés dans les annexes du document ne sont pas des attendus du programme. Ils doivent être considérés comme des compléments d'information à l'attention du professeur sur les notions introduites. Ils permettent de mieux situer le cadre mathématique plus général dans lequel s'inscrivent les notions au programme.

II. STATISTIQUE DESCRIPTIVE, ANALYSE DE DONNEES

L'étude et la comparaison de séries statistiques menées en classe de seconde se poursuivent avec la mise en place de nouveaux outils. Dans un premier temps, les caractéristiques de dispersion (variance, écart-type) sont déterminées à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur. Afin d'utiliser de façon appropriée les deux couples d'indicateurs usuels (moyenne/écart-type et médiane/écart interquartile) qui permettent de résumer une série statistique, il semble utile de rappeler le lien entre ces couples (position/dispersion) et un problème de minimisation (voir annexe 1). Il convient aussi de rappeler que l'utilisateur d'un outil statistique doit prendre en compte la situation réelle et les objectifs visés pour effectuer le choix des indicateurs de façon pertinente.

Les exemples de séries statistiques amènent à utiliser l'un des deux couples à notre disposition. Ils suscitent une réflexion sur le choix d'un résumé statistique. Dans les exemples proposés en classe, il est important de faire remarquer que deux séries de même écart-type (et de même moyenne et médiane) peuvent avoir une distribution très différente. C'est alors l'occasion de rappeler l'intérêt d'un graphique, qui peut être plus « parlant » qu'un simple résumé numérique.

Il n'existe pas de règle (au sens mathématique) qui indiquerait quel type d'indicateur statistique utiliser par rapport à une situation donnée. Le choix des indicateurs dépend de ce qu'on veut en faire et de la réalité de la situation. On peut juste proposer quelques remarques qui conduisent à privilégier tel couple plus que tel autre. Le couple (médiane, écart interquartile), sans apporter les mêmes renseignements que le couple (moyenne, écart-type), est peu sensible aux valeurs extrêmes. Dans de nombreux domaines il est privilégié et souvent associé à une représentation graphique en boîte à moustaches. De manière générale, la moyenne arithmétique est peu significative quand l'influence des valeurs extrêmes est trop forte. Quant à la médiane, elle ne se prête pas aux calculs algébriques, c'est pourquoi, dans le cas où la série statistique est formée de divers sous-ensembles homogènes, on lui préfère la moyenne.

Le diagramme en boîte (ou boîte à moustaches) est une représentation graphique qui permet d'avoir une bonne vision d'une série statistique. En effet, beaucoup d'informations sont disponibles sur ce diagramme (médiane, écart interquartile et valeurs extrêmes), ce qui en fait un très bon outil pour comparer deux séries statistiques. Il faut noter qu'il n'existe pas de définition commune (au sens mathématiques du terme) du diagramme en boîte, mais il semble assez répandu d'utiliser les conventions suivantes :

- la « boîte » est un rectangle limité par le premier et le troisième quartile où figure la médiane ;
- les « moustaches » en revanche peuvent s'achever aux valeurs extrêmes (le minimum et le maximum de la série) ou aux premier et neuvième déciles[1]. D'autres conventions sont quelquefois utilisées.

On obtient alors un diagramme comme suit :

$x_{\min}$ Q_1 Me Q_3 $x_{\max}$

25 % 50 % 75 %

Au-delà de la réalisation d'un diagramme en boîte, il est surtout important de savoir interpréter et d'utiliser ces diagrammes pour des comparaisons pertinentes de deux séries statistiques.

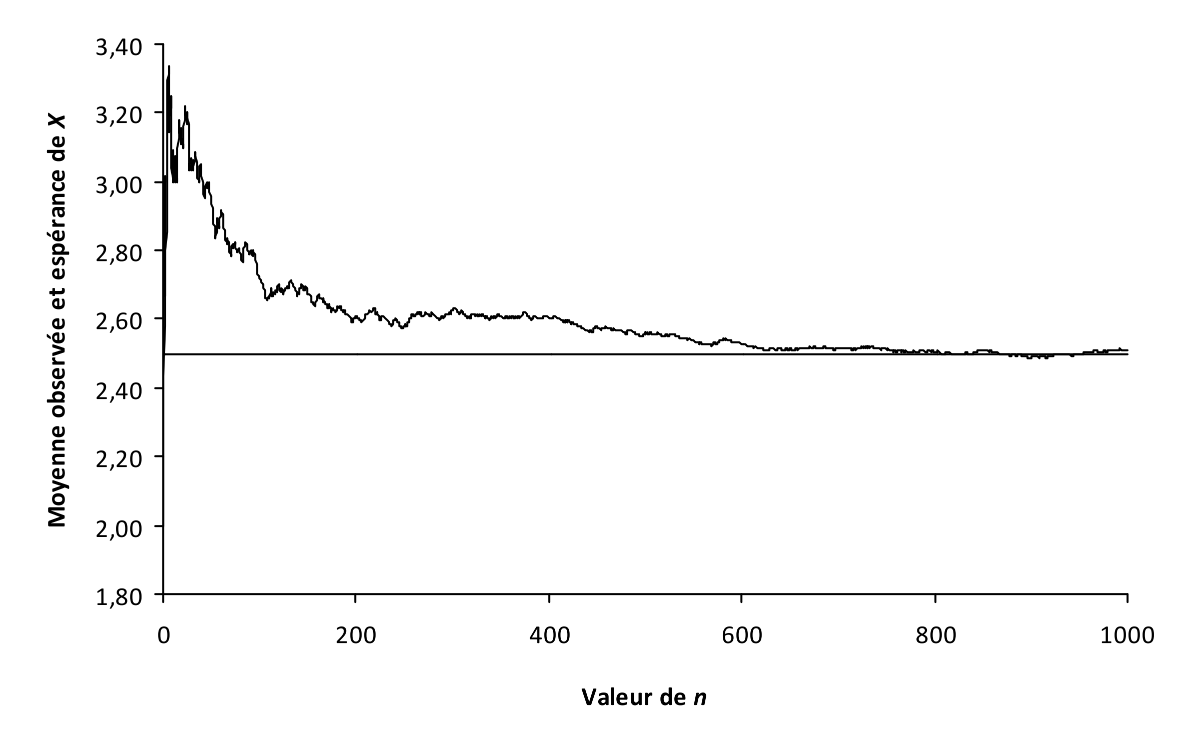
[1] Définition du décile D_k : pour *k* de l à 9, le k^e décile noté D_k est la plus petite valeur d'une série statistique telle qu'au moins ($k \times 10$) % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à D_k .

III. VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

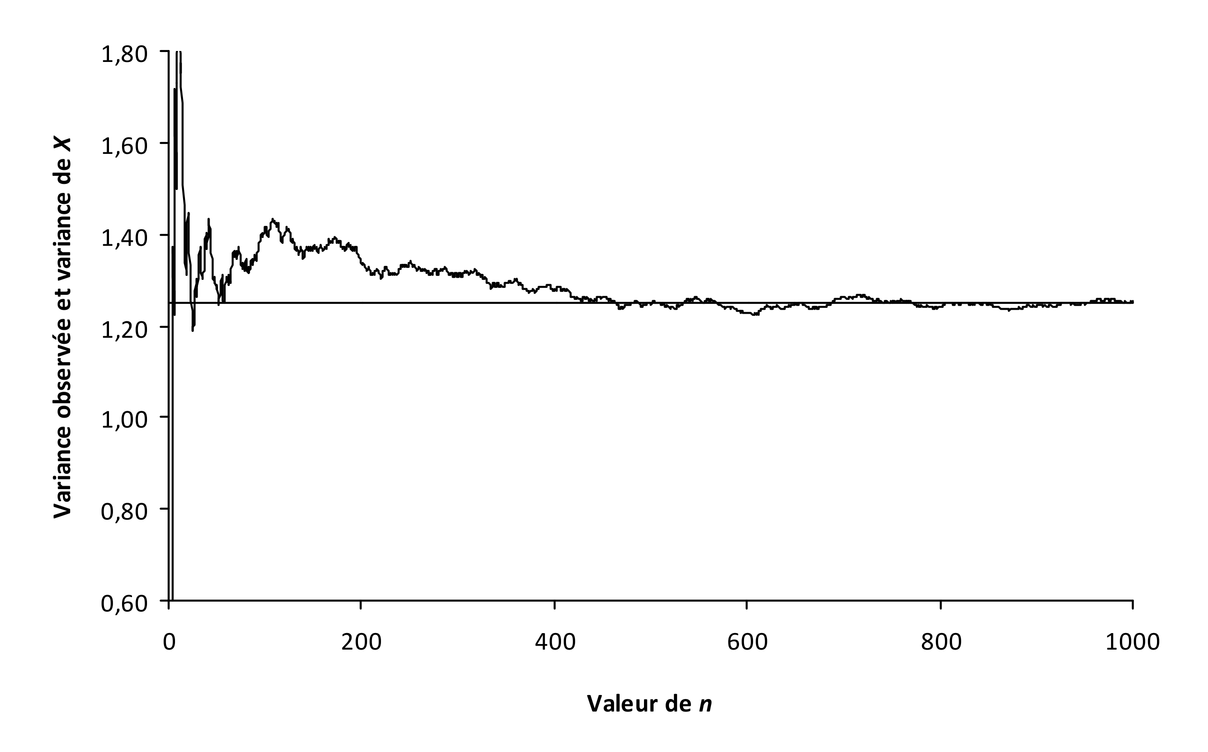
Afin d'*interpréter l'espérance comme la valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions*, on considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé supposé équilibré à six faces et à noter le numéro observé. On considère ensuite la variable aléatoire discrète notée *X* qui prend la valeur 1 si on observe 1, la valeur 2 si on observe 2, 3 ou 4 et enfin la valeur 4 si on observe 5 ou 6. Son espérance est

$E(X) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 4 \times P(X = 4) = 1 \times 1/6 + 2 \times (1/6 + 1/6 + 1/6) + 4 \times (1/6 + 1/6) = 15/6$,
soit $E(X) = 2{,}5$.

À l'aide d'une simulation, on répète un grand nombre de fois cette expérience aléatoire à l'identique et on peut ainsi observer un grand nombre de réalisations de la variable aléatoire *X*. Le graphique suivant montre l'évolution de la moyenne observée en fonction du nombre *n* de répétitions.



On remarque que les moyennes observées se stabilisent autour de l'espérance mathématique de la variable aléatoire *X*. On peut aussi représenter l'évolution de la variance des observations et remarquer que lorsque le nombre de lancers augmente, la variance observée se stabilise vers la variance de la variable aléatoire *X* qui vaut 1,25.



Ces observations constituent une approche heuristique de la loi des grands nombres[2]. Celle-ci permet de justifier le phénomène de stabilisation des fréquences autour de la probabilité d'un événement.

Plus généralement, on se place dans un modèle probabiliste ; on considère un événement *A* de probabilité *P*(*A*) et la variable aléatoire *X* qui prend la valeur 1 si on observe *A* et 0 sinon. La variable aléatoire *X* suit la loi de Bernoulli de paramètre *p* qui est égale à *P*(*A*). Une simulation permet d'observer le phénomène de stabilisation de la suite des fréquences[3] observées f_n de réalisation de l'événement *A*, lors de *n* répétitions de la même expérience aléatoire, vers l'espérance de *X* qui est égale à *P*(*A*).

La simulation qui a donné le graphique suivant a été réalisée pour un événement *A* de probabilité *p*=1/3.

[2] Un énoncé et une preuve de la loi faible des grands nombres sont proposés dans l'annexe 2.

[3] Ces fréquences peuvent être interprétées comme des moyennes, c'est-à-dire la moyenne des valeurs observées.



Ainsi le phénomène de stabilisation (expression du registre du langage courant pour dire qu'une suite de réels converge) est l'illustration de la loi des grands nombres et ce « phénomène » n'est justifiable que lorsque le modèle probabiliste est donné.

IV. UTILISATION DES ARBRES PONDERES

A – EXEMPLE D'EXPERIENCE ALEATOIRE A DEUX EPREUVES

On se donne :

- une **urne** contenant quatre boules indistinguables au toucher dont trois boules bleues, notées b_1, b_2 et b_3, portant respectivement les numéros 1, 2 et 3, et une boule rouge unique, notée *r*.
- un **jeu de six cartes** identiques portant chacune un chiffre en couleur : une carte avec un chiffre "1" en vert, une carte avec un chiffre "2" en rouge, une carte avec un chiffre "2" en bleu, une carte avec un chiffre "2" en vert, une carte avec un chiffre "3" en rouge, une carte avec un chiffre "3" en bleu.

On considère l'expérience aléatoire suivante : *on prélève de façon équiprobable une boule dans l'urne puis une carte du jeu. On note, dans l'ordre, la couleur de la boule extraite et le numéro inscrit sur la carte.*

On rappelle qu'un modèle associé à cette expérience aléatoire est défini par la donnée :

- de l'ensemble Ω de toutes les issues possibles de l'expérience ;
- d'une probabilité *P* déterminée par ses valeurs pour chacun des événements élémentaires définis par ces issues.

La liste de toutes les issues possibles peut être trouvée en utilisant l'arbre des possibles ci-dessous. Les issues possibles pour cette expérience aléatoires sont les couples (R,1) ; (R,2) ; (R,3) ; (B,1) ; (B,2) ; (B,3) où B désigne la couleur « Bleu » et R la couleur « Rouge ».

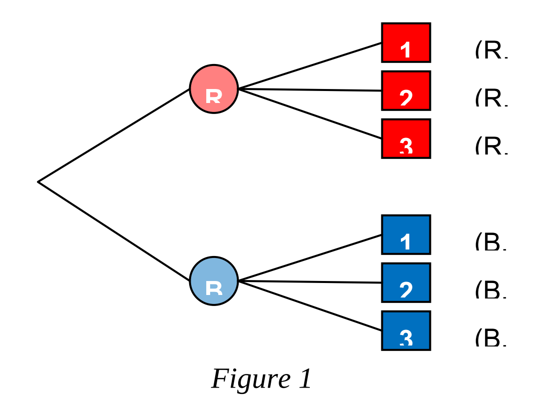


Figure 1

Une fois les issues toutes identifiées, il s'agit de trouver la probabilité des événements élémentaires déterminés par chacune des issues. Il est clair que l'équiprobabilité n'est pas une réponse possible. En effet, on a des raisons de penser que la couleur « Bleu » sera plus probable que la couleur « Rouge » et que le chiffre “2” a plus de chances de sortir que les autres ; en conséquence, l'issue (B,2) a plus de chances de sortir que l'issue (R,1).

Pour affecter une probabilité à chacune des issues, nous allons considérer un autre modèle (qualifié par la suite de **modèle intermédiaire**) qui prend en compte, pour la boule extraite, sa couleur et aussi son numéro éventuel, et pour la carte, le chiffre mentionné mais aussi sa couleur. On peut recenser tous les résultats par l'arbre représentant les issues possibles ci-après.

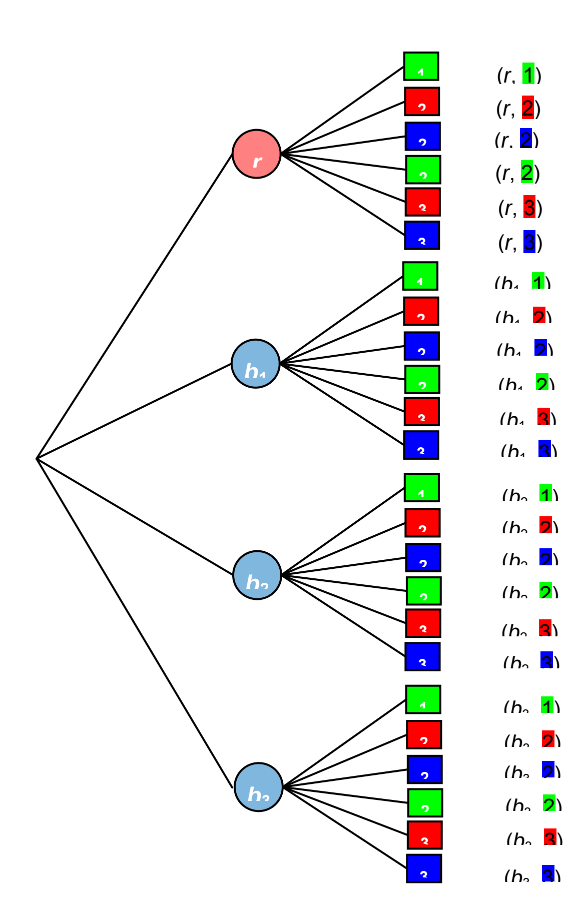


Figure 2

On obtient 4×6 résultats possibles. On peut les noter de la façon suivante : $(r,1)$; $(r,2)$; $(r,2)$; $(r,2)$; $(r,3)$; $(r,3)$; $(b_1,1)$; $(b_1,2)$; $(b_1,2)$; $(b_1,2)$; $(b_1,3)$; $(b_1,3)$; $(b_2,1)$; $(b_2,2)$; $(b_2,2)$; $(b_2,2)$; $(b_2,3)$; $(b_2,3)$; $(b_3,1)$; $(b_3,2)$; $(b_3,2)$; $(b_3,2)$; $(b_3,3)$; $(b_3,3)$.

Chaque branche de l'arbre représente une issue, et compte tenu des conditions du tirage équiprobable de la boule, puis du tirage équiprobable de la carte, il n'y a pas de raison de penser qu'une branche de l'arbre ait plus de chances d'être parcourue qu'une autre. On peut donc considérer que chacune des issues précédentes a la même probabilité, égale à $\frac{1}{24}$, d'être réalisée.

Dans le modèle intermédiaire, par exemple, l'événement « *Tirer une boule bleue puis une carte portant le chiffre "2"* » se représente mathématiquement par le sous-ensemble des issues {$(b_1,2)$; $(b_1,2)$; $(b_1,2)$; $(b_2,2)$; $(b_2,2)$; $(b_2,2)$; $(b_3,2)$; $(b_3,2)$; $(b_3,2)$}. Par suite, la probabilité de cet événement sera égale à $\frac{9}{24}$.
Revenant alors au premier modèle où l'événement « *Tirer une boule bleue puis une carte portant le chiffre "2"* » se représente mathématiquement par l'événement élémentaire {(B,2)}, on prendra $\frac{9}{24}$ pour la probabilité d'obtenir l'issue (B,2). On peut faire de même pour les cinq autres issues : (R,1) ; (R,3) ; (B,1) ; (B,2) ; (B,3).

Ce qui conduit au tableau ci-dessous donnant les probabilités affectées à chaque issue du premier modèle :

ω	(R,1)	(R,2)	(R,3)	(B,1)	(B,2)	(B,3)
P({ω})	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{6}{24}$

B – JUSTIFICATION DE L'ARBRE DES PROBABILITES

Si on revient à l'arbre (cf. figure 2) utilisé pour trouver toutes les issues possibles du modèle intermédiaire, on constate que cet arbre est très fastidieux à dessiner. Dans la mesure où on ne s'intéresse qu'à la couleur de la boule et au chiffre inscrit sur la carte, on peut alléger sa construction, moyennant quelques conventions de lecture, pour retrouver l'arbre (cf. figure 1) des issues possibles du premier modèle pondéré par les probabilités et justifier la règle des produits de la façon suivante :

Étape 1

Partant de l'arbre de la figure 2, dans la mesure où on ne s'intéresse qu'à la couleur de la boule (et non à son numéro éventuel) et qu'au chiffre inscrit sur la carte (et non à sa couleur) on peut convenir de représenter chaque branche de l'arbre de la figure 2 aboutissant à la même couleur de boule, par une seule branche comprenant autant de traits parallèles qu'il y a de boules physiques de cette même couleur. On procède de même en représentant chaque branche de l'arbre de la figure 2 aboutissant à un même chiffre de carte, par une seule branche comprenant autant de traits parallèles qu'il y a de cartes physiques avec ce même chiffre inscrit avec des couleurs différentes. On obtient ainsi l'arbre plus simple de la figure 3 ci-après qui contient cependant autant de branches que celui de la figure 2 tout se rapprochant de l'allure de l'arbre de la figure 1.

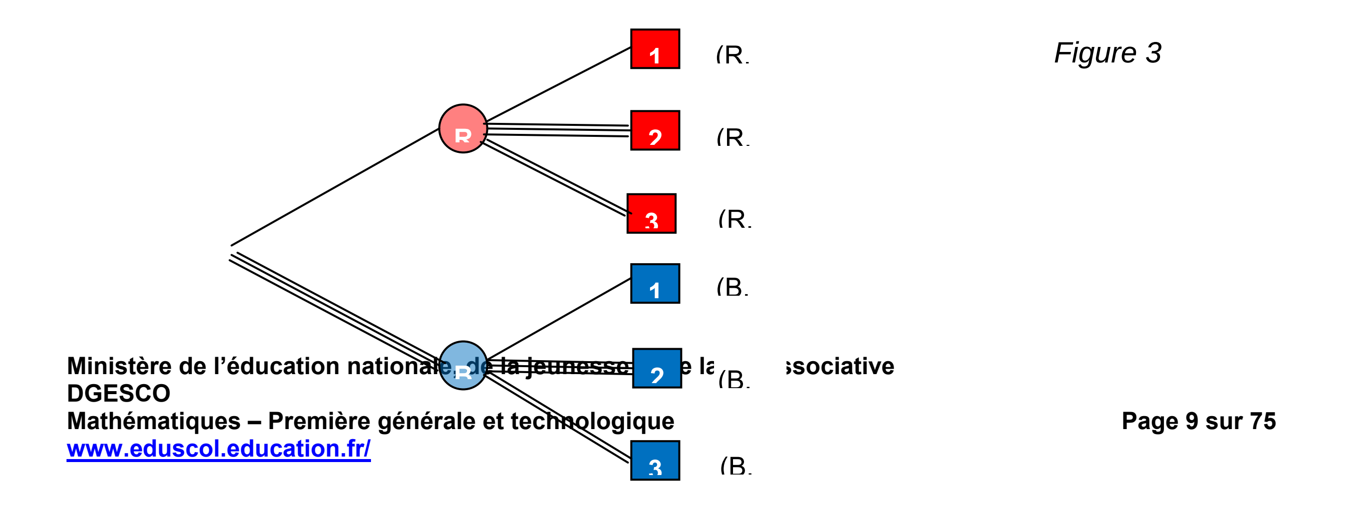


Figure 3

Étape 2

On peut alors simplifier davantage l'arbre de la figure 3, en représentant chaque branche par un seul trait pondéré par le nombre de traits composant la branche correspondante dans l'arbre de la figure 3. On obtient alors l'arbre pondéré de la figure 4 qui suit :

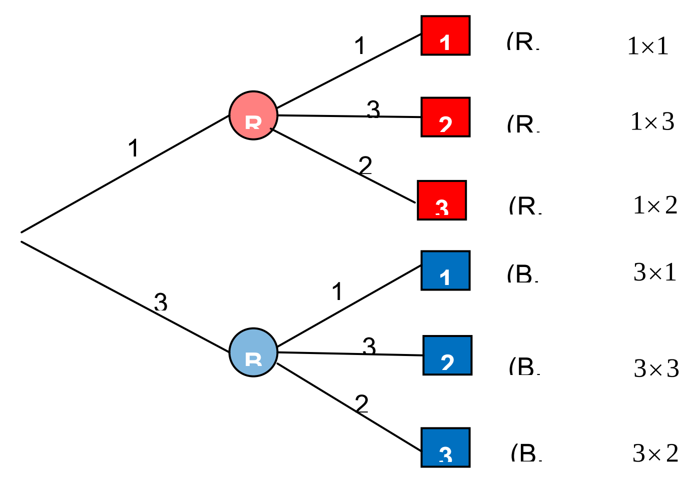


Figure 4

On remarque alors que le produit des nombres rencontrés le long d'un chemin représentant une issue du premier modèle est égal au nombre de chemins de l'arbre de la figure 2 qui réalisent l'événement correspondant dans le modèle intermédiaire. Ainsi, pour l'événement « *Tirer une boule bleue puis une carte portant le chiffre 2* », c'est-à-dire (B, 2), le produit 3×3 est égal au nombre de chemins dans le modèle intermédiaire, soit 9.

Étape 3

Cette étape consiste à pondérer chaque branche de l'arbre, non plus avec le nombre de traits composant la branche correspondante dans l'arbre de la figure 3, mais avec le quotient de ce nombre par le nombre total de branches d'un même niveau. On obtient ainsi l'arbre pondéré suivant :

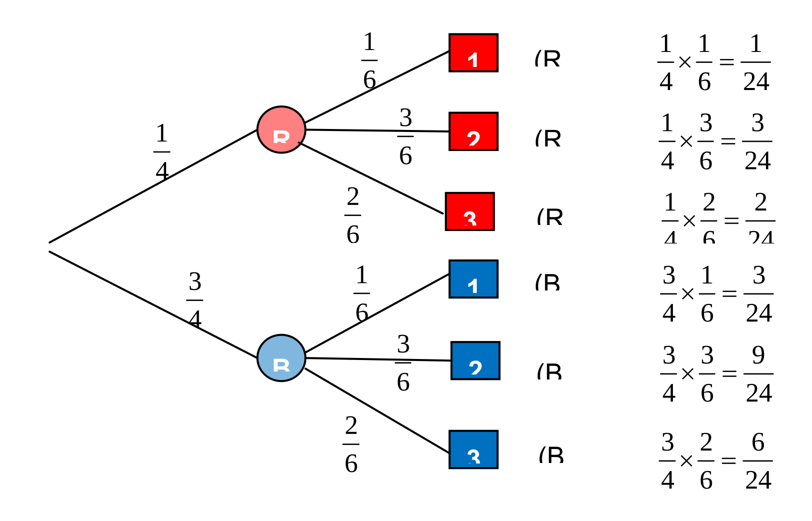


Figure 5

On remarque alors que le produit des quotients affectés aux diverses branches d'un chemin aboutissant à une issue donnée du premier modèle, par exemple pour (B,2) le produit $\frac{3}{4}\times\frac{3}{6}$, est égal à la probabilité, dans cet exemple $\frac{9}{24}$, que cette issue se réalise. Cette remarque est valable pour toutes les branches de l'arbre. Au final, on peut constater que l'arbre de la figure 5 n'est rien d'autre que l'arbre de probabilités associé à l'arbre des possibles de la figure 1.

✘ C – GENERALISATION ET EXPLOITATION EN PREMIERE

La méthode utilisée plus haut peut se généraliser aisément au cas de la succession de *n* expériences aléatoires. Considérons *n* expériences aléatoires, E_1, E_2, E_3, …, E_n, comportant chacune un nombre fini d'issues (non nécessairement le même pour chaque expérience). Considérons l'expérience aléatoire *E* obtenue par la réalisation successive (dans cet ordre) de ces *n* expériences aléatoires. On peut alors dessiner l'arbre de probabilités de l'expérience *E* dont chaque chemin représente une issue[4] (indiquée en bout de branche) de l'expérience *E*. La probabilité qu'une issue se réalise est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin représentant cette issue.

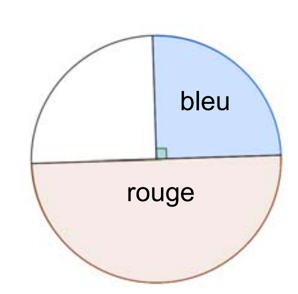
En classe de Troisième et de Seconde, on s'est intéressé à la succession de deux expériences (éventuellement trois), pas nécessairement identiques. Ces activités ont permis à l'élève de se familiariser avec les arbres de probabilités construits intégralement.

En Première, on s'intéresse surtout à la répétition d'une même expérience aléatoire, un certain nombre *n* de fois. Contrairement aux classes précédentes, ce nombre *n* peut alors être éventuellement grand, notamment lorsqu'il s'agit de réinvestir les arbres de probabilités dans le cadre de la loi binomiale.

Un exemple d'activité sur la répétition d'une même expérience aléatoire à trois issues est proposé ci-dessous. Il permettra à l'élève de réinvestir ses connaissances acquises dans les classes précédentes et de le préparer à manipuler des arbres de probabilités, non nécessairement construits intégralement du fait du grand nombre de répétitions de la même expérience aléatoire, lorsqu'il abordera l'étude des propriétés des coefficients binomiaux.

La justification proposée précédemment pour les règles de calcul sur les arbres ne fonctionne que pour des valeurs rationnelles des probabilités et l'on admet que ces règles restent valables pour des valeurs réelles quelconques.

<u>Exemple : répétition d'une expérience à trois issues</u>



On fait tourner la roue de loterie présentée ci-contre : on obtient la couleur « Rouge » avec la probabilité 0,5, la couleur « Bleu » avec la probabilité 0,25 et la couleur « Blanc » avec la probabilité 0,25. Ensuite, on fait tourner une deuxième fois, puis une troisième fois la même roue dans des conditions identiques, et on note les couleurs obtenues.

1°) Un joueur est gagnant lorsqu'il obtient dans cet ordre les couleurs « Bleu », « Blanc », « Rouge ». Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?

2°) Quelle est la probabilité que le joueur obtienne dans le désordre les couleurs « Bleu », « Blanc », « Rouge » ?

La réalisation d'un arbre pondéré permet de visualiser les calculs de probabilité demandés.

Pour la première question, il suffit de considérer le seul chemin Bleu-Blanc-Rouge qui a donc pour probabilité 0,25 × 0,25 × 0,5.

---

[4] Une issue de l'expérience *E* est une suite $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_n)$ où ω_k est une issue de l'expérience E_k.

Pour la deuxième question, il reste à considérer les 5 chemins qui comportent les trois couleurs dans le désordre. La probabilité de chaque chemin est $0,25 \times 0,25 \times 0,5$ donc la réponse est $5 \times 0,25 \times 0,25 \times 0,5$.

À travers cette activité on rencontre ainsi des chemins de même probabilité, situation qui sera reprise au moment de l'introduction de la loi binomiale.

V. LOI GEOMETRIQUE TRONQUEE

Les situations de répétition d'une même expérience aléatoire, reproduite dans des conditions identiques constituent un élément fort du programme de Première.

L'introduction de la *loi géométrique tronquée* présente de nombreux avantages :

- travailler des répétitions d'une expérience de Bernoulli ;
- envisager ces répétitions sous l'angle algorithmique ;
- présenter une situation d'arbre pour lequel tous les chemins n'ont pas la même longueur ;
- exploiter hors de l'analyse les propriétés des suites géométriques ;
- exploiter hors du cadre habituel des résultats relatifs à la dérivation ;
- travailler les variables aléatoires.

✘ A – ÉTUDE DE LA LOI GEOMETRIQUE TRONQUEE

❖ Approche de la loi géométrique tronquée

La probabilité qu'un atome se désintègre par unité de temps est 0,07. On décide d'observer cette désintégration en limitant le temps d'attente à 100 unités de temps, et l'on convient de noter 0 lorsque, après 100 unités de temps, l'atome n'est pas encore désintégré. On distingue ainsi cette situation de la désintégration lors de la 100e unité de temps.

On peut concevoir un algorithme qui affiche une série de 200 temps d'attente avant la désintégration, ainsi que le temps moyen d'attente calculé à partir de ces 200 valeurs.

On constate que les temps d'attente avant désintégration sont, individuellement, extrêmement imprévisibles. En revanche, la moyenne sur 200 expériences est relativement stable avec des valeurs autour de 13, 14 ou 15. Il est donc sans doute intéressant d'étudier de plus près la loi de la variable aléatoire « temps d'attente ».

On montre que l'espérance de cette variable aléatoire vaut $\frac{100}{7}\left[1-8\times 0{,}93^{100}\right]$, soit environ 14,2.

On a relevé ci-dessous, sur tableur, 10 séries de 200 temps d'attente. La moyenne et l'écart-type de chaque série sont affichés. Cela permet de constater combien la dispersion des valeurs individuelles est grande alors que celle des moyennes est petite.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	numéro/série	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	1	9	2	1	42	27	14	13	9	10	18	
3	2	10	27	4	9	2	8	2	4	1	53	
4	3	1	6	16	11	6	6	5	18	15	3	
5	4	12	42	23	2	71	13	4	15	41	5	
6	5	22	4	15	3	23	13	5	3	1	3	
7	6	18	26	46	19	35	1	3	15	3	17	
8	7	6	1	27	19	32	10	12	11	4	1	
9	8	2	5	5	5	12	2	16	4	2	12	
10	9	18	46	12	29	61	8	18	19	3	4	
11	10	1	1	4	28	7	3	6	5	2	2	
191	190	12	11	4	5	16	8	2	3	40	28	
192	191	5	11	7	18	1	9	15	3	4	28	
193	192	36	16	6	18	5	9	1	3	9	1	
194	193	18	25	15	20	5	10	7	41	16	40	
195	194	7	58	17	12	4	5	9	4	15	13	
196	195	3	4	7	1	18	14	5	20	19	2	
197	196	44	2	5	8	44	26	3	3	11	15	
198	197	10	16	1	20	29	30	8	19	11	8	
199	198	92	45	2	10	4	18	20	5	37	22	
200	199	9	27	3	56	17	24	5	15	4	29	
201	200	2	5	15	10	34	16	5	4	11	10	
202												ecart type des moyennes
203	emps moyen d'attent	13.415	14.75	13.75	13.375	14.745	14.535	12.685	13.37	13.945	14.905	0.715521663
204												
205	ecart type de la série	13.321891	13.751636	12.985665	12.110094	14.024977	12.268202	11.234579	14.093371	12.625053	13.493553	

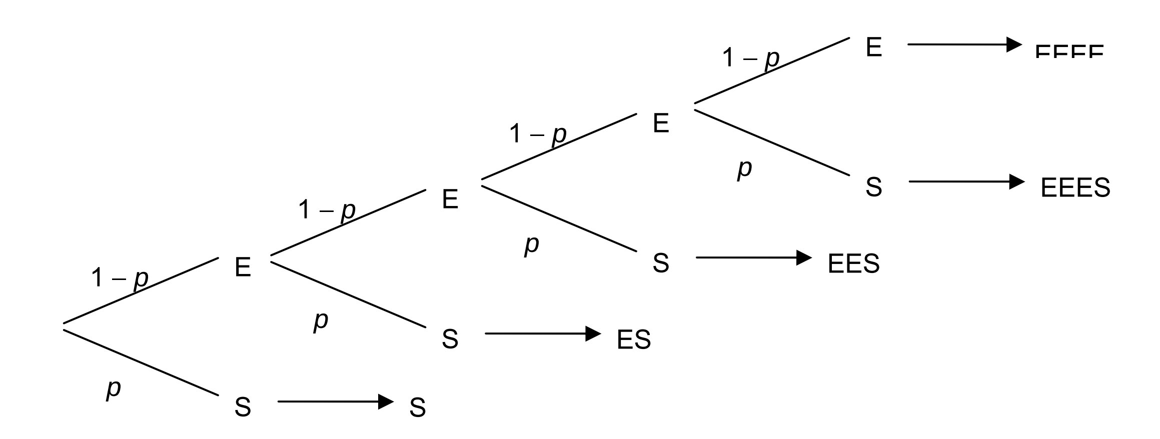
❖ Définition de la loi géométrique tronquée

Soit p un réel de l'intervalle $]0,1[$ et n un entier naturel non nul. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à répéter dans des conditions identiques une expérience de Bernoulli de paramètre p avec au maximum n répétitions et arrêt du processus au premier succès.

On appelle loi géométrique tronquée de paramètres n et p la loi de la variable aléatoire X définie par :

- $X=0$[5] si aucun succès n'a été obtenu ;

- pour $1 \leq k \leq n$, $X=k$ si le premier succès est obtenu à l'étape k.



❖ Expression de la loi géométrique tronquée

L'arbre permet de déterminer la loi de la variable aléatoire *X* décrite ci-dessus, c'est-à-dire la loi géométrique tronquée de paramètres *n* et *p*, où *n* un entier naturel non nul et *p* un réel de l'intervalle $]0,1[$.

- si aucun succès n'a été obtenu, $X=0$ et $P(X=0)=(1-p)^n$;

- pour $1 \leq k \leq n$, le premier succès est obtenu à l'étape *k* pour le chemin qui présente dans l'ordre $k-1$ échecs et un succès, d'où : $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.

On vérifie facilement que $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=1$ (exploitation des sommes de suites géométriques).

❖ Algorithme de simulation

Le processus lié à la loi géométrique tronquée est aisé à mettre en œuvre avec un algorithme. Il suffit de remarquer que l'instruction **ent(NbrAléat + *p*)** génère un nombre aléatoire entier qui vaut 1 avec la probabilité *p*, et 0 avec la probabilité $1-p$.

---

[5] La convention, $X=0$ si aucun succès n'a été obtenu, permet d'assurer les mêmes valeurs pour $P(X=k)$ et $P(Y=k)$ pour $k \in [1, n_1]$ si *X* suit la loi géométrique tronquée de paramètres n_1 et *p*, *Y* la loi géométrique tronquée de paramètres n_2 et *p*, avec $n_1 < n_2$.

En langage naturel

Entrées : valeur de *n*

valeur de *p*

Initialisations : *a* prend la valeur 0

k prend la valeur 0

Traitement : Tant que $a = 0$ et $k < n$

a prend la valeur ent(NbrAléat + *p*)

k prend la valeur $k + 1$

Fin de la boucle "tant que"

Sortie : Si $a = 0$

Alors afficher message "*X* = "

valeur de *a*

Sinon afficher message "*X* = "

valeur de *k*

Fin de l'instruction conditionnelle

Avec une calculatrice (modèle TI 84+)

L'instruction "et" se trouve dans le catalogue.

```
PROGRAM:GEOMNP
:Prompt N,P
:0→A
:0→K
:While A=0 et K<
N
:ent(NbrAléat+P)
→A
:K+1→K
:End
:If A=0
:Then
:Disp "X=",A
:Else
:Disp "X=",K
:End
```

Avec le logiciel Algobox

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  LIRE p
  a PREND_LA_VALEUR 0
  k PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (a==0 ET k<n) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    a PREND_LA_VALEUR floor(random()+p)
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    FIN_TANT_QUE
  SI (a==0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "X="
    AFFICHER a
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "X="
      AFFICHER k
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

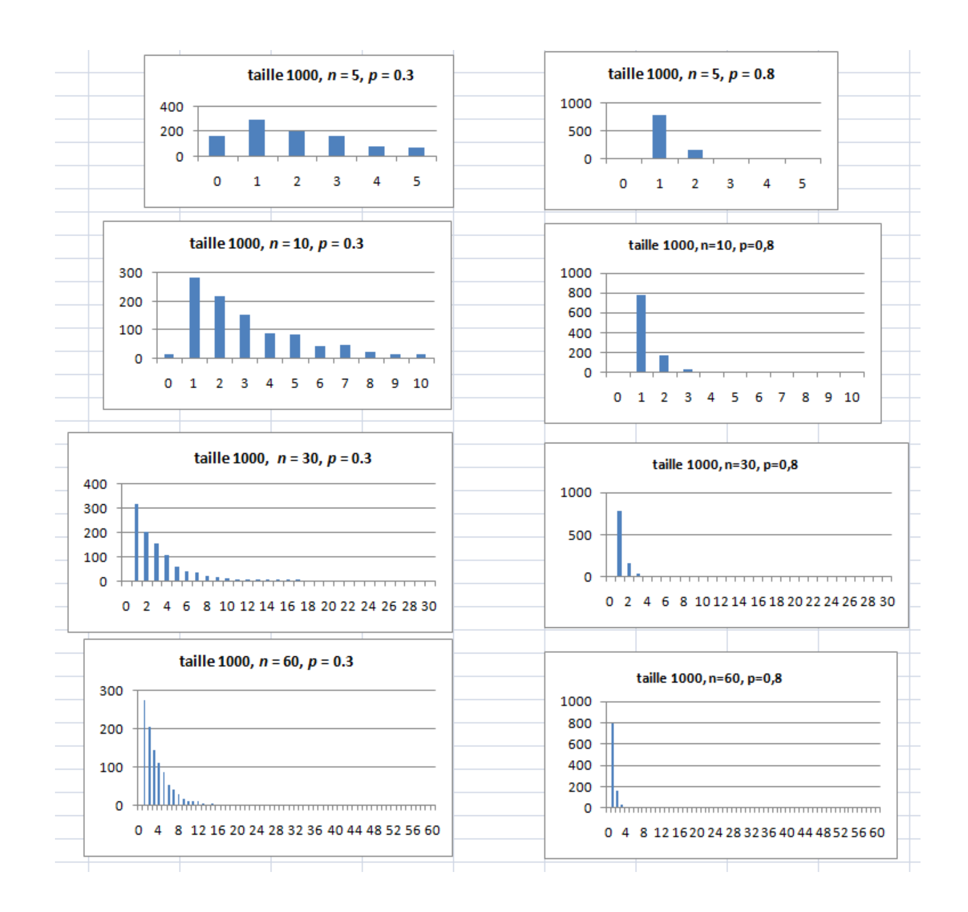
Avec le logiciel Scilab

```
//loi geometrique tronquee
//X=rang du premier succes si succes, 0 sinon
k=0;
a=0;
n=input("donner le nombre de lancers : ");
p=input("donner la probabilite d''un succes : ");
while (a==0 & k<n)
  a=floor(rand()+p);
  k=k+1;
  afficher(["a="+string(a),"k="+string(k)])
  end
if a==1 then
  afficher("X= "+string(k))
  else afficher("X=0")
end
```

Il est possible de modifier cet algorithme pour obtenir une série de valeurs de la variable X (voir annexe 3). Grâce à ces données, on peut alors visualiser une représentation graphique de la distribution de la loi géométrique tronquée.

❖ Représentation graphique

Les diagrammes ci-dessous sont obtenus pour des séries de 1000 valeurs avec d'une part p = 0,3 et d'autre part p = 0,8. Il est frappant de noter que lorsque n devient grand les histogrammes ont des allures semblables.



L'étude de l'expression de la loi géométrique tronquée va permettre d'expliquer en partie ces observations.

La suite de terme général $p(1-p)^{k-1}$ est décroissante, donc l'allure générale des diagrammes (hormis le bâton correspondant à $k=0$) se trouve confirmée.

Pour $p=0{,}3$, on obtient en fonction de *n* :

$P(X=0)=(0{,}7)^n$ et pour $1 \le k \le n$, $P(X=k)=0{,}3\times(0{,}7)^{k-1}$.

Il est facile de vérifier avec une calculatrice que :

$(0{,}7)^n < 0{,}005$ pour $n>14$ et $0{,}3\times(0{,}7)^{k-1} < 0{,}005$ pour $k>12$.

Ainsi, pour les diagrammes correspondant aux valeurs *n* = 30 et *n* = 60, il n'est pas surprenant de ne voir figurer aucune réalisation de la valeur 0. De même, les bâtons correspondant aux valeurs de *k* supérieures ou égales à 13 ont une hauteur pratiquement nulle.

Pour $p=0{,}8$, on obtient en fonction de *n* :

$P(X=0)=(0{,}2)^n$ et pour $1 \le k \le n$, $P(X=k)=0{,}8\times(0{,}2)^{k-1}$.

$(0{,}2)^n < 0{,}002$ pour $n>3$ et $0{,}8\times(0{,}2)^{k-1} < 0{,}0005$ pour $k>5$.

Les diagrammes correspondants sont compatibles avec ces valeurs seuil. En particulier, pour *n* = 5, on n'observe pas de réalisation de la valeur 0.

❖ Espérance de la loi géométrique tronquée

Au niveau de la classe de Première, la détermination de l'espérance de la loi géométrique tronquée de paramètres *n* et *p* mobilise à la fois les suites géométriques et la dérivation.

Sans être exigible, cette activité peut faire l'objet d'un travail de recherche.

Activité :

Pour tout l'exercice, *X* désigne une variable aléatoire de loi géométrique tronquée de paramètres *n* et *p*. On pose : $q = 1 - p$.

Montrer que $E(X) = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = p\left[1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}\right]$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$ par : $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

a. Pour tout réel *x* de l'intervalle $]0,1[$, écrire $f(x)$ sous la forme d'un quotient.

b. Vérifier que la fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $]0,1[$ et calculer deux expressions différentes de $f'(x)$ pour tout réel *x* élément de l'intervalle $]0,1[$.

c. En déduire le calcul de la somme $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$ pour tout réel *x* de l'intervalle $]0,1[$.

Prouver l'égalité $E(X) = \frac{1}{p}\left[1 - (1+np)(1-p)^n\right]$.

Utiliser un outil numérique ou graphique pour émettre une conjecture sur la limite de $E(X)$ lorsque *n* tend vers l'infini.

Remarque :

La limite de $E(X)$ semble être égale à $\frac{1}{p}$ (voir les illustrations en *annexe 3*).

Pour démontrer ce résultat, la principale difficulté est de calculer la limite en $+\infty$ de la suite (u_n) de terme général $u_n = n(1-p)^n$.

Pour cela, on peut considérer la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Elle converge vers $1-p$ qui est strictement inférieur à 1. On obtient la limite de la suite (u_n) par comparaison avec une suite géométrique de limite nulle.

✖ B – EXEMPLES D'ACTIVITES

❖ Limitation des naissances

(D'après Claudine ROBERT, *Contes et décomptes de la statistique*, Éd. Vuibert. Voir aussi le document ressource de 2000 rédigé par Claudine ROBERT.)

Énoncé

Pour limiter le nombre de filles dans un pays (imaginaire ?), on décide que :

chaque famille aura au maximum 4 enfants ;

chaque famille arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon.

On considère que chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille et que, pour chaque couple de parents, le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents.

Ce choix a-t-il la conséquence attendue, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population ?

Il n'est pas inintéressant de solliciter d'abord une réponse a priori, c'est une façon d'entrer dans le problème et de motiver son étude.

Simulation de l'expérience sur un tableur

Les naissances d'une famille se simulent sur une ligne. On passe facilement à la simulation pour 1000 familles en recopiant les formules.

On entre en A4 : `=ENT(ALEA()+0,5)`

et en B4 : `=SI(OU(A4=1;A4="");"";A4+ENT(ALEA()+0,5))`, que l'on recopie jusqu'à D4.

On décompte le nombre d'enfants en E4 : `=NB(A4:D4)` et le nombre de garçons en F4 : `=NB.SI(A4:D4;1)`.

Il reste à recopier les formules de la ligne 4 jusqu'à la ligne 1003. Le calcul de *N*, *G* et *P* est alors immédiat.

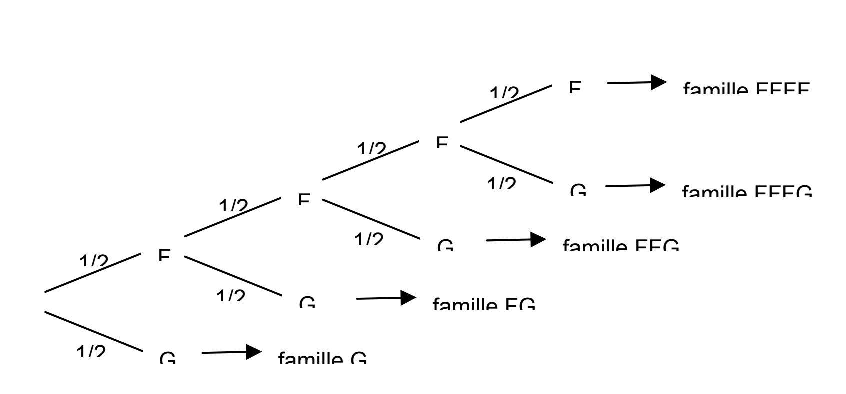
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Chaque colonne représente une naissance. Le nombre indiqué est le nombre de garçons.										
2											
3	Naissances				Enfants	Garçons		Nombre total d'enfants : *N* =			1896
4	0	0	0	1	4	1					
5	1				1	1		Nombre total de garçons : *G* =			939
6	1				1	1					
7	0	1			2	1		Proportion de garçons : *p* =			0,495
8	1				1	1					
9	1				1	1					
10	0	1			2	1					
11	0	1			2	1					
12	1				1	1					
13	1				1	1					
14	0	1			2	1					
15	1				1	1					
16	0	0	1		3	1					
17	1				1	1					
18	1				1	1					
19	0	0	0	0	4	0					

La simulation montre clairement que la proportion de garçons semble bien rester voisine de 0,5. La politique nataliste mise en place n'aurait donc aucun effet sur la modification de cette proportion.

On observerait la même chose lorsque la probabilité de naissance d'un garçon est égale à *p*.

Représentation à l'aide d'un arbre

Le traitement mathématique à l'aide de l'arbre permet de valider les conjectures émises avec le tableur.



Nombre total d'enfants *N*	Nombre total de garçons *G*	Probabilité
4	0	1/16
4	1	1/16
3	1	1/8
2	1	1/4
1	1	1/2

$E(N)=\frac{15}{8}$, $E(G)=\frac{15}{16}$, donc $\frac{E(G)}{E(N)}=\frac{1}{2}$.

Cette situation peut se prêter à une différenciation pédagogique selon que l'on envisage la valeur $p=0{,}5$ ou p quelconque, selon que l'on s'en tienne à 4 enfants au plus ou que l'on généralise à n enfants au plus.

Généralisation

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à répéter dans des conditions identiques une expérience de Bernoulli de paramètre *p* avec au maximum *n* répétitions et arrêt du processus au premier succès. On note toujours *X* la variable aléatoire qui représente le rang du 1er succès et qui vaut 0 si aucun succès n'a été obtenu. La variable aléatoire *X* suit la loi géométrique tronquée de paramètres *n* et *p*.

On considère les variables aléatoires *A*, nombre de succès et *B*, nombre d'étapes du processus aléatoire.

La loi de la variable aléatoire *A* est très simple, elle ne prend que deux valeurs 0 et 1 avec :

$$P(A=0)=P(X=0)=(1-p)^n$$

$$P(A=1)=\sum_{k=1}^{k=n}P(X=k)=1-(1-p)^n$$

L'espérance de la variable aléatoire *A* est donc : $E(A)=1-(1-p)^n$.

La variable aléatoire *B* prend des valeurs entre 1 et *n* avec :

- pour $1\leq k\leq n-1$, $P(B=k)=P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$;

- pour $k=n$, $P(B=n)=P(X=0)+P(X=n)=(1-p)^n+(1-p)^{n-1}p$.

L'espérance de la variable aléatoire *B* est donc :

$$E(B)=\sum_{k=1}^{n-1}k\,p(1-p)^{k-1}+n\left[p(1-p)^{n-1}+(1-p)^n\right],$$

soit $E(B)=\sum_{k=1}^{n} k\,p(1-p)^{k-1}+n(1-p)^n$, ou encore $E(B)=E(X)+n(1-p)^n$.

On obtient après simplification $E(B)=\frac{1}{p}\left[1-(1-p)^n\right]$.

Conclusion : si l'on répète un grand nombre de fois ce processus de *n* étapes au maximum (ceci quelle que soit la valeur de l'entier *n*), on obtient en moyenne un nombre de succès égal à $1-(1-p)^n$ pour un nombre moyen d'étapes égal à $\frac{1}{p}\left[1-(1-p)^n\right]$. Ainsi, en moyenne, la proportion de succès est égale à *p*. Il est remarquable de retrouver cette probabilité de succès, quel que soit le nombre maximal d'étapes du processus.

❖ Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

Formulé par Nicolas Bernoulli en 1713, ce problème a été approfondi par son cousin Daniel Bernoulli dans l'ouvrage *Les transactions de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, ce qui lui a valu son nom.

Énoncé

Un joueur joue contre la banque au jeu de « pile ou face », en misant toujours sur « face ». Il adopte la stratégie suivante : il mise un euro au premier coup, et s'il perd, double la mise au coup suivant, tant que « face » ne sort pas. S'il gagne, il récupère sa mise augmentée d'une somme équivalente à cette mise. Le joueur dispose d'une fortune limitée, qui lui permet de perdre au maximum *n* coups consécutifs et, si « pile » sort *n* fois de suite, le joueur ne peut plus miser et arrête le jeu. La fortune de la banque, elle, n'est pas limitée.

Une partie consiste pour le joueur à jouer, si sa fortune le lui permet, jusqu'à ce que « face » sorte.

Il s'agit de déterminer la probabilité qu'a le joueur de gagner une partie, son gain algébrique moyen par partie, et d'analyser l'intérêt pour le joueur de jouer à ce jeu.

Traitement mathématique

Pour modéliser la situation, on suppose que le joueur lance la pièce *n* fois : si « face » sort avant le *n*-ième coup, le joueur ne mise rien les coups suivants. Lorsqu'il joue *n* fois de suite à « pile ou face », on note :

- A_n l'événement « le joueur obtient *n* piles » ; $G=\overline{A_n}$ l'événement : « le joueur gagne la partie » ;
- X la variable aléatoire qui comptabilise le rang de la première face, et l'on convient que ce rang est égal à 0 si « face » ne sort pas ;
- *Y* la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

On envisage d'abord le cas où le joueur dispose d'une fortune limitée, par exemple à 1000 €.

Le joueur double sa mise tant qu'il perd. Sa fortune lui permet de tenir *n* coups, où il mise successivement (en euro) 1, 2, 2^2, …, 2^{n-1}, tant que $1+2+...+2^{n-1}\leq 1000$. La formule sommatoire sur les suites géométriques simplifie cette inégalité en : $2^n-1\leq 1000$. D'où $n=9$.

On obtient $P(A_9)=\frac{1}{2^9}\approx 0{,}002$, d'où $P(G)=1-P(A_9)=1-\frac{1}{2^9}\approx 0{,}998$.

La variable aléatoire *X* suit la loi géométrique tronquée de paramètres 9 et $\frac{1}{2}$. Elle prend les valeurs entières de 0 à 9, avec $P(X=0)=P(A_9)=\frac{1}{2^9}$ et, pour *k* compris entre 1 et 9 : $P(X=k)=\frac{1}{2^{k-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^k}$.

On vérifie bien que $\sum_{k=0}^{9} P(X=k) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^9}\right)+\frac{1}{2^9}=1$.

Déterminons les valeurs de *Y*.

Si « face » sort pour la première fois au *k*-ième coup (avec $1 \leq k \leq n$), le joueur a misé au total une somme en euro égale à $1+2+...+2^{k-1}$, il gagne le double de sa dernière mise, soit $2\times 2^{k-1}$. Son gain algébrique est donc égal à $2^k-(1+2+...+2^{k-1})$, c'est-à-dire 1 €.

Si « face » ne sort pas, le joueur a perdu toutes ses mises, soit (en euro) $1+2+...+2^8=2^9-1=511$.

On en tire la loi de la variable aléatoire *Y* et son espérance mathématique :

Valeurs de *Y*	+1	$-(2^9-1)$
Probabilités	$1-\frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^9}$

$$E(Y)=1\times\left(1-\frac{1}{2^9}\right)-(2^9-1)\times\frac{1}{2^9}=0.$$

<u>Simulation de 1000 parties en 9 coups au plus sur un tableur</u>

On code la sortie de « face » par « 1 », celle de « pile » par « 0 ».

On place en A1 la formule `=ENT(2*ALEA())`,

puis en B1 la formule `=SI(OU(A1=1;A1="");"";ENT(2*ALEA()))`, que l'on recopie jusqu'en I1 ;

enfin on place en K1 la formule `=SI(SOMME(A1:I1)=0;"PERDU";"GAGNE")`.

Les formules précédentes sont recopiées jusqu'à la ligne 1000.

Il reste alors en décompter en M1 le nombre de parties perdues, avec la formule :

`=NB.SI(K1:K1000;"PERDU")`.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1										GAGNE	Nombre de parties perdues	6	
2	1										GAGNE			
3	0	0	0	1							GAGNE			
4	0	1									GAGNE			
5	1										GAGNE			
6	0	1									GAGNE			
7	1										GAGNE			
8	0	1									GAGNE			
9	1										GAGNE			
10	1										GAGNE			
11	1										GAGNE			
12	0	0	0	0	0	1					GAGNE			
13	0	0	0	0	1						GAGNE			
14	1										GAGNE			
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0		PERDU			
16	0	1									GAGNE			
17	1										GAGNE			
18	0	1									GAGNE			

Quoique faible, la probabilité de perdre n'est pas négligeable. Sur la simulation précédente, on s'aperçoit que le joueur perd effectivement 6 parties sur 1000. Il perd donc six fois 511 €, soit 3066 €. Il a gagné 994 parties qui lui rapportent chacune 1 €, soit un gain total de 994 €. Il a donc perdu 2972 euros sur 1000 parties, soit environ 3 euros par partie en moyenne.

Conclusions de l'étude : deux paradoxes

Chaque partie gagnée rapporte 1 € au joueur. Si sa fortune était illimitée (ou simplement très grande), la probabilité de gagner, égale à $1-\frac{1}{2^n}$, aurait pour limite 1, et permettrait au joueur de gagner chaque partie. Il semble donc que la stratégie du joueur constitue une « martingale » infaillible. Le jeu semble favorable au joueur.

Cependant, puisque $E(Y)=0$, le jeu est honnête. La stratégie mise en place donne une espérance de gain identique à celle du simple jeu de pile ou face. C'est un premier paradoxe.

Par ailleurs, ce problème montre la limite de la notion d'espérance pour juger si un jeu est favorable. En effet, la simulation précédente a révélé que la perte est importante, et qu'elle se produit plusieurs fois sur 1000 parties. Peu de joueurs s'aventureraient dans un jeu pourtant honnête où l'on risque de perdre gros, même si ce risque est faible, alors que l'on gagne peu. C'est là le deuxième paradoxe.

La notion de risque, liée à celle de la dispersion de la variable aléatoire « gain », est un élément décisif d'appréciation d'un jeu. Le paradoxe de Saint-Pétersbourg est l'un des problèmes ayant donné naissance à la théorie de la décision en économie. Dans cette théorie, on formalise en particulier la notion de *fonction d'utilité*, qui mesure le degré de satisfaction d'un consommateur.

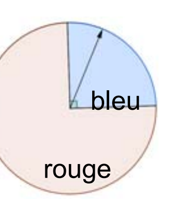
VI. LOI BINOMIALE

✖ A – DEFINITIONS

❖ Approche de la loi binomiale

Les exemples suivants proposent, en s'appuyant sur les outils déjà disponibles, une découverte de la loi binomiale avant sa formalisation mathématique. Ces activités sont conçues de façon à faciliter une formalisation progressive de ces notions.

Exemple 1 : *mise en place du vocabulaire*



On fait tourner la roue de loterie présentée ci-contre : on obtient la couleur « rouge » avec la probabilité 0,75 et la couleur « bleu » avec la probabilité 0,25.

Le joueur est gagnant lorsque la flèche s'arrête sur la zone bleue comme sur la figure ci-contre.

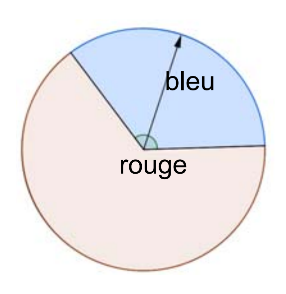
On décide de noter S (comme succès) cette éventualité et de noter E (comme échec) l'éventualité contraire c'est-à-dire « la flèche tombe sur la zone rouge ».

Une expérience à deux issues, succès ou échec, est appelée « épreuve de Bernoulli ». La loi de Bernoulli de paramètre *p* est la loi de la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, où *p* désigne la probabilité du succès.

Consigne aux élèves : on joue trois fois de suite dans des conditions identiques et on désigne par *X* la variable aléatoire qui donne le nombre de succès obtenus. Réaliser un arbre pondéré représentant cette situation et en déduire la loi de la variable aléatoire *X* puis son espérance mathématique.

On parlera de « schéma de Bernoulli » lorsqu'on effectue une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple 2 : *schéma de Bernoulli pour un paramètre p quelconque*



On fait maintenant tourner la roue de loterie présentée ci-contre : on obtient la couleur « Bleu » avec une probabilité qui dépend de l'angle indiqué sur la figure et qui est notée *p*. On obtient donc la couleur « Rouge » avec une probabilité de $1-p$.

On décide encore de noter S (comme succès) cette éventualité et de noter E (comme échec) l'éventualité contraire c'est-à-dire « la flèche tombe sur la zone rouge ».

1°) On répète quatre fois cette épreuve de Bernoulli de paramètre *p*. Représenter cette répétition par un arbre pondéré à quatre niveaux.

2°) On définit alors la variable aléatoire *X* égale au nombre de succès obtenus à l'issue des quatre répétitions.

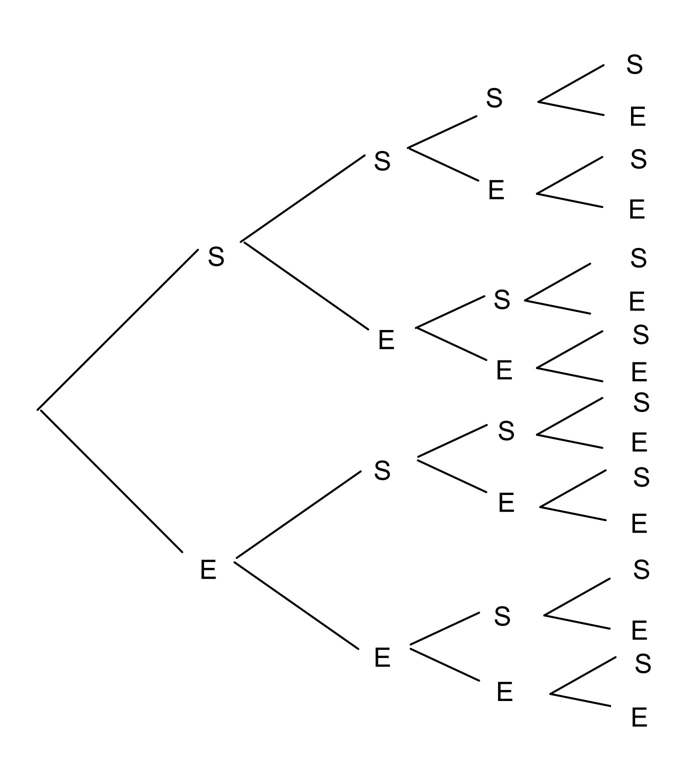
En utilisant l'arbre, déterminer la probabilité des événements suivants :

$\{X=0\}$ $\{X=4\}$ $\{X=1\}$ $\{X=2\}$.

Il faut observer que les probabilités $P(X=1)$ et $P(X=2)$ s'obtiennent en comptant les chemins qui conduisent respectivement à 1 et à 2 succès.

On note $\binom{4}{1}$ et on lit « 1 parmi 4 » le nombre de chemins qui conduisent à 1 succès exactement. Ici, $\binom{4}{1}=4$.

On note $\binom{4}{2}$ et on lit « 2 parmi 4 » le nombre de chemins qui conduisent à 2 succès exactement. Ici, $\binom{4}{2}=6$.



Exemple 3 : utiliser une représentation mentale de l'arbre pondéré

On décide maintenant de répéter cinq fois cette épreuve de Bernoulli et on note toujours *X* le nombre de succès obtenus à l'issue des cinq répétitions. La réalisation de l'arbre pondéré devient fastidieuse.

1°) Sans réaliser l'arbre, mais en s'inspirant de ce qui a déjà été fait, déterminer la probabilité des événements $\{X=0\}$et $\{X=5\}$.

2°) On s'intéresse dan s cette question à la probabilité de l'événement $\{X=2\}$.

a) Quelle est la probabilité d'un chemin conduisant à exactement deux succès ?

b) On note $\binom{5}{2}$ et on lit « 2 parmi 5 » le nombre de chemins qui conduisent à 2 succès. Déterminer ce nombre en utilisant l'arbre déjà réalisé pour 4 répétitions.

Il y a deux façons d'obtenir 2 succès selon qu'à la dernière étape on obtient un succès ou un échec.

- Si la dernière étape donne un échec, il faut compter les chemins qui au niveau précédent conduisaient déjà à 2 succès. Avec l'arbre déjà réalisé, on sait que 6 chemins sont dans ce cas.

- Si la dernière étape donne un succès, il faut compter les chemins qui au niveau précédent conduisaient à un seul succès. Avec l'arbre déjà réalisé, on sait que 4 chemins sont dans ce cas.

En conclusion, $6+4=10$ chemins de l'arbre des 5 répétitions conduisent à 2 succès, soit avec les notations introduites : $\binom{5}{2}=\binom{4}{2}+\binom{4}{1}$.

Enfin la réponse attendue est : $P(X=2)=10p^2(1-p)^3$ ou $P(X=2)=\binom{5}{2}p^2(1-p)^3$.

❖ Définition de la loi binomiale

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre *p*. Un schéma de Bernoulli associé à *n* répétitions de cette épreuve peut être représenté par un arbre pondéré qui comporte *n* niveaux.

Par définition, la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}$(n, p), est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p.

Quelques cas particuliers

Calcul de $P(X=0)$ et de $P(X=n)$

L'événement $\{X=0\}$ est réalisé sur l'unique chemin de l'arbre qui ne comporte que des échecs, c'est-à-dire le dernier chemin de l'arbre qui est constitué de n branches qui ont toutes la probabilité $1-p$.

D'où le résultat : $P(X=0)=(1-p)^n$.

L'événement $\{X=n\}$ est réalisé sur l'unique chemin de l'arbre qui ne comporte que des succès, c'est-à-dire le premier chemin de l'arbre qui est constitué de n branches qui ont toutes la probabilité p.

D'où le résultat : $P(X=n)=p^n$.

Calcul de $P(X=1)$ et de $P(X=n-1)$

L'événement $\{X=1\}$ est réalisé sur les chemins de l'arbre qui comportent exactement un succès et $n-1$ échecs. La probabilité de chacun de ces chemins est : $p(1-p)^{n-1}$.

Il reste à déterminer combien de chemins de ce type figurent dans l'arbre pondéré. Cette question est assez simple dans la mesure où il suffit de repérer à quel niveau de l'arbre figure l'unique succès. Il y a donc n possibilités et ainsi n chemins qui réalisent l'événement $\{X=1\}$.

D'où le résultat : $P(X=1)=np(1-p)^{n-1}$.

L'événement $\{X=n-1\}$ est réalisé sur les chemins de l'arbre qui comportent exactement $n-1$ succès et 1 échec. La probabilité de chacun de ces chemins est : $p^{n-1}(1-p)$.

Il reste à déterminer combien de chemins de ce type figurent dans l'arbre pondéré. Comme précédemment, il suffit de repérer à quel niveau de l'arbre figure l'unique échec. Il y a donc encore n possibilités et ainsi n chemins qui réalisent l'événement $\{X=n-1\}$.

D'où le résultat : $P(X=n-1)=np^{n-1}(1-p)$.

❖ Coefficients binomiaux

Pour déterminer par exemple, $P(X=2)$ on procèderait de la même façon : la probabilité de chaque chemin qui réalise exactement deux succès est : $p^2(1-p)^{n-2}$. Il faut ensuite multiplier cette probabilité par le nombre de chemins qui présentent exactement deux succès. Ce nombre est noté $\binom{n}{2}$ et on lit « 2 parmi *n* ». Il peut être obtenu avec une calculatrice ou avec un tableur.

Plus généralement :

Si n est un entier naturel et si k est un entier compris entre 0 et n, on note $\binom{n}{k}$ et on lit « k parmi n » le nombre de chemins qui réalisent exactement k succès dans l'arbre à n niveaux, associé à un schéma de Bernoulli. Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux.

Ces nombres $\binom{n}{k}$ sont par construction des entiers et l'étude précédente nous fournit quelques valeurs :

- quel que soit *n*, entier naturel : $\binom{n}{0}=1$; $\binom{n}{n}=1$,

- quel que soit *n*, entier naturel non nul : $\binom{n}{1}=n$; $\binom{n}{n-1}=n$,

- $\binom{4}{1}=4$; $\binom{4}{2}=6$; $\binom{5}{2}=10$.

✘ B – PROPRIETES

❖ Expression de la loi binomiale

La probabilité de chacun des chemins qui réalisent exactement *k* succès est $p^k(1-p)^{n-k}$. On obtient donc :

Soient un entier naturel n et un réel p de l'intervalle $[0,1]$

La variable aléatoire X égale au nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p suit la loi binomiale $\mathcal{B}$(n, p), avec pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\ (1-p)^{n-k}$$

Remarque : les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ interviennent comme coefficients dans la formule générale ci-dessus, mais aussi dans la formule du binôme de Newton qui donne le développement de $(a+b)^n$ pour tous réels *a* et *b*.

❖ Propriétés des coefficients binomiaux

Symétrie

Le nombre de chemins réalisant $n-k$ succès est aussi le nombre de chemins réalisant k échecs. Par symétrie, on obtient autant de chemins réalisant k succès que de chemins réalisant k échecs.

Si n est un entier naturel et si k est un entier compris entre 0 et n, alors $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Formule de Pascal

Il s'agit ici de calculer un coefficient binomial associé à $n+1$ répétitions à partir des coefficients calculés sur l'arbre réalisé au niveau *n*.

Le coefficient binomial $\binom{n+1}{k+1}$ donne le nombre de chemins qui réalisent exactement $k+1$ succès.

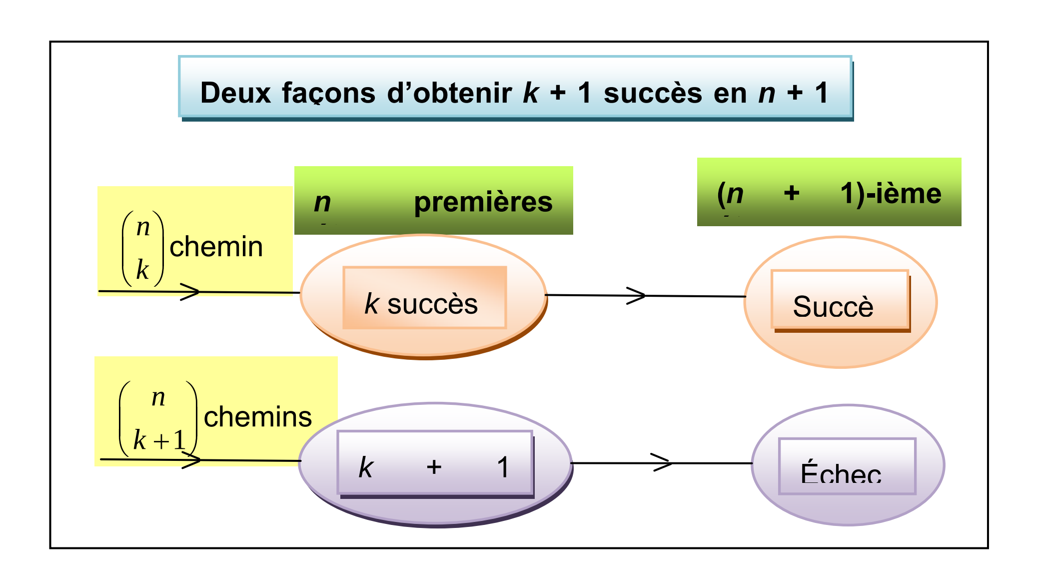
Il y a deux façons d'obtenir $k+1$ succès suivant qu'à la dernière étape on obtient un succès ou un échec.

- Si la dernière étape donne un échec, il faut compter les chemins qui au niveau précédent conduisaient déjà à $k+1$ succès. On sait que $\binom{n}{k+1}$ chemins sont dans ce cas.

- Si la dernière étape donne un succès, il faut compter les chemins qui au niveau précédent conduisaient à exactement *k* succès. On sait que $\binom{n}{k}$ chemins sont dans ce cas.

En conclusion, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ chemins de l'arbre des $n+1$ répétitions conduisent à $k+1$ succès, d'où le résultat :

Si n est un entier naturel et si k est un entier compris entre 0 et n – 1, alors $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$.



Somme des coefficients binomiaux

En ajoutant tous les coefficients binomiaux obtenus sur un arbre de n répétitions, on obtient le nombre total de chemins de l'arbre. Or cet arbre comporte n niveaux et à chaque niveau on multiplie le nombre de chemins existants par 2. Le nombre total de chemins est donc 2^n. On obtient la relation :

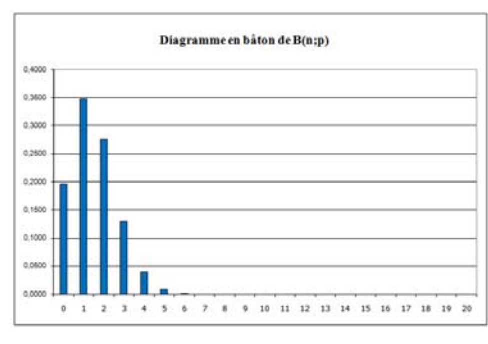
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots\binom{n}{n}=2^n\ .$$

On pourra se reporter à l'**annexe 5** pour l'utilisation de quelques outils de calcul avec la loi binomiale.

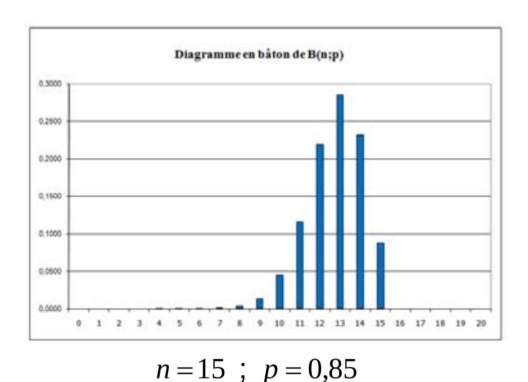
❖ Représentation graphique

Dans ce document, on parle de « grande binomiale » si $n \geq 25$ et $0{,}2 < p < 0{,}8$ - conditions énoncées dans le programme de Seconde –, et dans le cas contraire, on parle de « petite binomiale ».

Petites binomiales

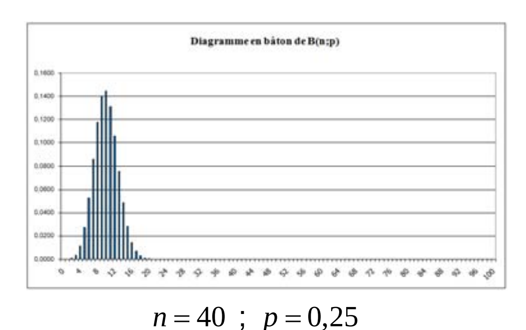


$n = 10\ ;\ p = 0{,}15$

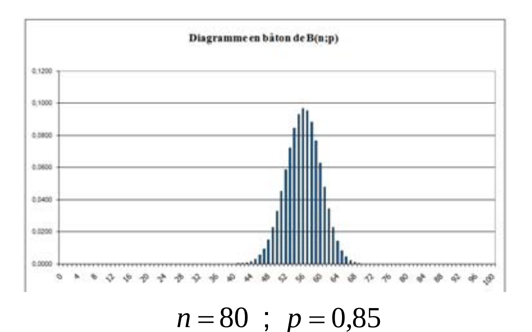


$n = 15\ ;\ p = 0{,}85$

Grandes binomiales



$n = 40\ ;\ p = 0{,}25$



$n = 80\ ;\ p = 0{,}85$

L'observation des différentes représentations graphiques permet de constater les comportements suivants :

– - déplacement vers la droite du diagramme à *n* fixé en fonction de la croissance de *p* ; constatation analogue si *p* est fixé et *n* augmente ;

– - allure symétrique « en cloche » des grandes binomiales ; il est facile de démontrer l'exacte symétrie de la représentation lorsque $p = 0{,}5$;

– - dispersion maximale lorsque $p = 0{,}5$.

❖ **<u>Espérance et écart-type</u>**

Il s'agit ici de proposer une activité conduisant à une conjecture sur l'expression de l'espérance et de l'écart-type d'une loi binomiale.

On utilisera le tableur pour calculer, à l'aide de l'instruction SOMMEPROD, l'espérance et la variance de la loi $\mathcal{B}(n,\ p)$ pour différentes valeurs de *n* et *p*. La variance est obtenue à partir de la relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (cette formule n'est pas un attendu du programme).

Pour la copie d'écran ci-dessous la valeur de *p* est 0,2 et les valeurs de *n* vont de 5 à 50 avec un pas de 5 unités.

La feuille de calcul est conçue pour admettre des valeurs de *n* entre 0 et 100.

Dans les cellules de B3 à K3 on a saisi : `=$B1`.

Dans la cellule B7 on a saisi : `=SI($A7<=B$4;LOI.BINOMIALE($A7;B$4;B$3;0);" ")` pour demander l'affichage de la probabilité de $\{X = k\}$, uniquement lorsque $k \leq n$ et une cellule vide dans l'autre alternative.

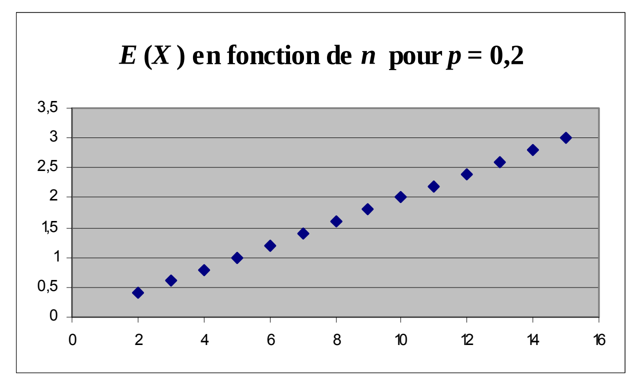
Dans la cellule B110 on a saisi : `=SOMMEPROD($A7:$A107;B7:B107)` pour obtenir l'espérance de la variable aléatoire *X* de loi binomiale de paramètres *n* et *p*. L'adressage absolu sur la première colonne autorise la recopie vers la droite de cette formule.

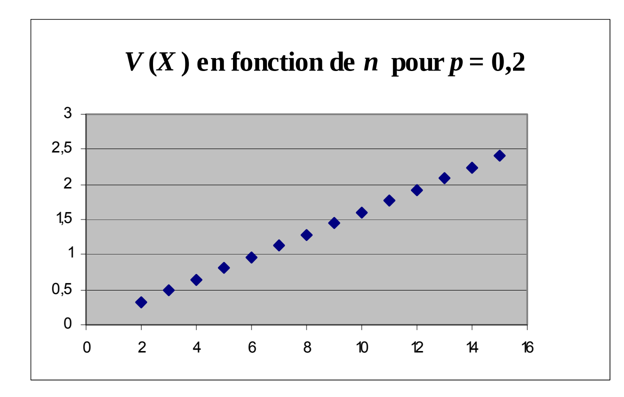
Dans la cellule B112 on a saisi : `=SOMMEPROD(($A7:$A107)^2;B7:B107)` pour obtenir l'espérance de la variable X^2.

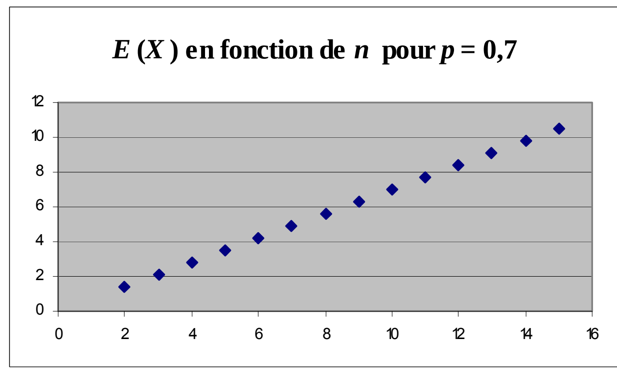
La variance s'obtient alors en B116 avec la formule `=B112-B113`.

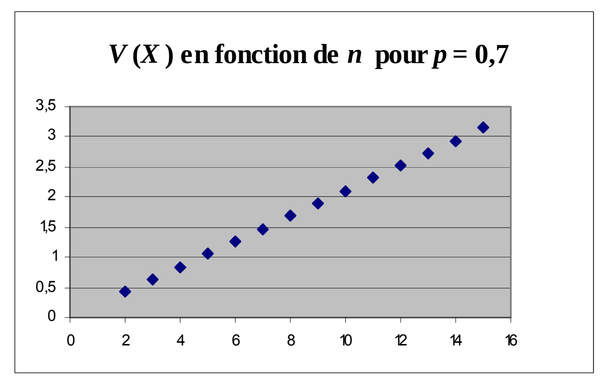
On peut aussi obtenir la variance de *X* comme espérance de $(X - E(X))^2$ en saisissant dans la cellule B116 la formule : `=SOMMEPROD(($A7:$A107–B110)^2;B7:B107)`.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	*p*	0,2									
2											
3	*p*	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
4	*n*	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
5											
6	*k*	*P(X=k)*	*P(X=k)*	*P(X=k)*	*P(X=k)*	*P(X=k)*	*P(X=k)*	*P(X=k)*	*P(X=k)*	*P(X=k)*	*P(X=k)*
7	0	0,32768	0,107374	0,035184	0,011529	0,003778	0,001238	0,000406	0,000133	4,36E-05	1,43E-05
8	1	0,4096	0,268435	0,131941	0,057646	0,023612	0,009285	0,003549	0,001329	0,00049	0,000178
9	2	0,2048	0,30199	0,230897	0,136909	0,070835	0,033656	0,015085	0,00648	0,002695	0,001093
10	3	0,0512	0,201327	0,250139	0,205364	0,135768	0,078532	0,041484	0,02052	0,009657	0,004371
11	4	0,0064	0,08808	0,187604	0,218199	0,186681	0,132522	0,082968	0,047452	0,02535	0,01284
12	5	0,00032	0,026424	0,103182	0,17456	0,196015	0,172279	0,1286	0,085414	0,051968	0,029531
13	6		0,005505	0,042993	0,1091	0,163346	0,179457	0,16075	0,124563	0,086613	0,055371
107	100										
108											
109	*n*	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
110	*E(X)*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
111											
112	$E(X^2)$	1,8	5,6	11,4	19,2	29	40,8	54,6	70,4	88,2	108
113	$E(X)^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
114											
115	*n*	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
116	*V(X)*	0,8	1,6	2,4	3,2	4	4,8	5,6	6,4	7,2	8
117											





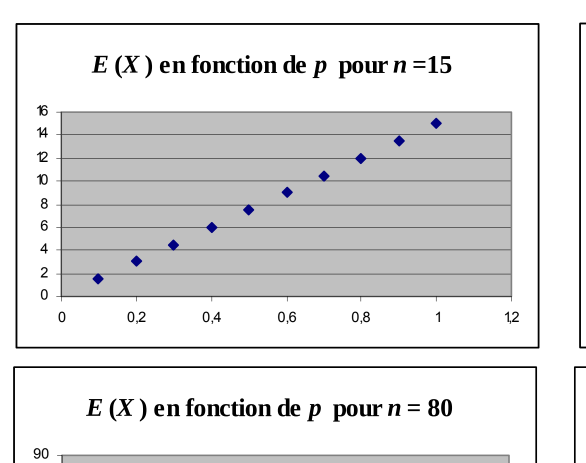


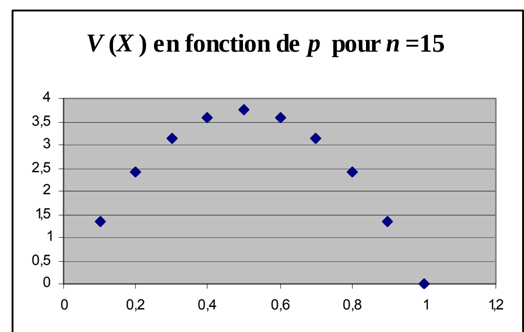


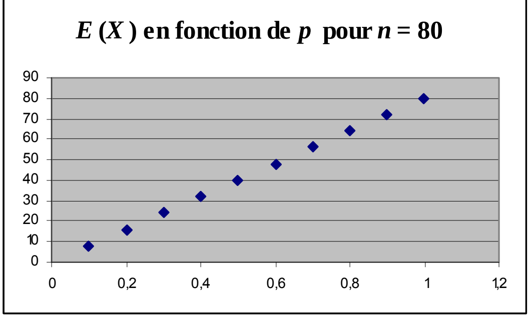
Observations pour *p* fixé :

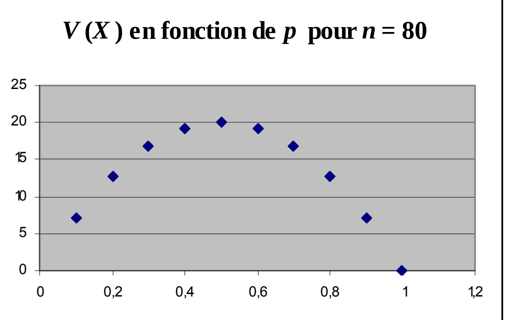
Lorsque la valeur de *p* est fixée, on observe que l'espérance de la loi binomiale, aussi bien que sa variance, semblent être des fonctions linéaires de *n*.

Observations pour *n* fixé :









Lorsque la valeur de *n* est fixée, on observe que l'espérance de la loi binomiale semble aussi être une fonction linéaire de *p*. De plus, on peut noter que la valeur obtenue avec le cas particulier $p=1$ correspond à la valeur de *n* qui a été fixée. D'où la conjecture $E(X)=n\,p$ que le professeur validera dans le cours.

En revanche, la variance se comporte comme une fonction du second degré en *p*. On peut noter aussi que la variance semble bien être maximale pour $p = 0{,}5$ comme l'observation des représentations graphiques le laissait prévoir.

Un réinvestissement des notions d'analyse permet, par exemple, de déterminer les fonctions polynômes du second degré qui sont maximales en 0,5 et qui s'annulent en 0 et 1. La linéarité selon la variable *n* incite à chercher un coefficient « multiple » de *n* et quelques essais permettent d'aboutir à l'expression $V(X) = np(1-p)$ que le professeur validera dans le cours.

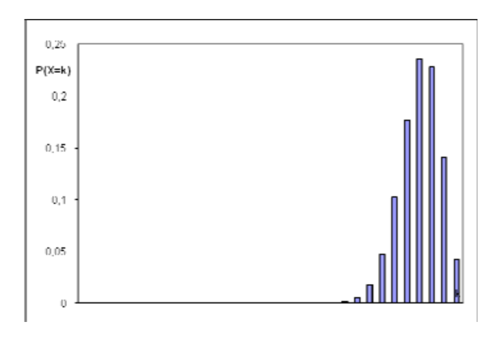
✘ C – EXEMPLES D'ACTIVITES

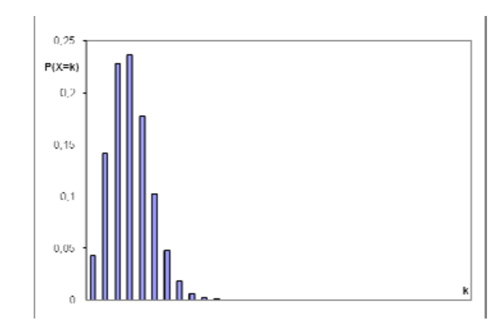
❖ **Avec la loi de probabilité**

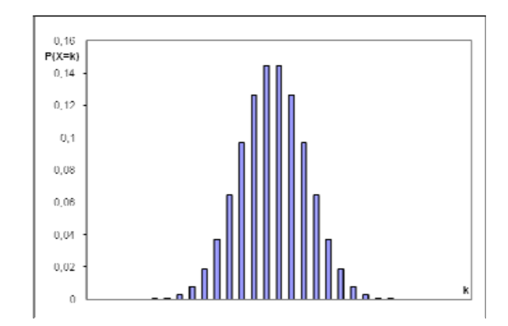
1. Appariement

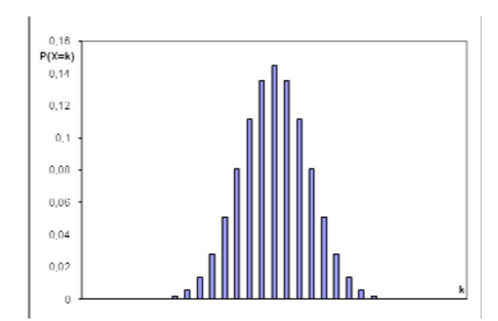
On a représenté ci-dessous la distribution de probabilité de quatre variables aléatoires suivant les lois binomiales $\mathcal{B}$(30 ; 0,1), $\mathcal{B}$(30 ; 0,5), $\mathcal{B}$(30 ; 0,9), $\mathcal{B}$(29 ; 0,5).

Associer chaque loi à son graphique.









2. Le quorum

Une association comprenant 30 adhérents organise chaque année une assemblée générale. Les statistiques montrent que chaque adhérent assiste à l'assemblée avec la probabilité 80 %. Les décisions prises par l'assemblée n'ont de valeur légale que lorsque plus de la moitié des adhérents assiste à l'assemblée.

Quelle est la probabilité que, lors de la prochaine assemblée, le quorum soit atteint ?

3. Paradoxe ?

Paul affirme : « Avec un dé régulier, on a autant de chance d'obtenir au moins un six en 4 lancers que d'obtenir au moins deux six avec 8 lancers ».

Sara objecte : « Pas du tout. Dans le premier cas, la probabilité est supérieure à 0,5, dans le deuxième cas, elle est inférieure à 0,5. ».

Qui a raison ?

4. Le tir à l'arc

À chaque tir, un archer atteint sa cible avec une probabilité égale à 0,7.

Combien de tirs doit-il effectuer pour que, avec une probabilité supérieure ou égale 0,99, il atteigne la cible au moins deux fois ? Au moins trois fois ?

5. Lancers de pièce

On lance une pièce équilibrée *n* fois. On s'intéresse à la probabilité d'obtenir « face » dans 60 % des cas ou plus.

Envisager les cas $n = 10$, puis $n = 100$, puis $n = 1000$.

Donner d'abord, sans calcul, une estimation spontanée du résultat, puis solliciter la calculatrice ($n = 10$) ou un algorithme de calcul ($n = 100$ et $n = 1000$).

❖ Avec l'espérance mathématique

1. Contrôle de production

Une entreprise fabrique chaque jour 10 000 composants électroniques. Chaque composant présente un défaut avec la probabilité 0,002. Si le composant est repéré comme étant défectueux, il est détruit par l'entreprise, et chaque composant détruit fait perdre 1 € à l'entreprise.

a) Les composants sont contrôlés un à un, et chaque contrôle coûte 0,1 €. Quel est le coût moyen journalier pour l'entreprise (contrôles et destruction des composants défectueux) ?
b) Les composants sont regroupés par lots de 10, et on effectue un unique contrôle automatique de chaque lot, qui coûte lui aussi 0,1 €. À l'issue de ce contrôle, le lot est accepté si tous les composants sont sains, et globalement détruit si l'un au moins des 10 composants présente un défaut. Quel est le coût moyen journalier pour l'entreprise de ce nouveau dispositif (contrôles et destruction des composants défectueux) ?

2. Le QCM

Un QCM comporte 20 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste. Chaque réponse juste rapporte un point et il n'y a pas de pénalité pour une réponse fausse. Un candidat répond au hasard à chaque question.

Quel nombre total de points peut-il espérer ?

Quelle pénalité doit-on attribuer à une réponse fausse pour que le total espéré, en répondant entièrement au hasard, soit égal à 2 sur 20 ?

3. Correction de fautes

Un texte contient *n* erreurs. Lors d'une relecture, on considère que chaque erreur a 80 % de chances d'être corrigée.

Peut-on prévoir, en moyenne, le nombre d'erreurs restantes après une relecture, …, après *k* relectures, *k* étant un entier supérieur à 1 ?

VII. ÉCHANTILLONNAGE ET PRISE DE DECISION

La prise de décision apparaît pour la première fois dans le programme de Seconde. La démarche s'appuie sur la notion d'intervalle de fluctuation dont une définition est donnée et une expression proposée sous réserve de satisfaire aux conditions de validité, $n > 25$ et $0{,}2 < p < 0{,}8$ (*n* est la taille de l'échantillon prélevé et *p* est la proportion dans la population du caractère étudié). Avec la notion de variable aléatoire et la découverte de la loi binomiale, le programme de Première fournit les premiers outils qui permettent, en prenant appui sur la réflexion initiée en Seconde autour de la prise de décision, de construire l'intervalle de fluctuation déterminé à l'aide de la loi binomiale, et une démarche de prise de décision, valable en toute généralité pour une proportion *p* et une taille *n* d'échantillon.

La **partie A** synthétise les définitions, la **partie B** présente la problématique de la *prise de décision*.

La **partie C** développe une approche possible en classe.

✘ A – INTERVALLE DE FLUCTUATION AVEC LA LOI BINOMIALE

L'intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95% a été défini dans le programme de Seconde de la façon suivante :

« *L'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p, proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille n.* »

La loi binomiale permet de calculer très exactement les probabilités des différentes fréquences observables dans un échantillon de taille *n*, à savoir les valeurs $\frac{k}{n}$, avec $0 \leq k \leq n$, probabilités qui peuvent être représentées à l'aide d'un diagramme en bâtons. On peut également calculer, à l'aide d'un tableur, les probabilités (cumulées) des événements suivants : « *La fréquence observée dans l'échantillon prélevé de taille n est comprise entre 0 et* $\frac{k}{n}$ », événement qu'on peut aussi écrire $\left\{0 \leq F \leq \frac{k}{n}\right\}$, si *F* désigne la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille *n* associe la fréquence observée dans l'échantillon prélevé.

En faisant varier les paramètres *n* et *p*, on observe que le diagramme n'est pas toujours symétrique, et non exactement centré sur *p*. Par ailleurs, le caractère discret de la loi binomiale fait qu'il n'est pas possible de déterminer précisément un intervalle où la fréquence observée se situe avec une probabilité égale à 0,95. La définition donnée en seconde pour l'intervalle de fluctuation suppose en effet, de manière implicite, que la fréquence suit une loi continue.

Pour ces différentes raisons, on est amené à construire un intervalle qui approxime l'intervalle de fluctuation défini plus haut en adoptant la définition suivante :

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % d'une fréquence *F*, correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille *n*, de la variable aléatoire *X* égale à *nF* et de loi binomiale de paramètres *n* et *p*, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$ défini par le système de conditions suivant :

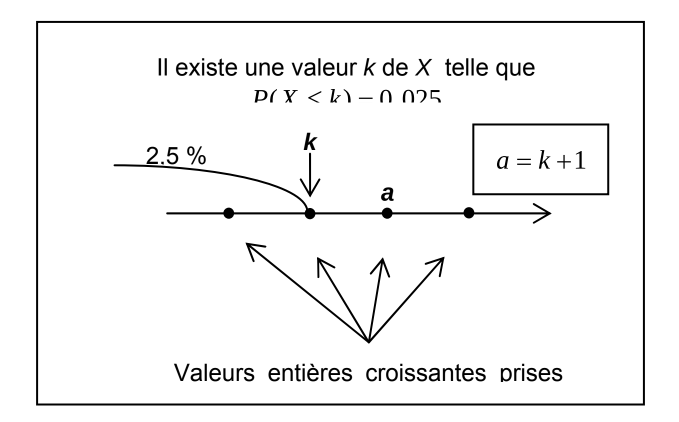
***a* est le plus grand entier tel que $P(X < a) \leq 0{,}025$,**

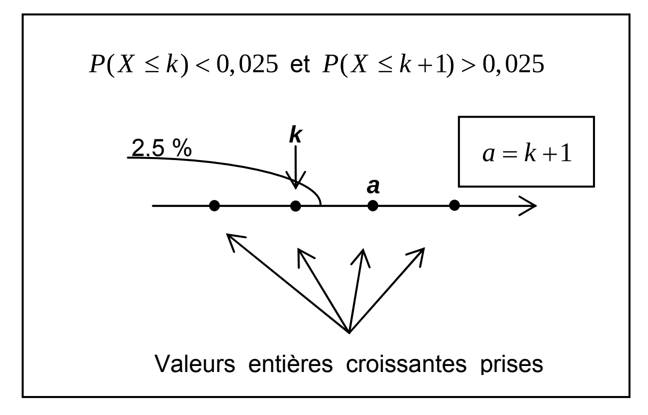
***b* est le plus petit entier tel que $P(X > b) \leq 0{,}025$.**

ou encore par le système de conditions équivalent :

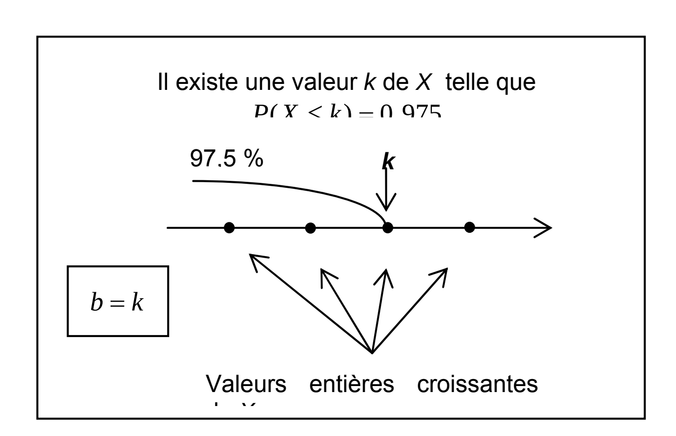
- *a* est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$,
- *b* est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

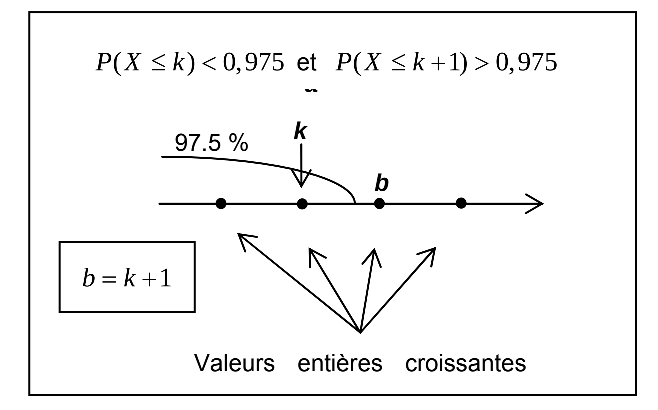
Détermination de *a*





Détermination de *b*





Remarques :

1. Ce jeu sur les inégalités strictes est dû au caractère discret de la variable aléatoire *X* considérée (on pourra s'en convaincre dans la partie C).

2. Les entiers *a* et *b* dépendent de la taille *n* de l'échantillon.

La connaissance de la loi binomiale de la variable aléatoire *X* rend maintenant possible le calcul de la probabilité $P\left(\frac{a}{n} \leq F \leq \frac{b}{n}\right) = P(a \leq X \leq b)$.

On remarque que l'intervalle $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$ est quasiment centré sur *p* dès que *n* est « assez grand » et que l'intervalle $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$ est « quasiment » le même que l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ donné dans le programme de seconde pour les « grandes binomiales » ($n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$ où *n* est la taille de l'échantillon prélevé et *p* est la proportion dans la population du caractère étudié, conditions énoncées dans le programme de seconde).

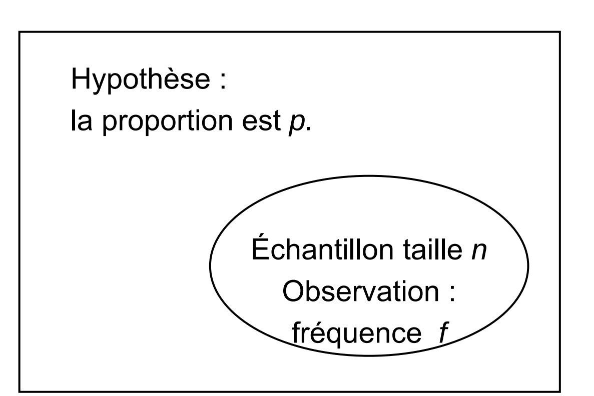
On trouvera des exemples dans le sous-paragraphe C ci-après.

L'intérêt de l'intervalle $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$ (qu'il conviendrait de noter $\left[\frac{a_n}{n}, \frac{b_n}{n}\right]$ pour être précis), calculé à partir de la loi binomiale, est de fournir un intervalle convenable **pour toutes les valeurs de *n* et de *p***, alors que l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ **n'est pas adapté** pour les « petites binomiales ».

B – ASPECT GENERAL DE LA PRISE DE DECISION AVEC LA LOI BINOMIALE

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un certain caractère est *p*. Pour juger de cette hypothèse, on y prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de taille *n* sur lequel on observe une fréquence *f* du caractère.

On rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion dans la population est *p* lorsque la fréquence *f* observée est trop éloignée de *p*, dans un sens ou dans l'autre. On choisit de fixer le **seuil à 95 %** de sorte que la probabilité de rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie, soit inférieure à 5 %.



Lorsque la proportion dans la population vaut *p*, la variable aléatoire *X* correspondant au nombre de fois où le caractère est observé dans un échantillon aléatoire de taille *n*, suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

La **règle de décision** adoptée est la suivante :

si la fréquence observée *f* appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est *p* dans la population n'est pas remise en question et on l'accepte ;

sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut *p*.

Cette prise de décision repose sur le raisonnement suivant : si la proportion vaut *p* on a, en gros, au moins 95 % de chances que le prélèvement d'un échantillon de taille *n* conduise à une fréquence *f* du caractère dans cet échantillon située dans $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$. On sait bien que dans ce cas, compte tenu du hasard, la fréquence réellement observée *f* n'est pas nécessairement égale à *p*, mais qu'elle **fluctue** dans un voisinage de *p*, appelé justement **intervalle de fluctuation**. Un intervalle de fluctuation est donc un intervalle où l'on « s'attend » à trouver la fréquence observée *f*, si l'hypothèse que la proportion est *p* est la bonne.

En conséquence, si la proportion vaut *p*, il y a très peu de chances (environ au plus 5% des échantillons) que cette fréquence observée *f* soit hors de l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$. Donc si elle est à l'extérieur de

l'intervalle $\left[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}\right]$, il est cohérent de penser que ce n'est plus le seul fait du hasard cette fois-ci, mais que c'est bien plutôt le signe que l'hypothèse que la proportion est *p* n'est pas la bonne.

✘ C – DETERMINATION DE L'INTERVALLE DE FLUCTUATION A L'AIDE D'UN ALGORITHME

Considérons l'exemple suivant. Un médecin de santé publique veut savoir si, dans sa région, le pourcentage d'habitants atteints d'hypertension artérielle est égal à la valeur de 16 % récemment publiée pour des populations semblables. En notant *p* la proportion d'hypertendus dans la population de sa région, le médecin formule l'hypothèse $p = 0{,}16$. Pour vérifier cette hypothèse, le médecin constituera un échantillon de $n = 100$ habitants de la région ; il déterminera la fréquence f d'hypertendus (l'échantillon est prélevé au hasard et la population est suffisamment importante pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise).

Lorsque la proportion dans la population vaut $p = 0{,}16$, la variable aléatoire *X* correspondant au nombre d'hypertendus observé dans un échantillon aléatoire de taille $n = 100$, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}16$.

On cherche à partager l'intervalle $[0;100]$, où *X* prend ses valeurs, en trois intervalles $[0, a-1]$, $[a, b]$ et $[b+1, 100]$ de sorte que la variable aléatoire *X* prenne ses valeurs dans chacun des intervalles extrêmes avec une probabilité proche de 0,025, sans dépasser cette valeur. On recherche donc le plus grand entier *a* tel que $P(X < a) \leq 0{,}025$ et le plus petit entier *b* tel que $P(X > b) \leq 0{,}025$.

X suit la loi $\mathcal{B}(100 ; 0{,}16)$

0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40
Intervalle de fluctuation : au moins 95 %
Zone de rejet à gauche : au plus 2,5 %
a
b
Zone de rejet à droite : au plus 2,5 %

D'un point de vue **algorithmique**, il est plus efficace de travailler avec les probabilités cumulées croissantes, que la calculatrice ou le tableur fournissent facilement. En tabulant les probabilités cumulées $P(X \leq k)$, pour *k* allant de 0 à 100, il suffit de déterminer le plus petit entier *a* tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ et le plus petit entier *b* tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

Le calcul, à l'aide de la loi binomiale, de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, $\left[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}\right]$, de la fréquence des échantillons aléatoires de taille *n*, correspondant à la zone d'acceptation d'une hypothèse sur une proportion, peut ainsi faire l'objet d'une recherche d'algorithme.

C6 = =SI(B6>0,025;A6/B$3;"")

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence donné par la loi binomiale**							
2	*n* taille de l'échantillon		*p* proportion supposée dans la population					
3	***n* = 100**		***p* = 0,16**					
4								
5	k	P(X<=k)	recherche *a*	recherche *b*		**Intervalle de fluctuation à 95 %**		
6	0	2,67873E-08				(selon la loi binomiale)		
7	1	5,37021E-07						
8	2	5,3478E-06				**0,09**	**0,23**	
9	3	3,52815E-05						
10	4	0,000173547						
11	5	0,000679203						
12	6	0,002204197						
13	7	0,006104862						
14	8	0,014742048						
15	9	0,031559427	0,09					
16	10	0,060709551	0,1					
17	11	0,106138316	0,11					
18	12	0,170315459	0,12					
19	13	0,25306401	0,13					
20	14	0,351011275	0,14					
21	15	0,457975907	0,15					
22	16	0,566213927	0,16					
23	17	0,668085005	0,17					
24	18	0,757559073	0,18					
25	19	0,831111691	0,19					
26	20	0,887852282	0,2					
27	21	0,929024593	0,21					
28	22	0,95718574	0,22					
29	23	0,975376792	0,23	0,23				
30	24	0,986493546	0,24	0,24				

On peut, par exemple, procéder sur un tableur comme le montre l'image d'écran.

La cellule B3 contient la valeur de n, taille de l'échantillon. La cellule D3 contient la valeur de p, proportion supposée dans la population.

On a entré en B6 la formule `=SI(A6<=B$3;LOI.BINOMIALE(A6;B$3;D$3;VRAI);"")`

pour tabuler les probabilités P(X ≤ k) lorsque X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

On a entré en C6 la formule `=SI(B6>0,025;A6/B$3;"")`

pour afficher les valeurs de k telles que P(X ≤ k) dépasse strictement 0,025.

On a entré en D6 la formule `=SI(B6>=0,975;A6/B$3;"")`

pour afficher les valeurs de k telles que P(X ≤ k) égale ou dépasse 0,975.

Ces trois formules ont été ici recopiées vers le bas jusqu'à la ligne 1 006 (l'algorithme fonctionne pour une valeur maximale de n égale à 1 000, mais on peut, en cas de besoin, recopier plus bas).

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est affiché en cellules F8 et G8 contenant les formules `=MIN(C6:C1006) et =MIN(D6:D1006)`.

Dans le cas de l'exemple choisi, on a n = 100 et p = 0,16. L'algorithme fournit $\frac{a}{n} = 0{,}09$ et $\frac{b}{n} = 0{,}23$.

La règle de décision, pour le médecin, sera la suivante :

- si la fréquence observée *f* appartient à l'intervalle de fluctuation [0,09 ; 0,23], on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion d'hypertendus dans la population est *p* = 0,16 n'est pas remise en question et on l'accepte ;
- sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut *p* = 0,16.

D – Exemples d'activités

Exemple 1 : politique dans un pays lointain

Monsieur *Z*, chef du gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52 % des électeurs lui font confiance. On interroge 100 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise) et on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, au seuil de 95 %, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur *Z*, dans un sens, ou dans l'autre.

1. On fait l'hypothèse que Monsieur *Z* dit vrai et que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est 0,52. Montrer que la variable aléatoire *X*, correspondant au nombre d'électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 100 électeurs, suit la loi binomiale de paramètres *n* = 100 et *p* = 0,52.

2. On donne ci-contre un extrait de la table des probabilités cumulées $P(X \leq k)$ où *X* suit la loi binomiale de paramètres *n* = 100 et *p* = 0,52.

k	$P(X \leq k) \approx$
40	0,0106
41	0,0177
42	0,0286
43	0,0444
...	...
61	0,9719

a. Déterminer *a* et *b* tels que :

• *a* est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;

• *b* est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

b. Comparer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$, ainsi obtenu grâce à la loi binomiale, avec l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}},\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

3. Énoncer la règle décision permettant de rejeter ou non l'hypothèse que la proportion des électeurs qui font confiance à Monsieur *Z* dans la population est 0,52, selon la valeur de la fréquence *f* des électeurs favorables à Monsieur *Z* obtenue sur l'échantillon.

4. Sur les 100 électeurs interrogés au hasard, 43 déclarent avoir confiance en Monsieur *Z*. Peut-on considérer, au seuil de 95 %, l'affirmation de Monsieur *Z* comme exacte ?

Éléments de réponse

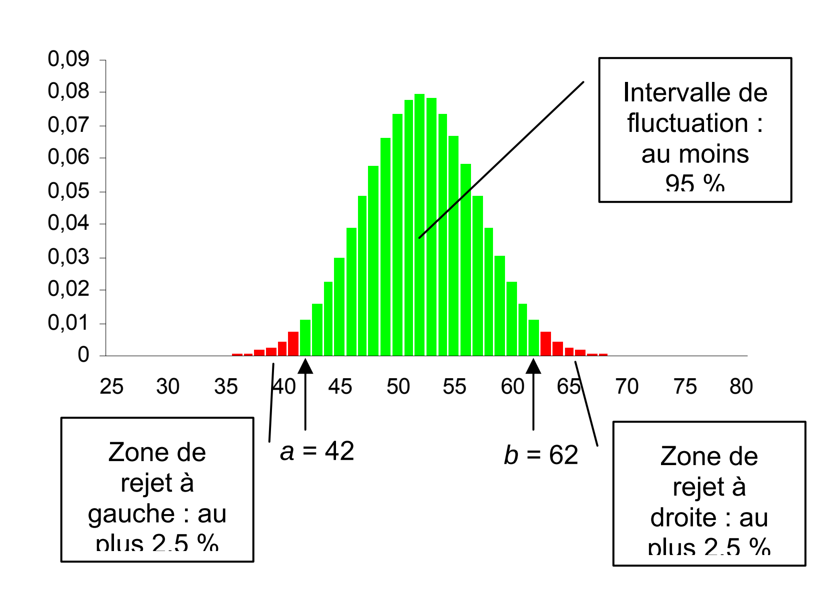
2. a. On lit *a* = 42 et *b* = 62.

b. Les intervalles sont identiques.

3. Si *f* appartient à l'intervalle [0,42 ; 0,62], l'hypothèse que la proportion des électeurs qui font confiance à Monsieur *Z* dans la population est 0,52 est acceptable, sinon, l'hypothèse est rejetée, au seuil de 95 %.

4. On considère que l'affirmation de Monsieur *Z* est exacte.

X suit la loi $\mathcal{B}$(100 ; 0,52)



Remarque : la recherche de l'intervalle de fluctuation peut-être illustrée par le diagramme en bâtons de la loi binomiale de paramètres *n* = 100 et *p* = 0,52.

Exemple 2 : discrimination

(d'après le document ressource mathématiques pour les baccalauréats professionnels)

En Novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida est condamné à huit ans de prison. Il attaque ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté est, selon lui, discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 80 % de la population du comté est d'origine mexicaine, sur

les 870 personnes convoquées pour être jurés lors des années précédentes, il n'y a eu que 339 personnes d'origine mexicaine.

Devant la Cour Suprême, un expert statisticien produit des arguments pour convaincre du bien fondé de la requête de l'accusé. En vous situant dans le rôle de cet expert, pouvez-vous décider si les Américains d'origine mexicaine sont sous-représentés dans les jurys de ce comté ?

Éléments de réponse

On suppose que les 870 jurés sont tirés au sort dans la population du comté (la population étant très importante, on peut considérer qu'il s'agit de tirages avec remise). Sous cette hypothèse, la variable aléatoire *X* correspondant au nombre de jurés d'origine mexicaine suit la loi binomiale de paramètres $n = 870$ et $p = 0{,}8$.

On peut alors rechercher, en utilisant la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % correspondant.

Une tabulation de la loi binomiale de paramètres $n = 870$ et $p = 0{,}8$ fournit les résultats suivants :

k	$P(X \leq k)$	fréquence *k / n*
672	0,0245	0,772
673	**0,0296**	**0,774**
...	...	...
718	0,9733	0,825
719	**0,9783**	**0,826**

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des jurés d'origine mexicaine est : $[0{,}774 ; 0{,}826]$.

La fréquence observée est $f = \frac{339}{870} \approx 0{,}39$. Cette valeur ne se situe pas dans l'intervalle de fluctuation. La différence est significative au seuil de 95 % et l'hypothèse *p* = 0,8, avec un titrage aléatoire des jurés, est rejetée.

De fait, l'accusé a obtenu gain de cause et a été rejugé par un autre jury.

Exemple 3 : sécurité au carrefour

Un groupe de citoyens demande à la municipalité d'une ville la modification d'un carrefour en affirmant que 40 % des automobilistes tournent en utilisant une mauvaise file.

Un officier de police constate que sur 500 voitures prises au hasard, 190 prennent une mauvaise file.

1. Déterminer, en utilisant la loi binomiale sous l'hypothèse *p* = 0,4, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

2. D'après l'échantillon, peut-on considérer, au seuil de 95 %, comme exacte l'affirmation du groupe de citoyens ?

Éléments de réponse

1. [0,358 ; 0,444].

2. f = 0,38. L'affirmation est considérée comme exacte.

Exemple 4 : gauchers

Dans le monde, la proportion de gauchers est 12 %.

Soit n le nombre d'élèves dans votre classe.

1. Déterminer, à l'aide de la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des gauchers sur un échantillon aléatoire de taille n.

2. Votre classe est-elle « représentative » de la proportion de gauchers dans le monde ?

Éléments de réponse

1. En prenant n = 30, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est [0,033 ; 0,233] (entre 1 et 7 gauchers).

   En prenant n = 25, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est [0 ; 0,24] (entre 0 et 6 gauchers).

2. Cela revient à situer la fréquence observée dans la classe par rapport à l'intervalle de fluctuation.

Exemple 5 : ségrégation sexiste à l'embauche

(d'après document ressource pour la classe de Seconde. Ce problème peut être revisité à l'aide de la loi binomiale.)

Deux entreprises recrutent leur personnel dans un vivier comportant autant d'hommes que de femmes. Voici la répartition entre hommes et femmes dans ces deux entreprises :

	Hommes	Femmes	Total
Entreprise A	57	43	100
Entreprise B	1350 (54%)	1150 (46 %)	2500

Peut-on suspecter l'une des deux de ne pas respecter la parité hommes-femmes à l'embauche ?

Exemple 6 : générateur de nombres aléatoires

1. Sur un tableur, on entre dans la cellule A1 la formule = ENT(ALEA()*2), que l'on recopie vers le bas jusqu'en A100. On dénombre alors que le nombre 1 apparaît 58 fois dans la plage de cellules A1 : A100. Au seuil de 95 %, peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle le générateur de nombres aléatoires du tableur fonctionne bien ?

2. Même question si l'on recopie la formule vers le bas jusqu'en A1000, et que l'on dénombre 580 occurrences du nombre 1 dans la plage de cellules A1 : A1000.

E – LIEN AVEC L'INTERVALLE DE FLUCTUATION EXPLOITE EN CLASSE DE SECONDE

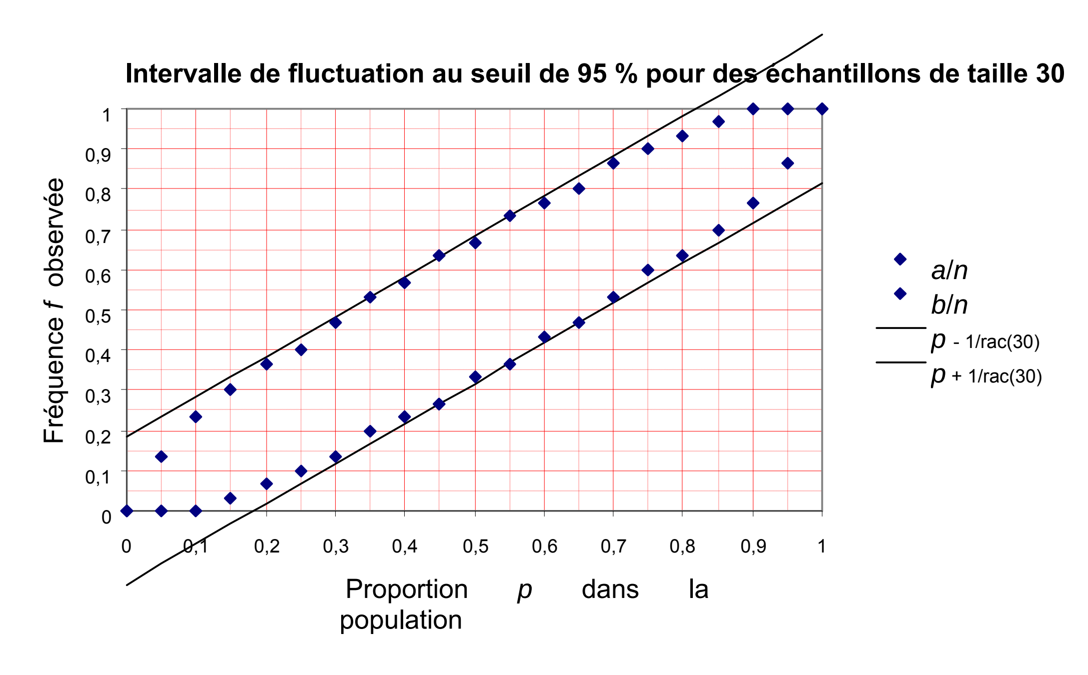
On considère une population où la proportion d'un caractère est *p*, dans laquelle on prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de taille *n*. La variable aléatoire *X* correspondant au nombre d'observations du caractère sur un échantillon suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

On peut calculer à l'aide de la loi binomiale, notamment à l'aide de l'algorithme du paragraphe VII-C-1, l'intervalle $\left[\frac{a_n}{n}, \frac{b_n}{n}\right]$ de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence observée sur un échantillon de taille *n*, où a_n est le plus petit entier tel que $P(X \le a_n) > 0{,}025$ et b_n est le plus petit entier tel que $P(X \le b_n) \ge 0{,}975$.

La notation $\left[\frac{a_n}{n}, \frac{b_n}{n}\right]$ retenue ici rappelle que les entiers a_n et b_n dépendent de l'entier *n*.

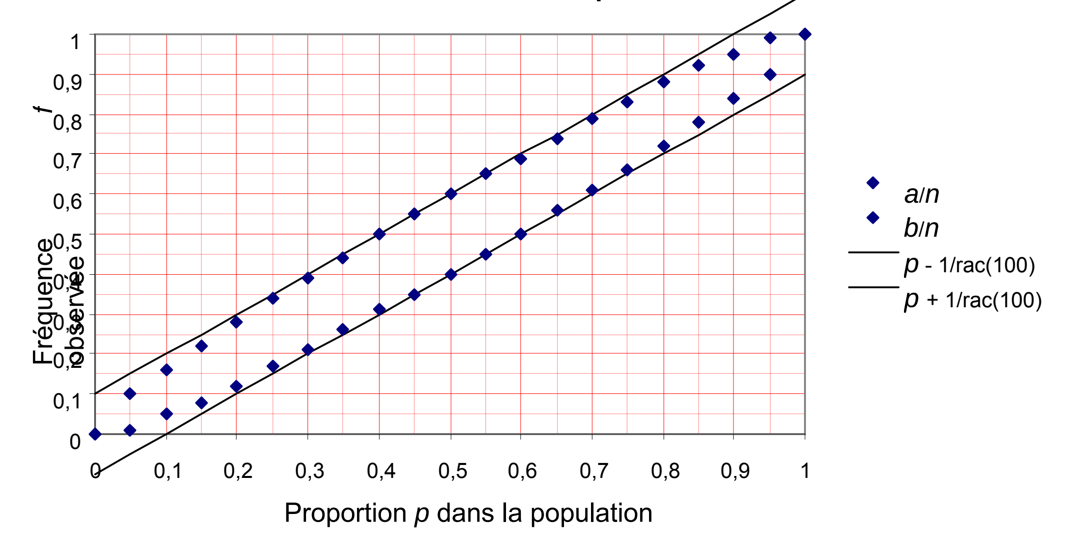
Les programmes demandent de comparer, pour une taille de l'échantillon importante, cet intervalle avec l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ exploité en classe de seconde. Ce dernier intervalle, plus facilement calculable, résulte d'approximations[6], alors que la loi binomiale est la loi exacte correspondant à la situation.

En fixant différentes valeurs de *n*, il est possible de calculer les deux types d'intervalles pour *p* variant de 0 à 1. Les graphiques suivants ont été réalisés pour *n* = 30, *n* = 100 et *n* = 1 000, en faisant varier, dans chaque cas, *p* de 0 à 1 avec un pas de 0,05.

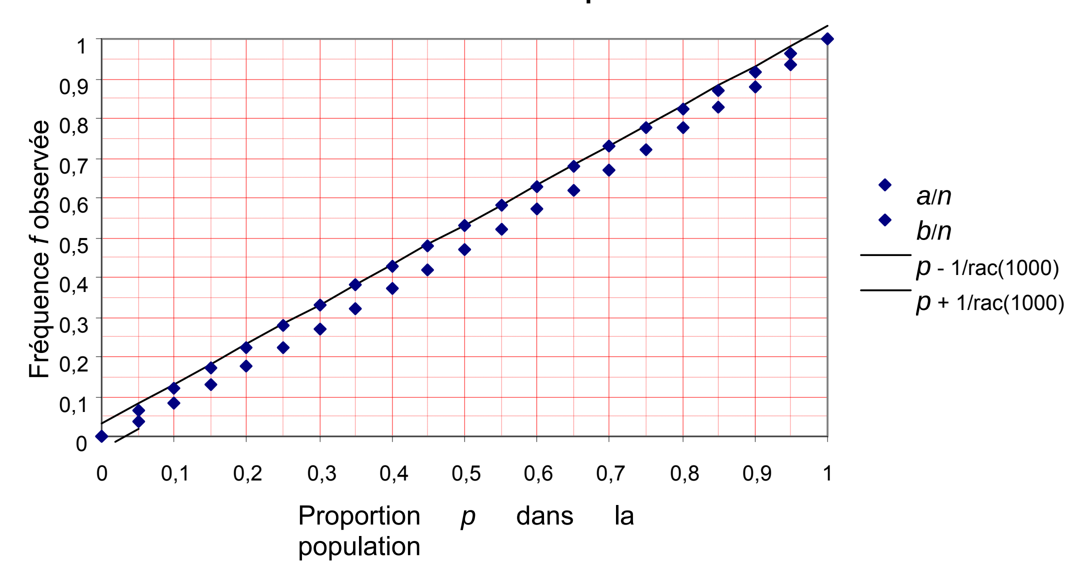


[6] Voir l'annexe 8.

Intervalle de fluctuation au seuil de 95 % pour des échantillons de taille 100



Intervalle de fluctuation au seuil de 95 % pour des échantillons de taille 1 000



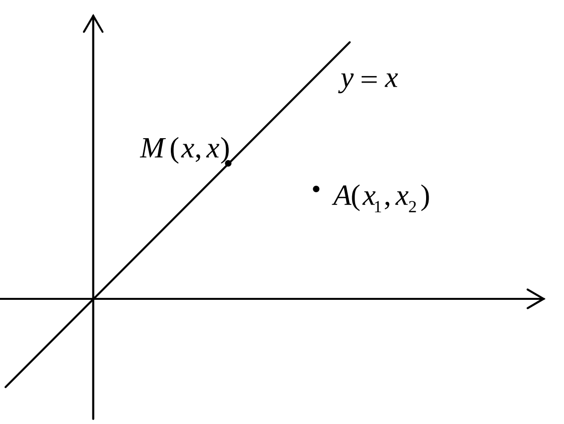
On observe que l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a_n}{n}, \frac{b_n}{n}\right]$ est sensiblement le même que l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ lorsque *n* est assez grand et *p* ni trop petit ni trop grand : pour $n = 30$, c'est le cas lorsque *p* est compris entre 0,3 et 0,7 ; pour $n = 100$, c'est le cas lorsque *p* est compris entre 0,2 et 0,8 ; pour $n = 1000$, c'est le cas lorsque *p* est compris entre 0,05 et 0,95.

COUPLE D'INDICATEURS ET PROBLEMES DE MINIMISATION

Le but de cette annexe est de présenter le lien entre un indicateur de position et un indicateur de dispersion qui lui est associé.

✖ POSITION DU PROBLEME

On se donne une série statistique quantitative $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que l'on veut « résumer » par un couple d'indicateurs donnant un renseignement sur la position et sur la dispersion de la série.



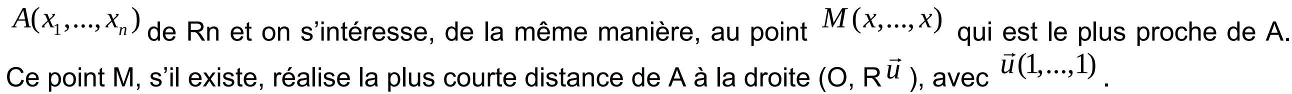
Supposons d'abord que $n = 2$ pour dégager l'idée.

La série constituée de deux valeurs est identifiée au point $A(x_1, x_2)$ du plan muni d'un repère.

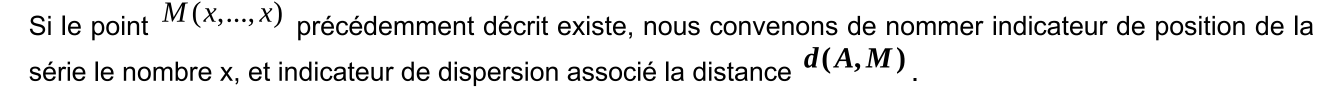
On s'intéresse au point M de la droite d'équation $y = x$ qui est le plus proche de A, si toutefois ce point existe.



Si n est quelconque, on identifie la série au point $A(x_1, \ldots, x_n)$ de Rn et on s'intéresse, de la même manière, au point $M(x, \ldots, x)$ qui est le plus proche de A.



Ce point M, s'il existe, réalise la plus courte distance de A à la droite (O, R$\vec{u}$), avec $\vec{u}(1, \ldots, 1)$.



Si le point $M(x, \ldots, x)$ précédemment décrit existe, nous convenons de nommer indicateur de position de la série le nombre x, et indicateur de dispersion associé la distance $\boldsymbol{d(A, M)}$.

I existe plusieurs distances dans Rn. Recherchons les couples d'indicateurs correspondant à trois distances classiques :

$$d_1(A, M) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - x|, \quad d_2(A, M) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2, \quad d_\infty(A, M) = \max_{i=1,\ldots,n}|x_i - x|.$$

Ces trois expressions dépendent uniquement de la variable réelle x. Dans la suite, nous les notons plus simplement $d_1(x)$, $d_2(x)$ et $d_\infty(x)$.

✖ ÉTUDE DES TROIS FONCTIONS d_1, d_2 ET d_∞

Commençons par étudier la fonction d_2. Si $\bar{x}$ désigne la moyenne arithmétique des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, alors on a :

$$d_2(x) - d_2(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i - x)^2 - (x_i - \bar{x})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x)(2x_i - x - \bar{x}) = (\bar{x} - x)^2 \geq 0.$$

Donc $d_2(x) - d_2(\bar{x}) \geq 0$.

Ainsi pour tout x, $d_2(x) \geq d_2(\bar{x})$. La valeur minimale de la fonction d_2 est atteinte en $x = \bar{x}$ et est égale à la variance σ^2 de la série statistique. La moyenne $\bar{x}$ est donc associée assez naturellement à l'écart-type via cette propriété. On aurait pu aussi étudier les variations de la fonction d_2 et montrer qu'elle admet un unique minimum au point $x = \bar{x}$.

Conclusion : avec la distance d_2, le couple d'indicateurs associé à la série est le couple (moyenne, écart-type).

Le cas de la fonction d_1 est moins courant dans la littérature. On commence par ordonner par ordre croissant les observations, et on suppose donc désormais que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Un calcul un peu plus fastidieux amène à distinguer deux cas :

- si *n* est impair (égal à $2p+1$), d_1 a un unique minimum atteint en $x = x_{p+1}$;
- si *n* est pair (égal à $2p$), d_1 admet tout point de l'intervalle $[x_p ; x_{p+1}]$ comme minimum.

Dans les deux cas, une valeur qui minimise d_1 est une médiane *Me* de la série statistique. Comme on l'avait déjà noté dans les classes du collège, dans le cas d'une série comportant un nombre pair d'observations, une médiane n'est pas définie de manière univoque et il appartient donc de choisir une convention si on veut définir "la" médiane. Néanmoins, on peut remarquer que la valeur minimale de d_1 obtenue est $d_1(Me) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - Me|$ qui est l'écart absolu moyen à la médiane. Ainsi une médiane est associée naturellement à cet écart moyen. Bien entendu, cet indicateur de dispersion est bien moins utilisé que l'écart interquartile $Q_3 - Q_1$.

Conclusion : avec la distance d_1, le couple d'indicateurs associé à la série est le couple (médiane, écart moyen à la médiane).

La fonction d_∞ admet un unique minimum en $x^* = \frac{1}{2}(x_1 + x_n)$, milieu des deux valeurs extrêmes. C'est un indicateur de position qui n'est pas répandu, mais il est associé à un paramètre de dispersion qui, lui, est plus connu : la valeur minimale de d_∞ obtenue en x^* est égale à la moitié de l'étendue $x_n - x_1$.

Conclusion : avec la distance d_∞, le couple d'indicateurs associé à la série est le couple (milieu des extrêmes, demi-étendue).

LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Pour une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant comme espérance commune *m* et comme variance σ^2, la loi faible des grands nombres établit que pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité que la moyenne empirique $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ s'écarte de *m* d'au moins ε tend vers 0 quand *n* tend vers l'infini, ce qui s'écrit formellement :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

On propose de montrer ce résultat dans le cas particulier d'un schéma de Bernoulli et on note S_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès. La variable aléatoire S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où *p* est la probabilité d'obtenir un succès.

On se donne $\varepsilon > 0$ et on majore :

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left| S_n - np\right| \geq n\varepsilon\right) = P\left(\left| S_n - E(S_n)\right| \geq n\varepsilon\right) \text{ où } S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{E\left[(S_n - E(S_n))^2\right]}{n^2\varepsilon^2}$$

où on a utilisé l'inégalité de Tchebychev qui stipule que pour une variable aléatoire *Z* admettant une variance, on a pour tout nombre réel $a > 0$: $P(|Z - E(Z) \geq a|) \leq \frac{\mathrm{Var}(Z)}{a^2}$.

Comme la variance d'une loi binomiale de paramètres *n* et *p* est égale à $np(1-p)$ et que son espérance est np, on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1} X_k - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = 0.$$

On dit aussi que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en probabilité[7] vers *p* quand *n* tend vers l'infini. Ceci prouve la loi faible des grands nombres dans le schéma de Bernoulli.

La preuve du cas général pour une suite quelconque de variables aléatoires indépendantes et de même loi se fait de manière analogue en utilisant le fait que la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances.

Le *théorème central-limit (terminologie anglo-saxonne)* ou *théorème de la limite centrée* donne des précisions sur la convergence de la moyenne empirique $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ vers la moyenne commune *m*. Ce

---

[7] Il existe une loi forte qui correspond à un autre type de convergence, la convergence presque sûre.

théorème indique comment se comporte, lorsque *n* tend vers l'infini, la probabilité que l'erreur $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m$ appartienne à un intervalle $[a\,,b]$ quelconque.

ANNEXE 3

ESPERANCE DE LA LOI GEOMETRIQUE TRONQUEE : APPROCHES EXPERIMENTALES

Calculatrice

```
PROGRAM:TPSATTEN
:suite(0,I,1,200
)→L1
:For(N,1,200)
:0→K
:0→A
:While A=0 et K<
100
```

```
PROGRAM:TPSATTEN
:ent(NbrAléat+0.
07)→A
:K+1→K
:End
:If A=0
:Then
:A→L1(N)
```

```
PROGRAM:TPSATTEN
:A→L1(N)
:Else
:K→L1(N)
:End
:End
:Disp moyenne(L1
)
```

Algorithme modifié sur Algobox

```
VARIABLES
    n EST_DU_TYPE NOMBRE
    p EST_DU_TYPE NOMBRE
    k EST_DU_TYPE NOMBRE
    a EST_DU_TYPE NOMBRE
    T EST_DU_TYPE NOMBRE
    j EST_DU_TYPE NOMBRE
    m EST_DU_TYPE NOMBRE
    l EST_DU_TYPE LISTE
DEBUT_ALGORITHME
    AFFICHER "loi géométrique tronquée de paramètres n et p"
    LIRE n
    LIRE p
    AFFICHER "n = "
    AFFICHER n
    AFFICHER "        p = "
    AFFICHER p
    AFFICHER "série de valeurs :"
    LIRE T
    POUR k ALLANT_DE 1 A T
        DEBUT_POUR
        a PREND_LA_VALEUR 0
        j PREND_LA_VALEUR 0
        TANT_QUE (a==0 ET j<n) FAIRE
            DEBUT_TANT_QUE
            a PREND_LA_VALEUR floor(random()+p)
            j PREND_LA_VALEUR j+1
            FIN_TANT_QUE
        SI (a==0) ALORS
            DEBUT_SI
            l[k] PREND_LA_VALEUR a
            AFFICHER l[k]
            FIN_SI
            SINON
                DEBUT_SINON
                l[k] PREND_LA_VALEUR j
                AFFICHER l[k]
                FIN_SINON
        FIN_POUR
    m PREND_LA_VALEUR
    ALGOBOX_MOYENNE(l,1,T)
    AFFICHER "valeur moyenne de la série ="
    AFFICHER m
FIN_ALGORITHME
```

e associative

On peut faire établir l'égalité $E(X)=\frac{1}{p}\left[1-(1+np)(1-p)^{n}\right]$, puis utiliser un outil numérique ou graphique pour émettre une conjecture sur la limite de $E(X)$ lorsque *n* tend vers l'infini.

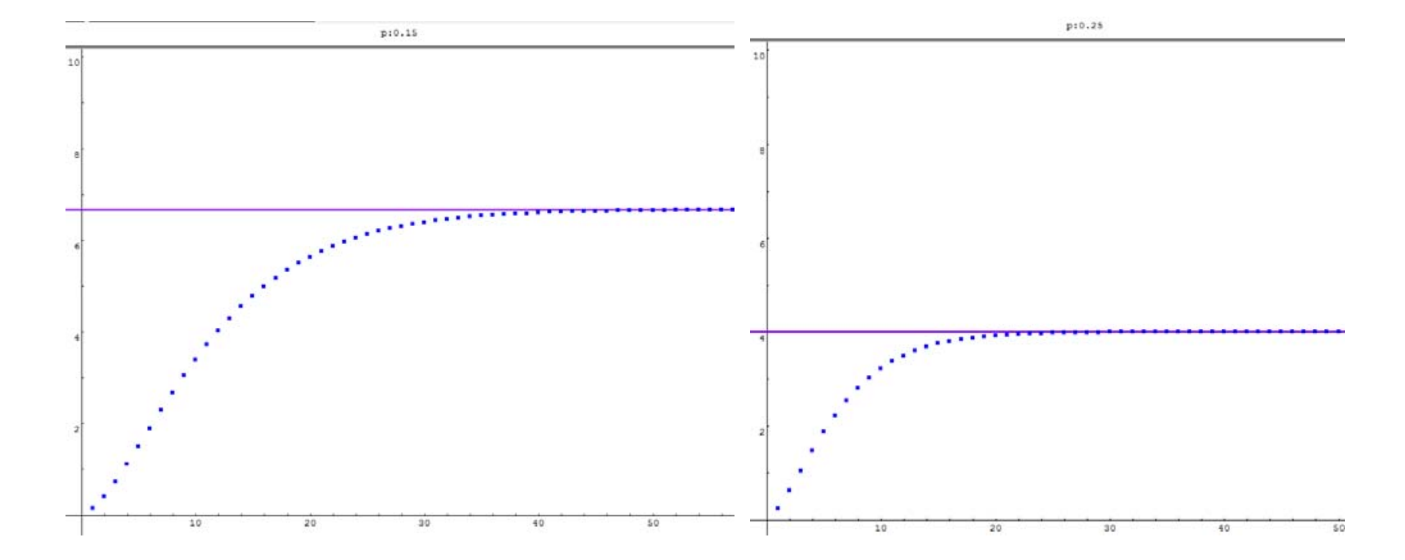
Point de vue numérique : on construit une feuille de calcul donnant les valeurs de $E(X)$ pour une valeur de *p*, en fonction de *n*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	valeur de p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
2											
3	valeur de n	E(X)	E(X)	E(X)	E(X)	E(X)	E(X)	E(X)	E(X)	E(X)	E(X)
4	1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
5	5	1.14265	1.7232	1.93275	1.9168	1.78125	1.5984	1.41295	1.248	1.11105	1
6	10	3.0264312	3.38938726	2.95669967	2.42441728	1.98828125	1.66544333	1.42850394	1.24999885	1.11111111	1
7	15	4.8527217	4.29631256	3.24629471	2.49177176	1.9994812	1.66664877	1.42857119	1.25	1.11111111	1
8	20	6.35270036	4.71176962	3.31471514	2.49917736	1.99997902	1.66666643	1.42857143	1.25	1.11111111	1
9	25	7.48735704	4.8866632	3.32953364	2.49992182	1.9999992	1.66666666	1.42857143	1.25	1.11111111	1
10	30	8.30435367	4.9566721	3.33258202	2.49999282	1.99999997	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
11	35	8.87358002	4.98377407	3.33318812	2.49999936	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
12	40	9.26095585	4.99401847	3.33330574	2.49999994	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
13	45	9.519962	4.99782219	3.33332816	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
14	50	9.69077349	4.99921501	3.33333237	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
15	55	9.80218857	4.99971939	3.33333316	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
16	60	9.87420928	4.99990039	3.3333333	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
17	65	9.92041625	4.99996485	3.33333333	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
18	70	9.9498737	4.99998766	3.33333333	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
19	75	9.96855098	4.99999569	3.33333333	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
20	80	9.98033729	4.9999985	3.33333333	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
21	85	9.98774433	4.99999948	3.33333333	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
22	90	9.99238227	4.99999982	3.33333333	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
23	95	9.99527689	4.99999994	3.33333333	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
24	100	9.99707825	4.99999998	3.33333333	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
25											
26	valeur de 1/p	10	5	3.33333333	2.5	2	1.66666667	1.42857143	1.25	1.11111111	1
27											

Point de vue graphique : on construit (ici sur géoplan) la représentation graphique de la suite définie par $u_n=\frac{1}{p}\left[1-(1+np)(1-p)^{n}\right]$ et on observe une stabilisation pour de grandes valeurs de n.

Pour $p=0{,}2$ par exemple, il semble que les valeurs se stabilisent autour de 5, d'où l'idée de tracer la droite d'équation $y=\frac{1}{p}$.

$p=0{,}15$ $\qquad$ $p=0{,}25$


p:0.15
10
8
6
4
2
10
20
30
40
50
p:0.25
10
8
6
4
2
10
20
30
40
50

ANNEXE 4

LOI GEOMETRIQUE

On répète dans des conditions identiques une épreuve de Bernoulli de paramètre *p* et on arrête le processus au premier succès obtenu. La *loi géométrique de paramètre p* est par définition la loi de la variable aléatoire *X*, rang du premier succès.

- Quelques propriétés de la loi géométrique

La variable *X* prend ses valeurs dans **N*** et pour tout entier naturel *k* non nul : $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.

On vérifie facilement que : $\sum_{k\geq 1} P(X=k)=1$ (somme d'une série géométrique)

On montre que : $E(X)=\frac{1}{p}$ (en utilisant la dérivée d'une série géométrique) et que $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$ (en utilisant entre autre la dérivée seconde d'une série géométrique).

Il est à noter que l'espérance de la loi géométrique de paramètre *p* est la limite de l'espérance de la loi géométrique tronquée de paramètres *n* et *p*.

- Précautions en classe de Première

La variable *X* prend toutes les valeurs entières sauf 0. L'univers associé n'est donc pas fini et ne figure pas aux programmes du lycée.

- Une approche à l'aide de l'algorithmique

Le processus au cours duquel on répète dans des conditions identiques une épreuve de Bernoulli de paramètre *p* et que l'on arrête au premier succès obtenu, est très facile à mettre en œuvre avec un algorithme. L'instruction **ent(NbrAléat + *p*)** génère un nombre aléatoire entier qui vaut 1 avec une fréquence de *p* et 0 avec une fréquence de $(1-p)$. On notera que, dans la pratique, le programme correspondant s'arrête toujours.

Langage naturel

Entrée :	valeur de *p*
Initialisation :	*X* prend la valeur 0
	k prend la valeur 0
Traitement :	tant que *k* = 0
	k prend la valeur ent(NbrAléaț *p*)
	X prend la valeur *X* + 1
	Fin du "while"
Sortie :	valeur de *X*

Sur calculatrice

```
PROGRAM:LOIGEOM
:Prompt P
:0→X
:0→K
:While K=0
:ent(NbrAléat+P)
→K
:X+1→X
```

```
PROGRAM:LOIGEOM
:While K=0
:ent(NbrAléat+P)
→K
:X+1→X
:End
:Disp X
:
```

modèle TI 84+

Sous Algobox

```
VARIABLES
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  k PREND_LA_VALEUR 0
  X PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (k==0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    k PREND_LA_VALEUR floor(random()+p)
    X PREND_LA_VALEUR X+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "X égale "
  AFFICHER X
FIN_ALGORITHME
```

Sous Scilab

```
//loi geometrique
//X=rang du premier succes
X=0;
a=0;
p=input("donner la probabilite d''un succes : ");
while (a==0)
  a=floor(rand()+p);
  X=X+1;
  afficher(["a="+string(a),"X="+string(X)])
  end
afficher("X= "+string(X))
```

QUELQUES OUTILS DE CALCUL AVEC LA LOI BINOMIALE

- Tableur

La syntaxe LOI.BINOMIALE(*k* ; *n* ; *p* ; FAUX) ou LOI.BINOMIALE(*k* ; *n* ; *p* ; 0) renvoie la probabilité $P(X=k)$, pour une variable aléatoire *X* de loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

La syntaxe LOI.BINOMIALE(*k* ; *n* ; *p* ; VRAI) ou LOI.BINOMIALE(*k* ; *n* ; *p* ; 1) renvoie la probabilité cumulée $P(X \leq k)$.

La syntaxe COMBIN(*n*; *k*) donne la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

- Un logiciel : Scilab

Calcul des coefficients binomiaux

coef binomiaux.sce

```
n=input("Entrer n :")
coef=[0]
for i=1:n+1
  for j=1:n+1
    if j==1 then
      coef(i,j)=1;
    else coef(i,j)=0
    end;
  end;
end;
for i=2:n+1
  for j=2:i
    coef(i,j)=coef(i-1,j-1)+coef(i-1,j);
  end;
end;
afficher ("Coefficents binomiaux pour n="+string(n))
afficher (coef(n+1,:))
```

L'algorithme ci-dessus affiche les coefficients $\binom{n}{k}$ pour *k* compris entre 0 et *n*, la valeur de *n* étant celle introduite au départ. (Les colonnes d'une matrice sont repérées à partir de 1, ce qui explique la présence du $n+1$).

L'algorithme ci-après affiche le triangle de Pascal.

coef binomiaux pascal.sce

```
n=input("Entrer n :")
coef=[0]
for i=1:n+1
  for j=1:n+1
    if j==1 then
      coef(i,j)=1;
    else coef(i,j)=0
    end;
  end;
end;
for i=2:n+1
  for j=2:i
    coef(i,j)=coef(i-1,j-1)+coef(i-1,j);
  end;
end;
for j=1:n+1
  afficher (coef(n+1,j))
end;
```

- Deux modèles de calculatrice

Modèles TI (84, mais aussi 83 et 82 avec des modifications mineures)

✓ **Calcul de probabilités avec une loi binomiale**

- Probabilité de l'événement $\{X = k\}$

Instruction **DISTR** (touches **2ND** **VARS**) puis sélectionner **binomFdp(** .

Syntaxe : (nombre d'essais, probabilité de succès, valeur désirée pour la probabilité).

- Probabilité de l'événement $\{X \leq k\}$

Instruction **DISTR** (touches **2ND** **VARS**) puis sélectionner **binomFRép(**.

Syntaxe : (nombre d'essais, probabilité de succès, valeur désirée pour la probabilité).

✓ **Valeur des coefficients binomiaux**

Touche **MATH** puis **PRB** et instruction **Combinaison**. Syntaxe *« n, combinaison, k »*.

Modèle Casio (graph 35+)

✓ **Calcul de probabilités dans le cadre d'une loi binomiale**

- Probabilité de l'événement $\{X = k\}$

Icône STAT, choisir **DIST** (touche **F5**) et **BINM** (touche **F5**). Enfin, **Bpd** (touche **F1**) et **Var** (touche **F2**).

Renseigner la boîte de dialogue :

Data : variable ; *x* : valeur désirée pour la probabilité ; Numtrial : nombre d'essais ; *p* : probabilité de succès

- Probabilité de l'événement $\{X \leq k\}$

Icône STAT puis saisir dans la liste 1 les valeurs prises par *k* : 0, 1, …, *n*.

Choisir **DIST** (touche **F5**) et **BINM** (touche **F5**). Enfin, **Bcd** (touche **F2**).

Renseigner la boîte de dialogue :

Data : List ; *x* : List1 ; Numtrial : nombre d'essais ; *p* : probabilité de succès

Pour chaque valeur de *k*, la valeur de la probabilité de l'événement $\{X \leq k\}$ est affichée dans une liste.

✓ **Valeur des coefficients binomiaux**

Touche **OPTN** puis **PRB** et instruction **nCr**. Syntaxe *: « n nCr k »*.

ANNEXE 6

COEFFICIENTS BINOMIAUX ET QUADRILLAGE

L'objectif est de donner une représentation des coefficients binomiaux à partir des trajets sur un quadrillage. Ce travail peut être un sujet d'étude pour la série S.

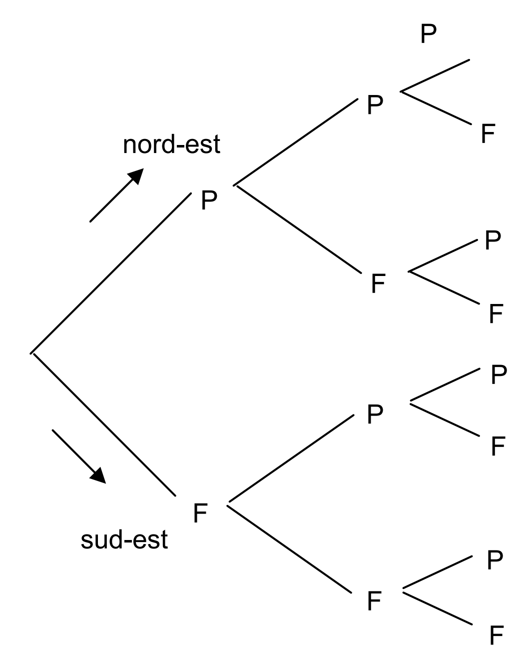
De l'arbre au quadrillage

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée.

Il est d'usage de schématiser les huit issues de cette expérience aléatoire par les huit trajets dans un arbre tel que celui représenté ci-contre.

Sur le schéma, et pour chaque lancer, on a codé « P » pour « pile » et « F » pour « face ».

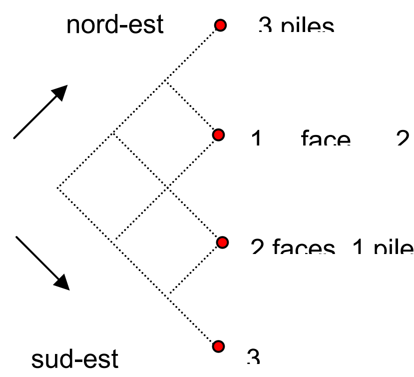
On peut convenir d'orienter la branche de l'arbre vers le nord-est pour chaque résultat « pile », vers le sud-est pour chaque résultat « face ».



On peut envisager une simplification, toujours avec la même convention : chaque déplacement vers le nord-est schématise un résultat « pile », chaque déplacement vers le sud-est schématise un résultat « face ».

L'arbre obtenu pour la même expérience aléatoire n'a plus que 4 terminaisons au lieu de 8. Toutes les issues donnant le même nombre de « pile » et de « face » correspondent en effet à plusieurs trajets qui aboutissent à une unique terminaison.

On retrouve ainsi, par exemple, qu'il y a trois trajets donnant 1 « face » et 2 « pile », les trajets étant limités aux deux directions précédentes.

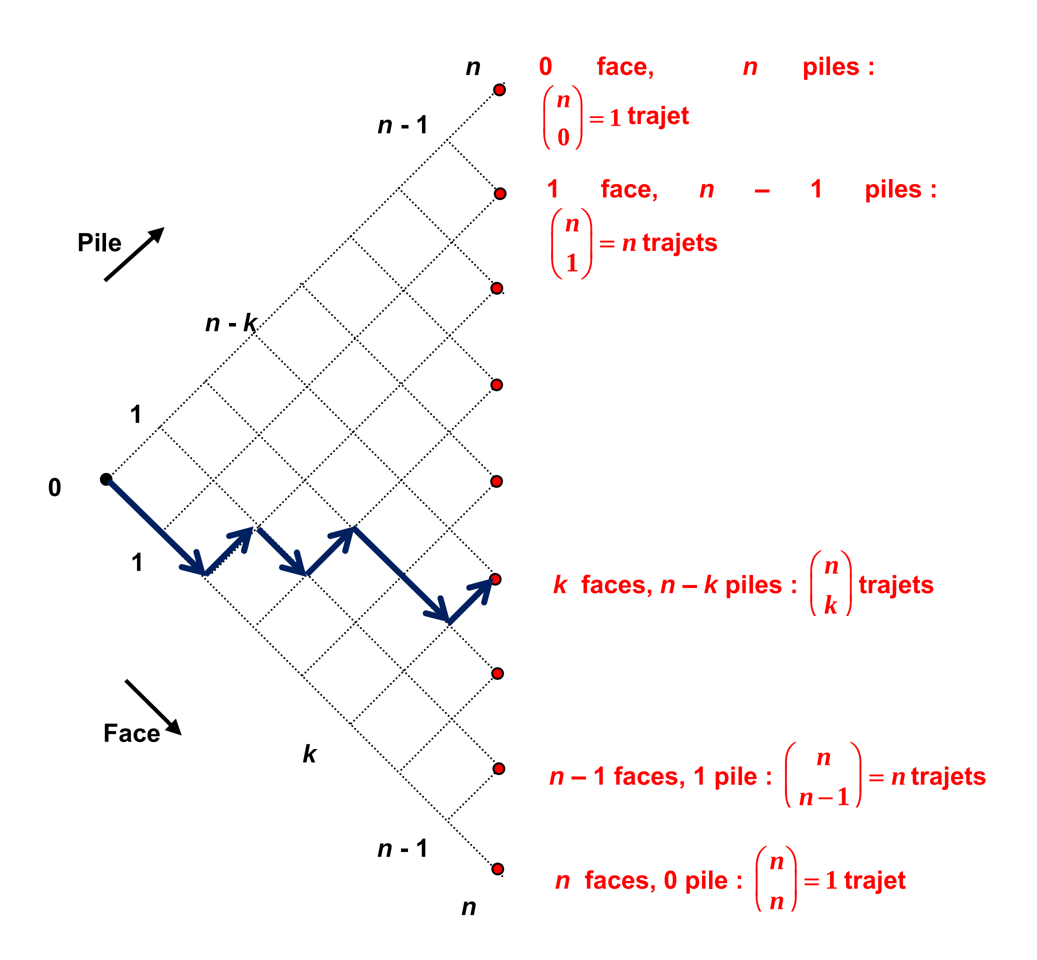


Généralisons cela à *n* lancers ($n \geq 1$).

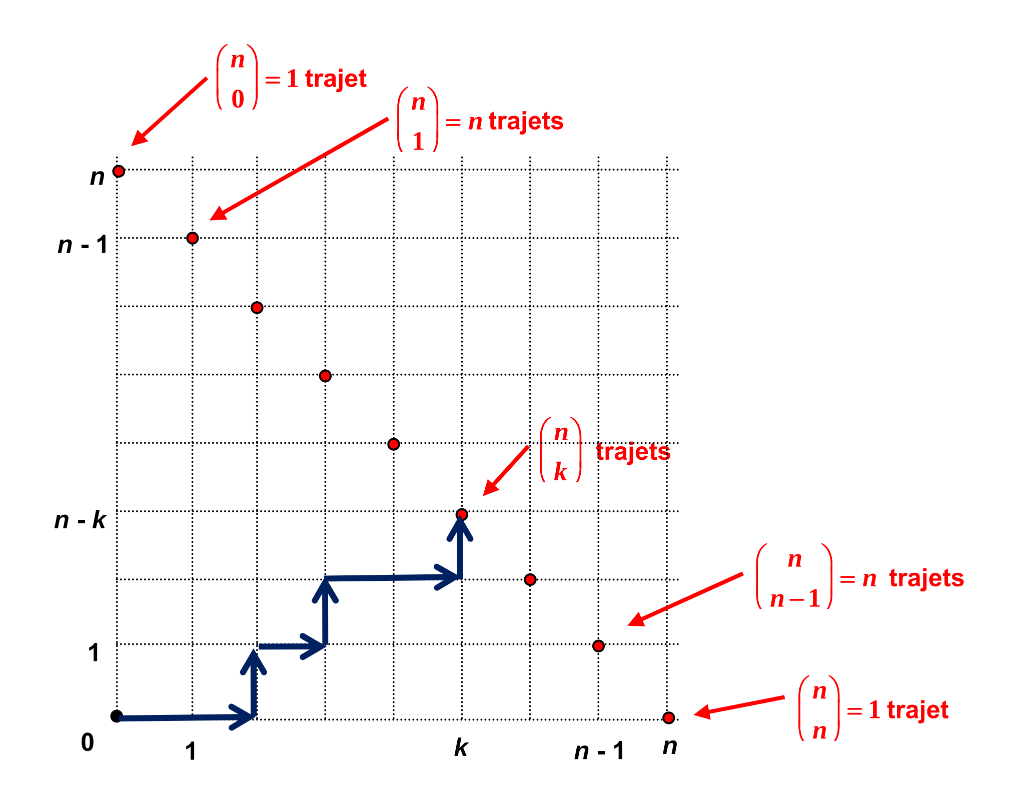
La variable *X* qui comptabilise le nombre de « face » suit une loi binomiale de paramètres *n* et 0,5.

L'arbre correspondant aura $n+1$ terminaisons correspondant au résultat « *k* faces, *n* – *k* piles », c'est-à-dire à l'événement $\{X = k\}$, pour tout *k* tel que $0 \leq k \leq n$.

On sait que $P(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et que chaque trajet a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Il en résulte que, pour $0 \leq k \leq n$, le nombre de trajets aboutissant à la terminaison $\{X = k\}$ est égal à $\binom{n}{k}$.



Faisons tourner la figure de 45° dans le sens trigonométrique : les nœuds du schéma précédent deviennent des points à coordonnées entières dans un repère orthogonal « naturel ».



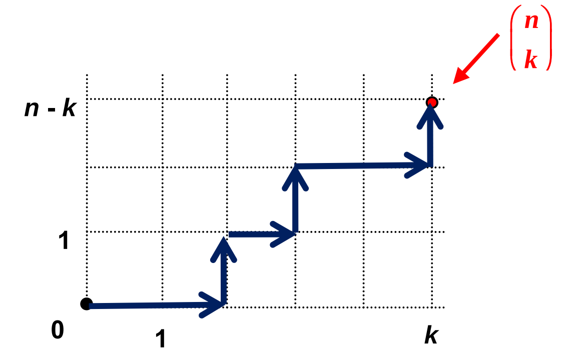
Les trajets considérés sont ceux partant de l'origine et aboutissant aux points de coordonnées $(k,n-k)$, en suivant toujours les directions vers la droite ou vers le haut (l'un d'entre eux est représenté sur la figure).

Interprétation des coefficients binomiaux

Retenons le résultat suivant :

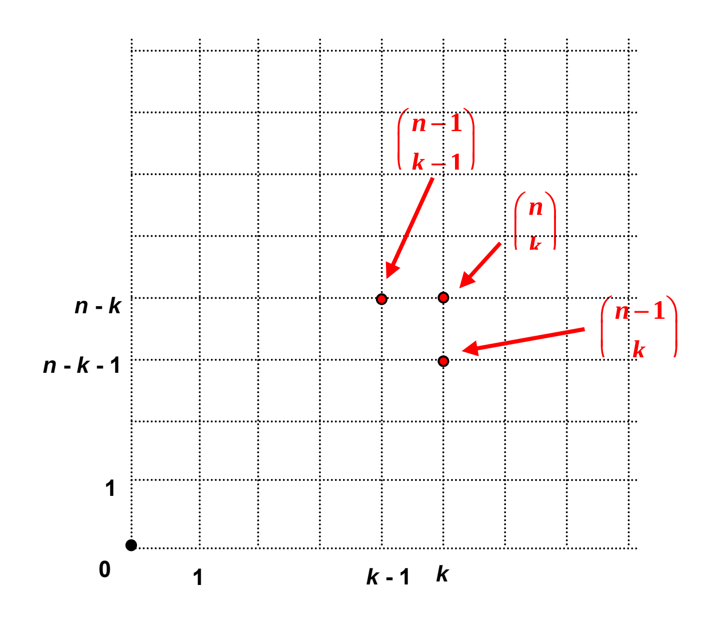
Le nombre $\binom{n}{k}$ représente le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(k,n-k)$, en suivant toujours les directions vers la droite ou vers le haut.

L'un de ces trajets est représenté ci-contre.



Formule de Pascal

Cette interprétation fournit une démonstration géométrique simple de la formule de Pascal.



Supposons que $1 \le k \le n-1$.

Les trajets joignant l'origine au point de coordonnées $(k,n-k)$ se subdivisent en deux catégories :

- ceux passant par le point de coordonnées $(k,n-k-1)$, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$;
- ceux passant par le point de coordonnées $(k-1,n-k)$, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$.

On en déduit que, pour $1 \le k \le n-1$: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (formule de Pascal).

<u>Remarque</u>

Cette interprétation des coefficients binomiaux permet l'obtention de plusieurs formules sommatoires classiques. Le développement de ce point de vue n'est pas un objectif du programme.

Application : le problème des pilules

Argan se croit malade, il doit prendre $2n$ pilules dans la journée. Il dispose de deux boîtes identiques A et B et, chaque matin, il place n pilules dans chacune de ses deux boîtes. À chaque prise, il choisit une des deux boîtes de façon équiprobable, puis prend tant que c'est possible une pilule dans la boîte choisie. Au bout d'un certain temps l'une des boîtes est vide.

Combien l'autre boîte contient-elle de pilules en moyenne à ce moment-là ?

Simulation de l'expérience sur Algobox

Voici un algorithme simulant 1000 expériences, avec $n = 10$.

AlgoBox Test

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  c PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A 1000
    DEBUT_POUR
    a PREND_LA_VALEUR 10
    b PREND_LA_VALEUR 10
    TANT_QUE (a!=0 ET b!=0) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      SI (random()<0.5) ALORS
        DEBUT_SI
        a PREND_LA_VALEUR a-1
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          b PREND_LA_VALEUR b-1
          FIN_SINON
      FIN_TANT_QUE
    c PREND_LA_VALEUR c+MAX(a,b)
    FIN_POUR
  d PREND_LA_VALEUR c/1000
  AFFICHER "Nombre moyen de pilules = "
  AFFICHER d
FIN_ALGORITHME
```

RÉSULTATS :

```
***Algorithme lancé***
Nombre moyen de pilules = 3.551
***Algorithme terminé***
```

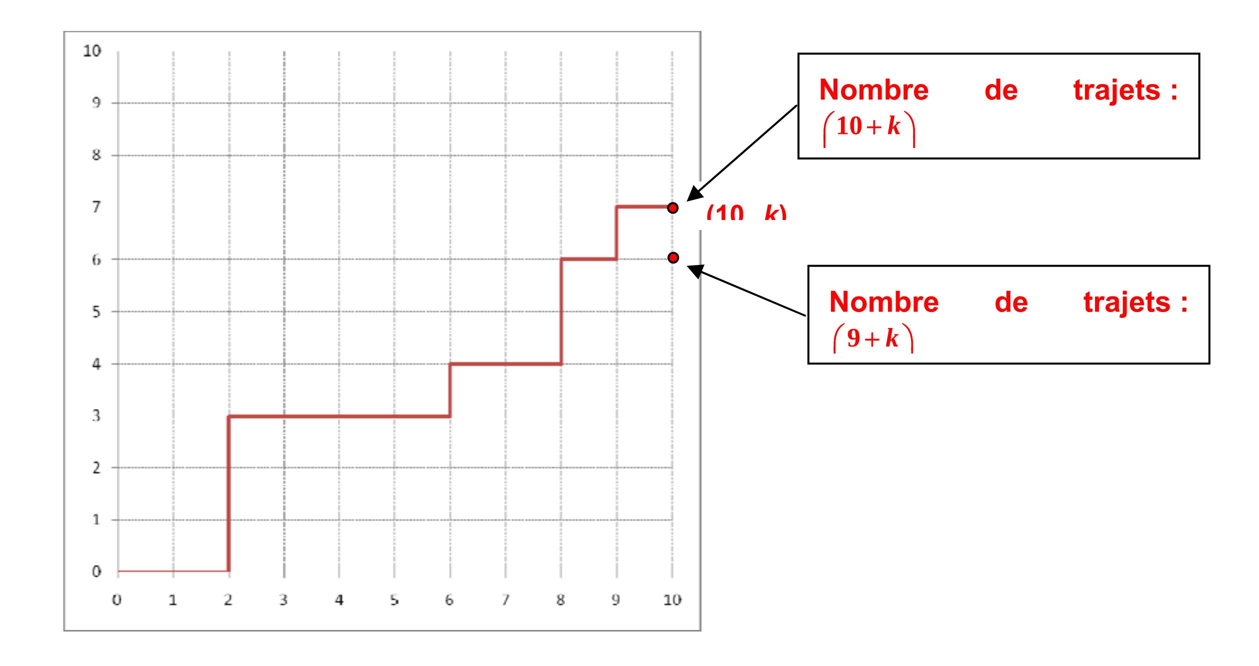
Traitement mathématique

On peut d'abord envisager un traitement exhaustif pour une petite valeur de *n* ($n = 3$ par exemple).

Pour une valeur plus élevée ($n = 10$), il est intéressant de visualiser chaque expérience comme une marche aléatoire sur un carré. Un bord est atteint (à droite ou en haut) lorsqu'une boîte est vide.

Ainsi une expérience pour laquelle il ne reste plus aucune pilule dans la boîte A et 10 pilules dans la boîte B correspond à l'unique marche aléatoire aboutissant au point de coordonnées (10, 0).

Si $1 \leq k \leq 9$, une expérience pour laquelle il ne reste plus aucune pilule dans la boîte A et $10 - k$ pilules dans la boîte B correspond à une marche aboutissant au point de coordonnées (10, *k*), sans passer par le point de coordonnées $(10, k-1)$.



C'est l'occasion de réinvestir l'interprétation géométrique des coefficients binomiaux.

Pour $1 \leq k \leq 9$, le nombre de chemins allant de l'origine au point de coordonnées $(10, k)$ sans passer par le point de coordonnées $(10, k-1)$ est égal à $\binom{10+k}{10} - \binom{9+k}{10}$, soit encore $\binom{9+k}{9}$ d'après la formule de Pascal.

Puisqu'une telle expérience correspond à la consommation de $10+k$ pilules, la probabilité de l'événement correspondant est donc égale à $\dfrac{\binom{9+k}{9}}{2^{10+k}}$.

Notons *X* la variable aléatoire correspondant au nombre de pilules restant dans une boîte dès que l'autre est vide. Les deux boîtes jouent un rôle symétrique ; on en déduit que :

- $P(X = 10) = 2 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1}{2^9}$;
- pour $1 \leq k \leq 9$, $P(X = 10-k) = 2 \times \dfrac{\binom{9+k}{9}}{2^{10+k}} = \dfrac{\binom{9+k}{9}}{2^{9+k}}$.

Remarquons que la dernière égalité englobe la première pour $k = 0$.

On peut utiliser un logiciel de calcul formel pour vérifier que : $\sum_{k=0}^{9} P(X = 10-k) = \sum_{k=0}^{9} \dfrac{\binom{9+k}{9}}{2^{9+k}} = 1$.

Il en est de même pour le calcul de l'espérance $E(X) = \sum_{k=0}^{9} (10-k) \times \dfrac{\binom{9+k}{9}}{2^{9+k}} \approx 3{,}524$.

La simulation précédemment effectuée est en accord avec le résultat.

COMPLEMENTS SUR LA PRISE DE DECISION

Les compléments portent sur deux points :

- ✓ la notion d'intervalle de fluctuation unilatéral ;
- ✓ la notion d'erreur attachée à la prise de décision.

Ces compléments ne sont pas des attendus du programme.

✘ A – L'AFFAIRE WOBURN

[D'après DUCEL Y., SAUSSEREAU B. : « La prise de décision de la Seconde à la Première », *Repères IREM*, 85, octobre 2011, Topiques éditions, Nancy (à paraître)]

Le document ressource des programmes de mathématiques de lycée professionnel propose la situation suivante :

Une petite ville des États-Unis, Woburn, a connu 9 cas de leucémie parmi les 5969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979. La fréquence des leucémies pour cette tranche d'âge aux États-Unis est égale à 0,00052. (Source : *Massachussetts Department of Public Health*).

Les autorités concluent qu'il n'y a rien d'étrange dans cette ville. Qu'en pensez-vous ?

De façon plus précise, on peut reformuler la question sous la forme suivante : le nombre de cas observés est-il **significatif** d'une situation anormale pour cette ville ou bien peut-on considérer qu'il est simplement le fruit du hasard ?

Pour mieux faire comprendre le contexte d'expérience aléatoire sous-jacent à cette situation, on la transpose en termes de schéma d'urne : la population des garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979 des États-Unis sera assimilée à une urne contenant 100 000 boules rouges ou vertes où

- les boules rouges, au nombre de 52, représentent les personnes atteintes de leucémie,
- les boules vertes représentent les personnes non atteintes.

On peut considérer, en première approximation, que la population des 5969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979 à Woburn est assimilable à l'observation d'un échantillon (au sens de la définition donnée en Seconde) de 5969 boules, prélevées de façon équiprobable et avec remise dans l'urne.

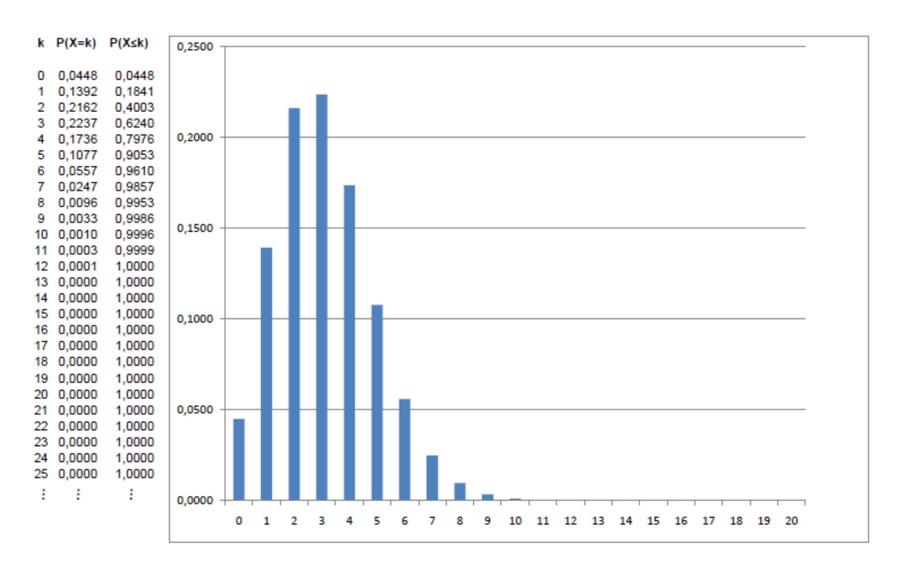
La question posée relève alors d'un problème de **prise de décision**. Nous ne pouvons pas utiliser la démarche préconisée dans le programme de Seconde car les conditions de sa validité ne sont pas satisfaites. En effet ici n vaut 5969, $n > 25$, mais p vaut 0,00052, valeur très inférieure à 0,2.

D'après le schéma d'urne adopté, l'expérience aléatoire de départ E : « *Extraire une boule de l'urne et noter sa couleur* », est une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}00052$. L'expérience aléatoire attachée à la situation est l'expérience aléatoire obtenue par 5969 « répétitions » à l'identique de E. On associe à cette nouvelle expérience aléatoire un modèle probabiliste (Ω, P) et la variable aléatoire X qui, à toute issue ω de l'expérience fait correspondre le nombre (entier), noté $X(\omega)$, de boules rouges obtenues dans l'issue ω. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n ; p) où n vaut 5969 et où p est inconnu.

- **La situation est-elle normale à Woburn ?**

Se poser la question de savoir si la situation est normale à Woburn, revient à se demander si l'échantillon observé peut être considéré comme issu d'une population pour laquelle la proportion de cas de leucémie est $p = 0{,}00052$ comme dans tout le pays. Dans le cas contraire on sera amené à considérer que $p \neq 0{,}00052$.

La figure 1 représente le diagramme[8] en bâtons de la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 5969$ et $p = 0{,}00052$, car on raisonne sous l'hypothèse de travail que la situation est normale à Woburn, c'est-à-dire que $p = 0{,}00052$.



k	P(X=k)	P(X≤k)
0	0,0448	0,0448
1	0,1392	0,1841
2	0,2162	0,4003
3	0,2237	0,6240
4	0,1736	0,7976
5	0,1077	0,9053
6	0,0557	0,9610
7	0,0247	0,9857
8	0,0096	0,9953
9	0,0033	0,9986
10	0,0010	0,9996
11	0,0003	0,9999
12	0,0001	1,0000
13	0,0000	1,0000
14	0,0000	1,0000
15	0,0000	1,0000
16	0,0000	1,0000
17	0,0000	1,0000
18	0,0000	1,0000
19	0,0000	1,0000
20	0,0000	1,0000
21	0,0000	1,0000
22	0,0000	1,0000
23	0,0000	1,0000
24	0,0000	1,0000
25	0,0000	1,0000
⋮	⋮	⋮

Fig. 1 : Diagramme en bâtons et probabilités cumulées de la loi binomiale pour n=5969 et p=0,00052

Un raisonnement analogue à celui fait pour les exemples précédents de prise de décision conduit à un intervalle de fluctuation, que nous qualifierons par la suite de **bilatéral**, au seuil de 95% égal à [0 ; 7] pour la variable de décision *X.* On pourrait de même définir en adaptant les raisonnements précédents un intervalle de fluctuation bilatéral **au seuil de 90%** : c'est l'intervalle [1 ; 6]. Les fréquences correspondantes sont données dans le tableau de la figure 2 :

Seuil de 95 %		
IF bilatéral	Effectif	Fréquence
Borne inf	0	0,0000
Borne sup	7	0,0012
p-1/racine n		-0,0124
p+1/racine n		0,0135

Seuil de 90 %		
IF bilatéral	Effectif	Fréquence
Borne inf	1	0,0002
Borne sup	6	0,0010

Fig. 2 : Intervalles de fluctuations bilatéraux aux seuils de 95% et de 90%

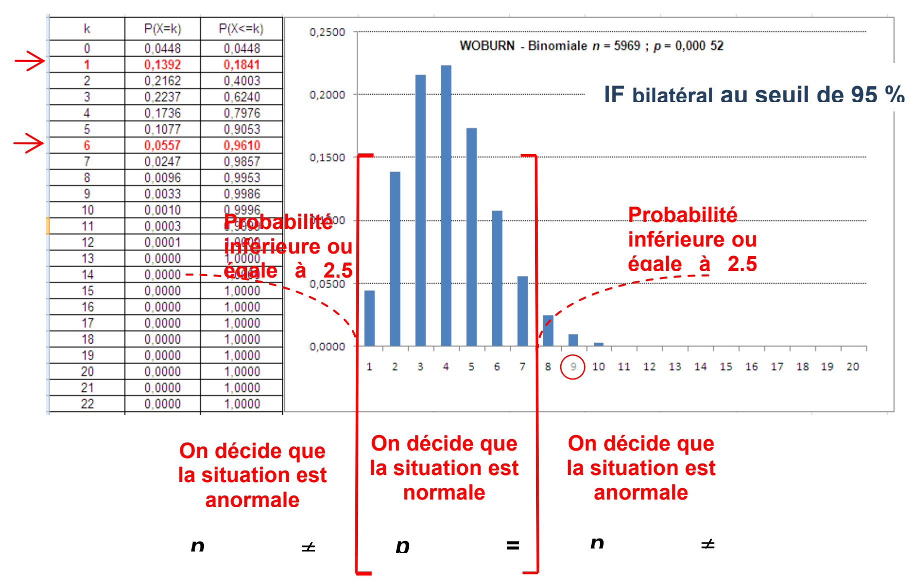
On remarque que l'intervalle de fluctuation bilatéral [0 ; 0,0012] au seuil de 95% trouvé ici est extrêmement différent de l'intervalle de fluctuation donné par la formule de la classe de seconde :

$$\left[p_0 - \frac{1}{\sqrt{n}}, p_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}00052 - \frac{1}{\sqrt{5969}}, 0{,}00052 + \frac{1}{\sqrt{5969}}\right] = [-0{,}0124 ; 0{,}0135]$$

Il est clair, comme on l'a déjà noté, que la formulation donnée en seconde n'est pas du tout adaptée au contexte de cette situation, ni aux conditions de l'observation, pour prendre la décision.

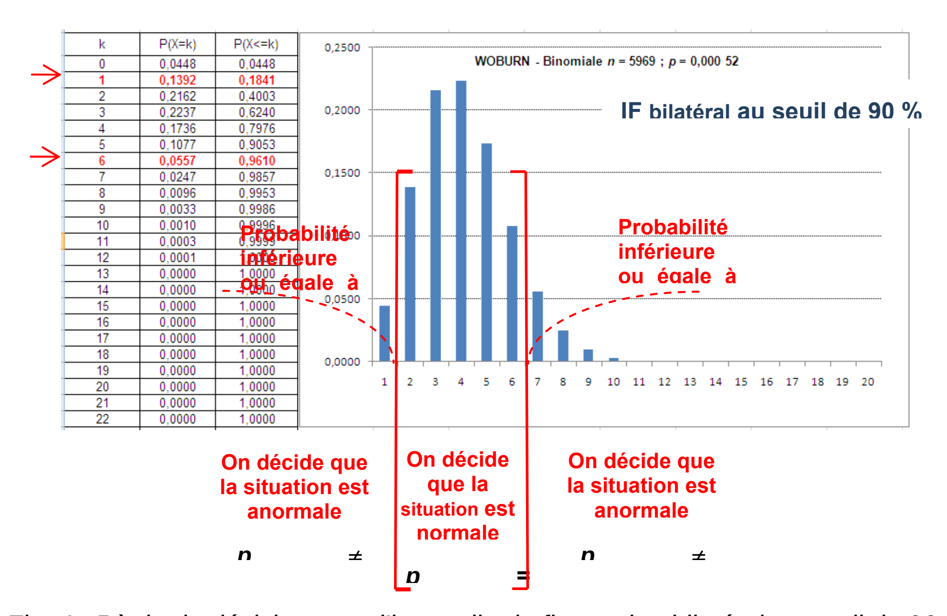
Les règles de décision correspondant à chacun des intervalles de fluctuation aux seuils respectifs de 95% et de 90% sont représentées dans les deux figures 3 et 4 :

[8] Ce diagramme (Fig. 1) n'est pas obtenu par simulation mais par calcul en utilisant la fonctionnalité LOI.BINOMIALE du tableur.



k	P(X=k)	P(X<=k)
0	0,0448	0,0448
1	0,1392	0,1841
2	0,2162	0,4003
3	0,2237	0,6240
4	0,1736	0,7976
5	0,1077	0,9053
6	0,0557	0,9610
7	0,0247	0,9857
8	0,0096	0,9953
9	0,0033	0,9986
10	0,0010	0,9996
11	0,0003	[illegible]
12	0,0001	[illegible]
13	0,0000	1,0000
14	0,0000	[illegible]
15	0,0000	1,0000
16	0,0000	1,0000
17	0,0000	1,0000
18	0,0000	1,0000
19	0,0000	1,0000
20	0,0000	1,0000
21	0,0000	1,0000
22	0,0000	1,0000

Fig. 3 : Règle de décision avec l'intervalle de fluctuation bilatéral au seuil de 95 %



k	P(X=k)	P(X<=k)
0	0,0448	0,0448
1	0,1392	0,1841
2	0,2162	0,4003
3	0,2237	0,6240
4	0,1736	0,7976
5	0,1077	0,9053
6	0,0557	0,9610
7	0,0247	0,9857
8	0,0096	0,9953
9	0,0033	0,9986
10	0,0010	0,9996
11	0,0003	0,9999
12	0,0001	[illegible]
13	0,0000	1,0000
14	0,0000	[illegible]
15	0,0000	1,0000
16	0,0000	1,0000
17	0,0000	1,0000
18	0,0000	1,0000
19	0,0000	1,0000
20	0,0000	1,0000
21	0,0000	1,0000
22	0,0000	1,0000

Fig. 4 : Règle de décision avec l'intervalle de fluctuation bilatéral au seuil de 90 %

Dans les deux cas, comme l'effectif observé est $x = 9$, on est conduit à décider que le nombre de cas de leucémie observé est anormal pour une proportion de référence $p = 0{,}00052$ valable pour tout le pays.

Le traitement mathématique est analogue aux exemples traités précédemment comme nous l'avons remarqué. Cependant si on prend en compte la signification réelle du contexte de l'affaire Woburn, nous sommes amenés à modifier le regard que nous avons sur cette situation. Dans les exemples traités jusqu'à présent la logique conduit à mettre sur le même plan, lorsque la proportion *p* n'est pas p_0, le cas où la proportion est supérieure strictement à p_0 (valeur théorique retenue) et celui où la proportion est inférieure strictement à p_0.

Il en est tout autrement dans la situation de Woburn où il s'agit d'un problème qui touche à la santé publique. En cas de rejet de l'hypothèse $p = p_0$, le cas $p < p_0$ signifie, certes que la situation est anormale, mais concrètement qu'il y a, toute proportion gardée, moins de cas de leucémie que dans le reste du pays. Ce qui est une bonne chose en soi et peut rendre la ville de Woburn agréable à vivre et attractive. En revanche le cas $p > p_0$ signifie également que la situation est anormale, mais concrètement qu'il y a, toute proportion gardée, plus de cas de leucémie que dans le reste du pays. Ce qui rend la ville de Woburn plus dangereuse à habiter qu'ailleurs.

On voit ainsi que les enjeux ne sont pas les mêmes des deux côtés de l'intervalle de fluctuation. Aussi, plutôt que de se demander si la situation est normale, ce qui formellement revient à trancher entre les hypothèses $p = p_0$ et $p \neq p_0$, il vaut mieux se demander si la situation à Woburn ne serait pas, au vu du nombre de cas observé, plutôt dangereuse pour la santé publique.

- **La situation est-elle dangereuse pour la santé à Woburn ?**

Compte tenu des enjeux, c'est plutôt la question sur la dangerosité de la situation qui est pertinente dans le cas de Woburn. Il s'agit de trancher entre l'hypothèse « *La situation n'est pas dangereuse* » ce qui formellement s'écrira $p \leq p_0$ et l'hypothèse « *La situation est dangereuse* » ce qui formellement s'écrira $p > p_0$, avec $p_0 = 0{,}00052$.

Pour statuer, on trace le diagramme en bâtons de la variable aléatoire *X* qui suit la loi binomiale pour $n = 5969$ et $p = 0{,}00052$. Si le nombre de cas observé *x* est faible, il n'y aura pas lieu de penser à un danger. En revanche, si le nombre de cas observé *x* est très élevé, il y aura lieu de penser à un danger. Mais on sait que si $p = 0{,}00052$, on peut quand même avoir des échantillons pour lesquels la valeur observée *x* de *X* est relativement élevée. **La question est de déterminer une valeur *b* au-delà de laquelle on estimera que la valeur élevée de *x* n'est plus le fruit de la fluctuation due au hasard, mais est plutôt révélatrice d'une situation dangereuse.**

L'idée est de partager l'axe de valeurs de la variable de décision *X* seulement en deux intervalles, [0 , *b*] et]*b* , *n*], au lieu de trois comme dans les prises de décision précédentes. Tant que la valeur *x* observée sera proche de 0 (i.e. dans [0 , *b*]), il n'y aura pas lieu de déclarer la situation dangereuse. Au-delà de *b*, c'est-à-dire si *x* est dans]*b* , *n*], on déclarera la situation dangereuse. Dans cette approche, [0 , *b*] sera l'intervalle de fluctuation. On parlera alors d'intervalle de fluctuation **unilatéral** pour le distinguer de l'intervalle de fluctuation utilisé en classe qu'on a qualifié de bilatéral. Si on fixe le seuil à 95 %, *b* sera choisi pour que [0 , *b*] soit le plus petit intervalle tel que $P(X > b) \leq 0{,}05$.

La lecture des probabilités cumulées de la loi binomiale pour $n = 5969$ et $p = 0{,}00052$ de la figure 1 donne $b = 6$. Ce qui conduit, comme $x = 9$, à décider que la situation est dangereuse pour la santé à Woburn.

De plus, par construction de l'intervalle de fluctuation [0 , 6], on peut affirmer qu'en prenant cette décision on a moins de 5 % de chances de se tromper. Plus précisément, la probabilité de décider que la situation est dangereuse, alors qu'elle ne l'est pas, est égale à $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) \approx 1 - 0{,}9610$, soit environ 4,9 %.

La règle de décision est représentée graphiquement par la figure 5 :

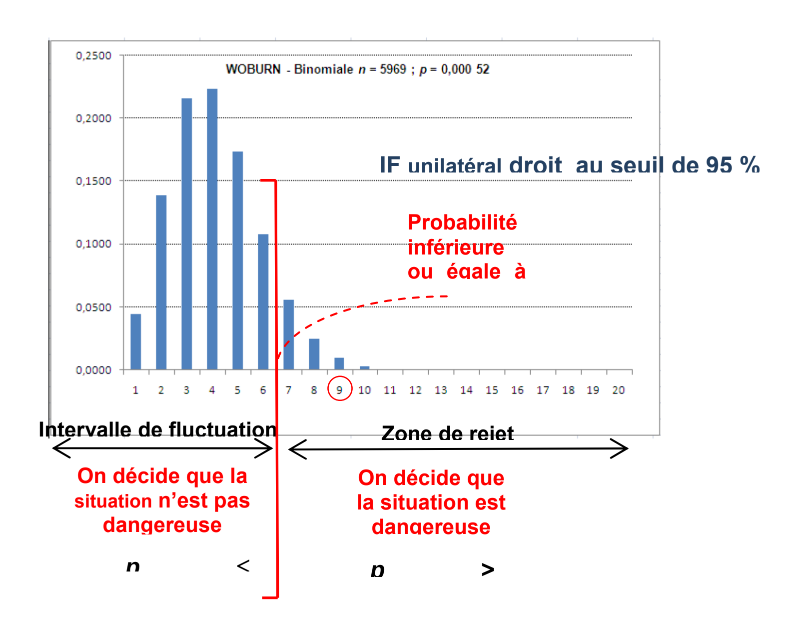


Fig. 5 : Règle de décision avec l'intervalle de fluctuation unilatéral au seuil de 95%

Les bornes des intervalles de fluctuation bilatéraux et celles de l'intervalle de fluctuation unilatéral au seuil de 95% sont rassemblées dans le tableau de la figure 6 :

Seuil de 95 %		
IF bilatéral	Effectif	Fréquence
Borne inf	0	0,0000
Borne sup	7	0,0012
p-1/racine n		-0,0124
p+1/racine n		0,0135

Seuil de 95 %		
IF unilatéral	Effectif	Fréquence
Borne inf	0	0,0000
Borne sup	6	0,0010

Fig. 6 : Comparaison du cas bilatéral et du cas unilatéral au seuil de 95%

- **Commentaires**

Alors que les autorités locales et les experts gouvernementaux ont conclu, dans un premier temps, qu'il n'y avait rien d'étrange dans le nombre de cas de leucémie observés, à la suite d'actions et d'études entreprises par les familles avec leurs propres experts, le Département de Santé Publique du Massachusetts a officiellement confirmé en avril 1980 que le taux de leucémie constaté était anormalement élevé. La recherche des causes a conduit à soupçonner l'eau de la ville polluée par le trichloréthylène. Cette petite histoire illustre bien les enjeux de la démarche statistique.

On a vu dans cet exemple qu'une même situation peut donner lieu à plusieurs questionnements possibles et, en conséquence, à des traitements mathématiques différents :

- soit on souhaite décider entre *La situation est normale* (i.e. $p = 0{,}00052$) et *La situation n'est pas normale* (i.e. $p \neq 0{,}00052$) : le risque est à prendre en compte des deux côtés de l'intervalle de fluctuation, ce qui conduit à un intervalle de fluctuation bilatéral.
- soit on souhaite décider entre *La situation présente un danger pour la santé* (i.e. $p > 0{,}00052$) et *La situation ne présente pas un danger pour la santé* (i.e. $p \leq 0{,}00052$) : le risque est à prendre en compte d'un seul côté de l'intervalle de fluctuation, ce qui conduit à un intervalle de fluctuation unilatéral.

Dans les deux cas les calculs sont effectués avec $p = 0{,}00052$ et la variable de décision utilisée, $X = nF$, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 5969$ et $p = 0{,}00052$.

Concernant par exemple la situation à Woburn, comme l'observation donne $x = 9$, on décidera que la situation est, avec le même seuil de 95 %, anormale en utilisant l'intervalle de fluctuation bilatéral, et dangereuse en utilisant l'intervalle de fluctuation unilatéral. Mais si l'observation avait donné $x = 0$ ou $x = 7$, on aurait été amené à déclarer la situation anormale avec l'intervalle de fluctuation bilatéral au seuil de 90 %, mais normale avec l'intervalle de fluctuation bilatéral au seuil de 95 %. De même, avec le même seuil de 95 %, si l'observation avait donné $x = 7$, on aurait été amené à déclarer la situation normale en utilisant l'intervalle de fluctuation bilatéral, mais dangereuse en utilisant l'intervalle de fluctuation unilatéral.

On voit bien que le choix de la question à poser (*La situation est-elle normale ? La situation présente-t-elle un danger pour la santé* ?), le choix du seuil (90 % ou 95 % par exemple), la forme de l'intervalle de fluctuation (bilatéral ou unilatéral) vont influer sur la règle de décision à adopter, et par conséquent sur la décision elle-même.

Dans une démarche de prise de décision, il est donc nécessaire de clarifier en premier lieu le choix des hypothèses pour formaliser un questionnement qui, lui-même, dépend des préoccupations du décideur liées aux enjeux (économiques, sociaux, sanitaires, politiques, …) de la situation. Le seuil devra également être défini en amont de la mise en forme mathématique. Ce choix des hypothèses déterminera ensuite la forme de l'intervalle de fluctuation à utiliser. Il est donc nécessaire de veiller à ce que la forme de l'intervalle de fluctuation utilisé soit toujours en cohérence avec le questionnement naturellement induit par la situation concrète, même si pour des raisons pédagogiques on se limite en classe aux intervalles de fluctuation bilatéraux.

Dans la réalité, toute prise de décision statistique suppose, en préliminaire à la mise en œuvre mathématique, une analyse approfondie de la signification concrète des risques encourus qui ne peut être que le fruit d'une concertation interdisciplinaire entre les divers acteurs professionnels (dont le statisticien n'est qu'un des éléments) concernés par cette prise de décision.

Bibliographie

Ministère Éducation nationale-DGESCO : Ressources pour la classe en baccalauréat professionnel – extrait : Probabilités et statistiques, Document de travail, avril 2009.

Ministère Éducation nationale-DGESCO : Ressources pour la classe de Seconde – extrait : Probabilités et statistiques, 2009.

✘ B – RADIOACTIVITE OU BRUIT DE FOND ?

L'activité suivante est inspirée[9] de présentations effectuées par Monsieur Alain VIVIER, enseignant-chercheur à l'INSTN[10], institut dépendant du Commissariat à l'énergie atomique à Saclay. Convaincu de l'intérêt pédagogique des expérimentations sur tableur, Monsieur VIVIER déclare : « pour ma part je n'aurais jamais approfondi ces aspects [de statistique et probabilités], indispensables en physique, sans le tableur. Cela m'a été utile non seulement pour des aspects d'enseignement, mais aussi de recherche, notamment dans le domaine de la problématique du seuil de décision, qui peut s'avérer parfois difficile ».

Une activité sur le thème de la radioactivité, consistant à rechercher un seuil de différence significative à avec le modèle binomial, peut se présenter comme suit.

On mesure en laboratoire, avec un compteur Geiger, un objet pouvant être « radioactif ». Le compteur est réglé selon une certaine sensibilité et on effectue une mesure à un mètre de l'objet, pendant dix secondes. L'instrument compte 37 désintégrations ou « coups ». Cependant, avec ce réglage et dans ces conditions, une mesure de « bruit de fond » (correspondant à l'environnement du laboratoire) donne en moyenne un comptage de 30 coups. La question qui se pose est de savoir si la différence observée est assez importante pour considérer l'objet comme « radioactif ».

On suppose que dans le laboratoire, durant chaque centième de seconde, le compteur est aléatoirement susceptible de compter un coup de bruit de fond avec une probabilité 0,03, ce que l'on simulera à l'aide d'un tableur avec l'instruction =ENT(ALEA()+0,03).

1. a. Simuler en colonne A un comptage de bruit de fond pendant 10 secondes, puis recopier vers la droite pour obtenir la simulation de 100 comptages.

b. Calculer la moyenne des 100 comptages simulés. Est-elle proche de 30 coups ? (Faire F9 pour obtenir d'autres simulations.)

c. Un comptage supérieur ou égal à 37 coups vous semble-t-il exceptionnel ?

2. a. Déterminer les paramètres n et p de la loi binomiale suivie par la variable aléatoire X modélisant un comptage de bruit de fond pendant dix secondes.

b. Sur une nouvelle feuille, calculer une table fournissant $P(X \leq k)$ pour k allant de 0 à 1 000.

3. Soit N est le plus petit entier tel que : $P(X \leq N) \geq 0{,}95$. On dira qu'il y a radioactivité significative si le nombre de coups est supérieur ou égal $N + 1$.

a. Déterminer la valeur de N.

b. On observe un comptage de 37 coups. Peut-on considérer que la radioactivité est significative ?

c. Quelle est la probabilité de considérer que la radioactivité est significative alors que c'est un bruit de fond ?

---

[9] Avec l'aimable autorisation de Monsieur Alain Vivier.

[10] Institut national des sciences et techniques nucléaires.

4. On considère un objet radioactif pour lequel, durant chaque centième de seconde, le compteur est aléatoirement susceptible de compter un coup avec la probabilité 0,05. On considère la variable aléatoire *Y* modélisant le comptage des désintégrations pendant dix secondes.

a. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par *Y*.

b. Déterminer la probabilité de ne pas détecter comme radioactif l'objet considéré.

Éléments de réponse

3. a. $N = 39$.

k	$P(X \leq k) \approx$
37	0,9142
38	0,9381
39	**0,9563**
40	0,9698

b. Un comptage de 37 coups n'est pas significatif. On considère qu'il y a radioactivité à partir d'un comptage de 40 coups.

c. La probabilité cherchée correspond à $P(X \geq 40)$ où *X* suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}03$. On a choisi un seuil de 95 % de façon à rendre cette erreur peu probable, inférieure à 5 %.

4. a. $n = 1000$ et $p = 0{,}05$.

b. L'objet n'est pas détecté comme radioactif correspond à l'événement $\{Y \leq 39\}$ dont la probabilité vaut environ 0,06.

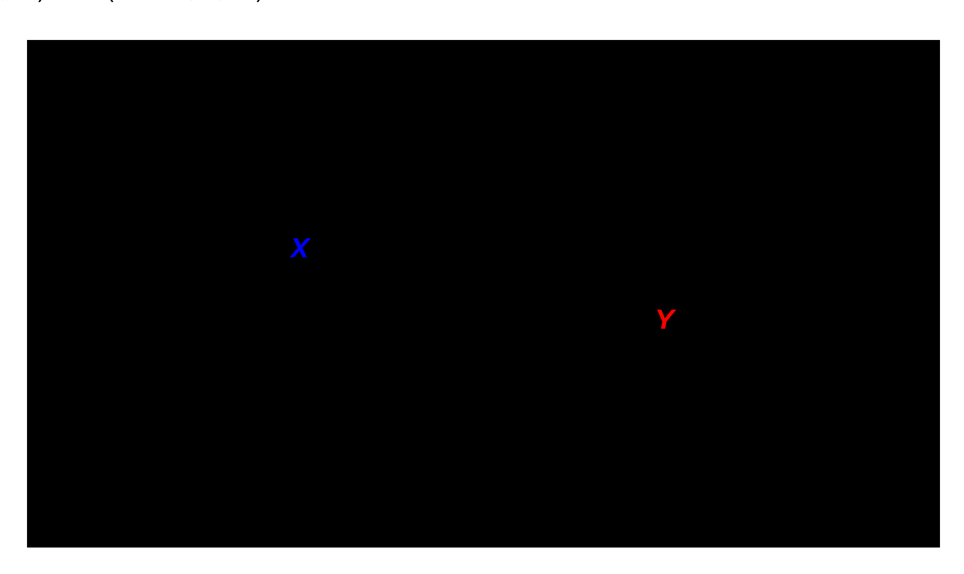
Remarques :

On a deux façons de se tromper :

déclarer qu'un objet est radioactif alors que c'est un bruit de fond (c'est l'objet de la question 3) ;

déclarer qu'il n'y a que du bruit de fond alors que l'objet est radioactif (c'est l'objet de la question 4).

Il est utile d'appuyer le raisonnement sur l'observation des diagrammes en bâtons des lois binomiales $\mathcal{B}$(1 000 ; 0,03) et $\mathcal{B}$(1 000 ; 0,05).



✘ C – CARTES DE CONTROLE[11]

Dans l'industrie automobile, certains véhicules, après leur passage en peinture, présentent un défaut de type « grains ponctuels ». Ce défaut est pratiquement imperceptible, mais constitue un témoin de la qualité du processus de peinture.

On dit que le processus est « sous contrôle » lorsque 20 % des capots produits ont ce type de défaut. Des modifications apportées au processus de fabrication sont susceptibles de modifier ce pourcentage, dans un sens ou dans l'autre.

On contrôle la production en prélevant des échantillons de 50 capots. La production est suffisamment importante pour considérer qu'il s'agit de tirages au hasard avec remise.

On choisit de fixer le seuil de décision de sorte que la probabilité de rejeter l'hypothèse à tort soit inférieure à 5 %.

On accepte l'hypothèse selon laquelle la proportion dans la production est $p = 0{,}2$, lorsque la fréquence f observée sur l'échantillon se situe dans l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Les « limites de contrôle » sont les bornes de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, calculées en considérant la variable aléatoire X correspondant au nombre de capots présentant le défaut sur un échantillon de taille 50. Sous l'hypothèse $p = 0{,}2$, cette variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}2$.

1. Calculer les « limites de contrôle ».

2. Simuler le fonctionnement de cette carte de contrôle lorsque le processus est sous contrôle.

3. Le processus est sous contrôle, quelle est la probabilité de commettre une erreur de décision à partir d'un échantillon ?

4*[12]. En réalité, la proportion de capots présentant le défaut dans la production est 0,3. On considère la variable aléatoire Y correspondant au nombre de capots présentant le défaut sur un échantillon de taille 50.

a. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par Y.

b. Quelle est la probabilité de décider que le processus est sous contrôle ?

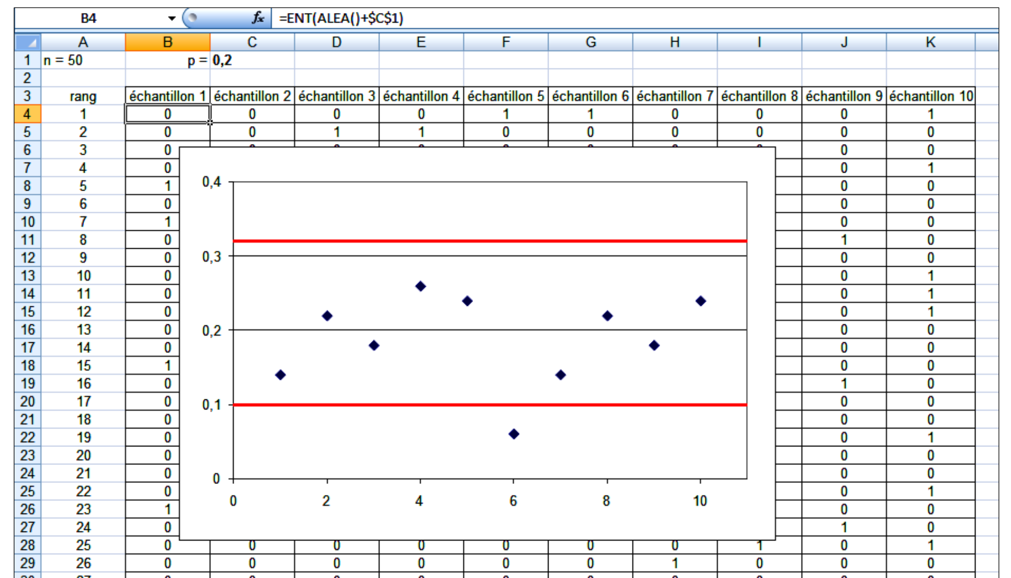
Éléments de réponse

1. Les limites de contrôle sont 0,1 et 0,32 correspondant à des effectifs de 5 et 16 capots présentant le défaut.

[11] Mises au point en 1924 à la *Bell Telephone Company* par Walter Shewhart (1891-1967), les « cartes de contrôle » sont à la base de la « maîtrise statistique des procédés ». Toujours utilisées en raison de leur simplicité (on reporte les valeurs observées sur le graphique de la carte), elles définissent des limites de contrôle de certains paramètres de la production, comme la fréquence, la moyenne ou l'écart-type, telles que si ces limites sont dépassées, des actions de correction puissent être menées.

[12] Le questionnement sur les erreurs n'est pas un attendu du programme. Aucune connaissance à ce propos n'est donc exigible. Cette question peut cependant être posée dans un cadre de réflexion ou de recherche.

2.



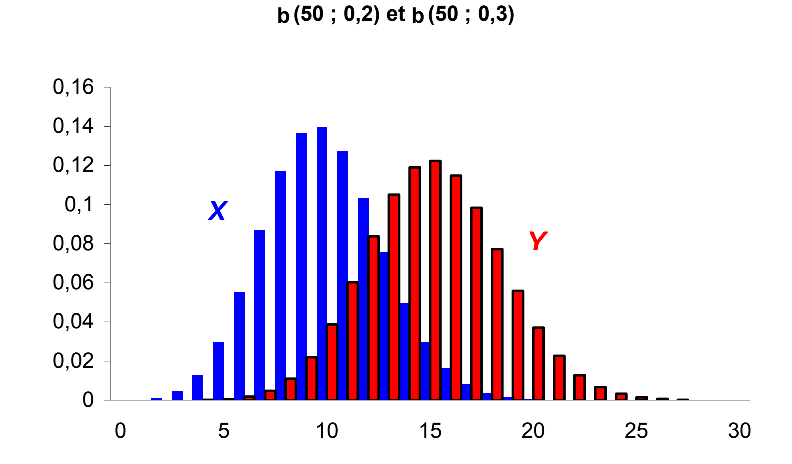
3. Si X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}2$, on a $P(X \leq 4) \approx 0{,}0185$ et $P(X \geq 17) \approx 0{,}0144$. La probabilité de commettre une erreur de décision lorsque *p* = 0,2 correspond à la probabilité de la zone de rejet soit environ 3,3 %.

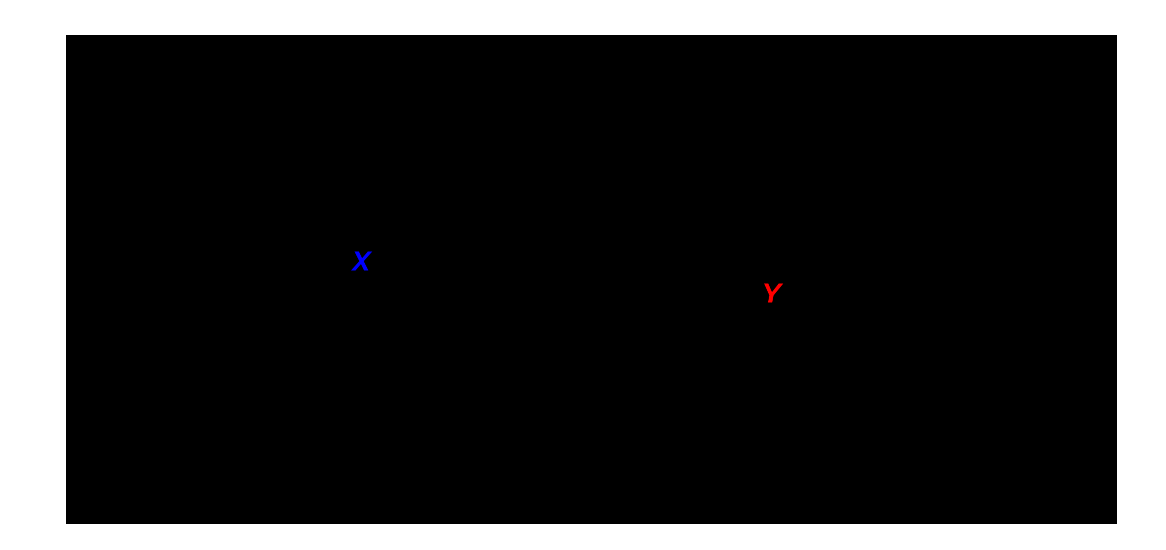
4. a. $n = 50$ et $p = 0{,}3$.

b. On est dans une situation où l'hypothèse *p* = 0,2 ayant permis la construction de la carte de contrôle est fausse. En décidant que le processus est sous contrôle, on commet une erreur. La probabilité de commettre cette erreur, à partir de l'observation d'un seul échantillon, est $P(5 \leq Y \leq 16)$ où *Y* suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}3$. On trouve environ 68,4 %.

Remarques :

- – On peut, dans un premier temps, observer par simulation la fréquence des erreurs (points situés entre les lignes de contrôle alors que $p \neq 0{,}2$) en introduisant la valeur 0,3 en cellule C1 et en actionnant de nombreuses fois la touche F9.
- – Il est difficile de distinguer $p = 0{,}2$ et $p = 0{,}3$ avec un seul échantillon de taille 50. La procédure de décision a tendance à être « conservatrice » et privilégie l'hypothèse $p = 0{,}2$ qui n'est rejetée que si la différence observée est réellement significative. Il est utile d'appuyer le raisonnement sur l'observation des diagrammes en bâtons des lois binomiales $\mathcal{B}$(50 ; 0,2) et $\mathcal{B}$(50 ; 0,3).




X
Y



Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe de première
générale et technologique

Analyse

mars 2012

Table des matières

Introduction

L'enseignement de l'analyse en classe de première constitue un enjeu d'importance pour la formation mathématique des élèves. L'objectif est de doter ces derniers d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets.

Les outils classiques, comme les fonctions, la dérivation et les suites, prennent vie tout au long de la classe de première. Les grandes problématiques du programme, éclairées par quelques scénarios pédagogiques développés tout au long de ce document ressource, sont :

P1 : Comment prendre en compte les acquis des élèves ?

P2 : Comment intégrer les outils-logiciels aux pratiques de classe ?

P3 : Comment travailler par compétences au lycée ?

P4 : Comment utiliser des évaluations diagnostiques ?

P5 : Comment différencier l'enseignement?

P6 : Comment favoriser la diversité de l'activité mathématique des élèves ?

P7 : Comment faire vivre l'algorithmique, la logique et le raisonnement ?

P8 : Comment aider les élèves à analyser leurs erreurs ? (ou à les rendre autonomes, critiques face à leurs résultats ?)

P9 : Comment varier les évaluations (diagnostiques, formatives, sommatives) ou comment différencier les évaluations ?

Une équipe d'enseignants propose dans ce document ressource des pistes, des perspectives, des activités qui relient les contenus et les capacités énoncés dans le programme de première à la classe.

1. Second degré

En classe de seconde, les élèves ont abordé les fonctions polynômes de degré 2. Ils en connaissent les variations (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes représentatives. Ces résultats ont pu, selon le choix du professeur, être partiellement ou totalement admis.

Les situations sur le second degré en classe de première doivent donc prendre appui sur ces acquis de la classe de seconde. Les exemples de scénarios pédagogiques suivants proposent des activités autour de ce thème.

Extrait du programme de première S :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Second degré Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	• Utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.	On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de seconde. La mise sous forme canonique n'est pas un attendu du programme. ◇ Des activités algorithmiques sont réalisées dans ce cadre.

Un exemple d’activité sur le second degré

Problématiques développées : P1, P2, P3, P6, P8 et P9.
Activité expérimentée en série S, transférable en ES/L.
Place dans la progression : en début d’année scolaire.

Objectifs pédagogiques	Approfondir la notion de second degré. Former les élèves à la pratique d’une démarche scientifique. Évaluer individuellement les acquis des élèves.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l’écrit.
Connaissances	La parabole. Calculs d’aires.
Logiciels	*GeoGebra*. *Xcas*. Calculatrice.
Modalités de gestion de classe	Travail en groupes. Activité en autonomie.

Afin d’en préserver la cohérence globale, la séquence pédagogique qui suit est présentée telle qu’elle a été testée et dans son ensemble. Il appartient à l’enseignant de l’adapter à sa classe.

La situation géométrique étudiée est classique. La démarche pédagogique spécifique vise à construire des compétences amorcées en classe de seconde :

- « mettre en œuvre une recherche de façon autonome » (le professeur devient une ressource, secours de l’élève ou du groupe d’élèves) ;
- « mener des raisonnements » ;
- « avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus » ;
- « communiquer à l’écrit et à l’oral ».

grâce à la diversité de l’activité de l’élève (expérimenter, raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective, expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit, choisir et appliquer des techniques de calcul).

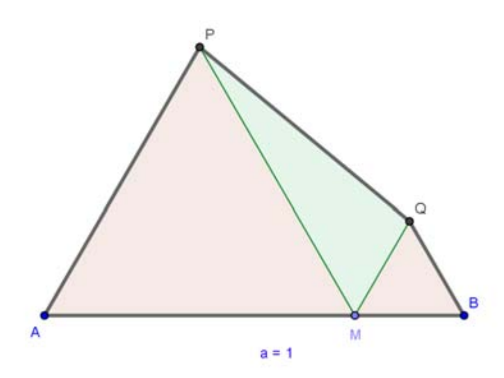
Scénario pédagogique

Au cours de l’année précédente, le professeur a récupéré les travaux de ses élèves sur ce même exercice. À partir de ces matériaux, l’enseignant va proposer à sa classe cinq démarches d’élèves qui permettent d’étudier différentes stratégies de résolution mises en place par les apprenants.

Le scénario pédagogique se déroule sur cinq séances d’une heure. Un devoir surveillé conclut l’activité présentée. Durant chaque séance, les élèves sont répartis par groupes de 5. À chaque séance, la consigne donnée par le professeur est d’étudier la démarche de résolution présentée dans les documents distribués. Un élève du groupe est chargé de finaliser le travail demandé et de le rendre au professeur en fin de séquence. En début de la séance suivante, un retour est effectué à l’oral sur les productions des groupes. Les cinq séances se sont déroulées durant le mois de septembre. La salle informatique est utilisée à chaque fois que cela est nécessaire. Précisons enfin que cette activité a donné lieu à deux devoirs maison qui ont permis à chacun de rédiger les analyses faites en groupes, ainsi qu’à la réalisation d’un poster portant sur la synthèse relative aux fonctions polynômes du second degré (définition, courbe, tableau de variation, sommet).

Énoncé de l'exercice

M est un point libre sur le segment [AB] de longueur 1. Les triangles AMP et MBQ sont équilatéraux.



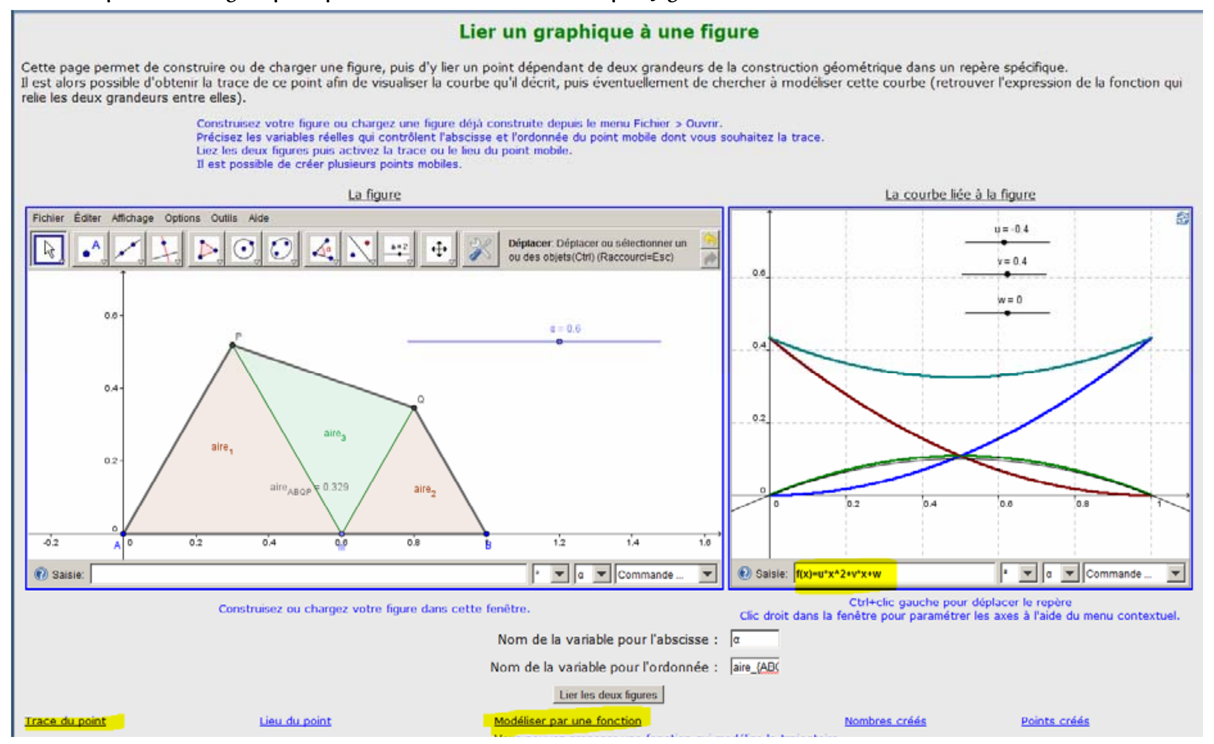
1. Déterminer la position de M qui rend maximale l'aire du triangle MPQ.
2. Expliquer pourquoi cette position rend minimale l'aire du quadrilatère ABQP.

Consignes données aux élèves par l'enseignant pour chaque séance :

« Voici la production qu'un élève de ma classe de l'année dernière a proposée pour répondre à l'exercice. Cette production est accompagnée de quelques questions auxquelles vous répondrez après avoir analysé la démarche suivie. Quelques éléments ont été volontairement cachés.
Il est conseillé de décrire les pistes suivies au cours de votre recherche, ainsi que les difficultés rencontrées. »

Séance 1 : analyse de la production de Youssra

J'ai utilisé GéoGébra plus précisément la page « Lier un graphique à une figure » disponible sur le Web à l'adresse
www.geogebra.org/en/upload/files/french/doNuts/LierUneCourbe.htm#ici1
J'ai représenté graphiquement les aires des polygones AMP, MBQ, MQP et APQB.



Il est facile de constater que l'aire du triangle MPQ est maximale quand « texte caché » et on voit bien que l'aire du polygone ABQP est alors minimale.

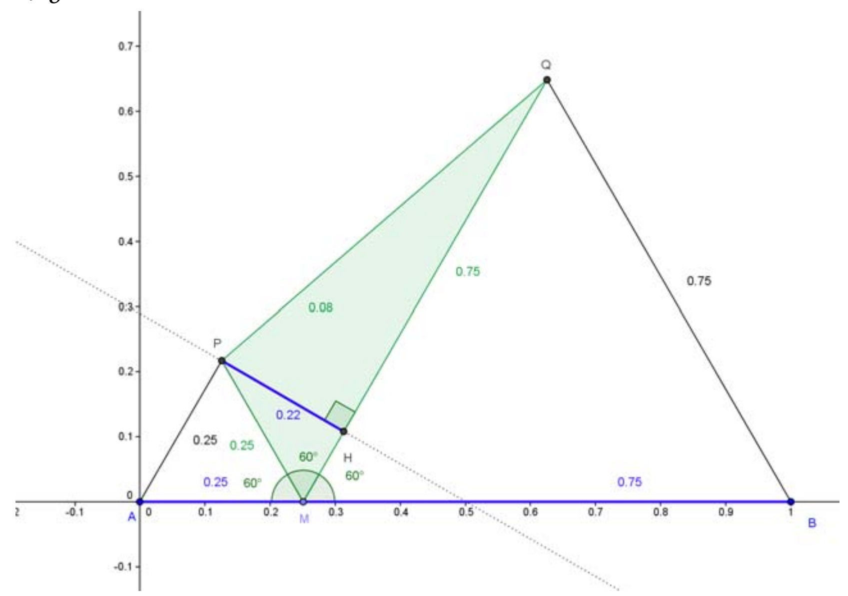
- Compléter la copie d'écran de Youssra par une légende associant courbes et aires.
- Retrouver le « texte caché » de la rédaction de Youssra.

Pour aller plus loin, j'ai pensé utiliser une fonction polynôme de degré 2 pour modéliser la courbe verte qui ressemble à un morceau de parabole. J'ai tâtonné avec trois curseurs, je suis certaine que w=0, et que u et v sont opposés. Mais ça ne marche pas, je n'ai pas réussi à superposer les courbes !

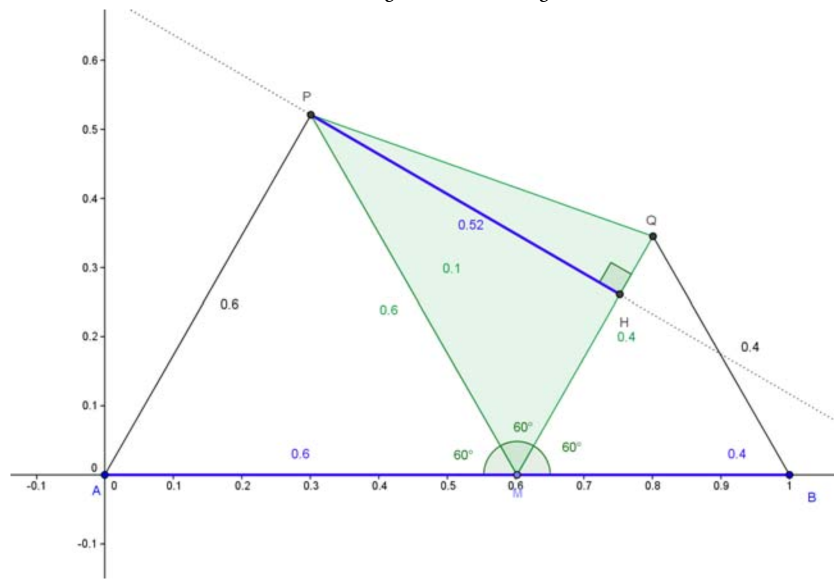
- Expliquer pourquoi w=0.
- Expliquer pourquoi u et v sont opposés.

Séance 2 : analyse de la production de Mylène

Pour comprendre le problème qui me semblait compliqué, j'ai d'abord utilisé GéoGébra pour faire une figure.



Ici l'aire du triangle MPQ est égale à 0,08.



Ici l'aire du triangle MPQ est égale à 0,1.

Première question du sujet.

J'ai calculé, dans le cas général, la hauteur PH en posant x=AM.

Puis j'ai obtenu l'aire du triangle MPQ : $0{,}4x \times (1 - x) = 0{,}4x - 0{,}4x^2$

- Critiquer le résultat énoncé par Mylène :
  « l'aire du triangle MPQ est égale à $0{,}4x \times (1 - x) = 0{,}4x - 0{,}4x^2$ ».

Ensuite, j'ai tracé la courbe avec ma calculatrice et j'ai trouvé 0,5.

Graphique caché

En conclusion, l'aire du triangle MPQ est maximale pour x = 0,5 autrement dit quand M est au milieu de [AB].

- Comme l'a fait Mylène, utiliser la calculatrice pour visualiser la courbe associée à l'aire du triangle MPQ et commenter le résultat énoncé par Mylène.

Seconde question du sujet.

En additionnant les aires, j'ai trouvé :

Aire(APQB) = « texte caché » + $(0{,}4x - 0{,}4x^2) + 0{,}4(1-x)^2$.

En développant : Aire(APQB)= $0{,}4x^2$ + « texte caché ».

J'ai tracé la courbe avec ma calculatrice et j'ai trouvé 0,5.

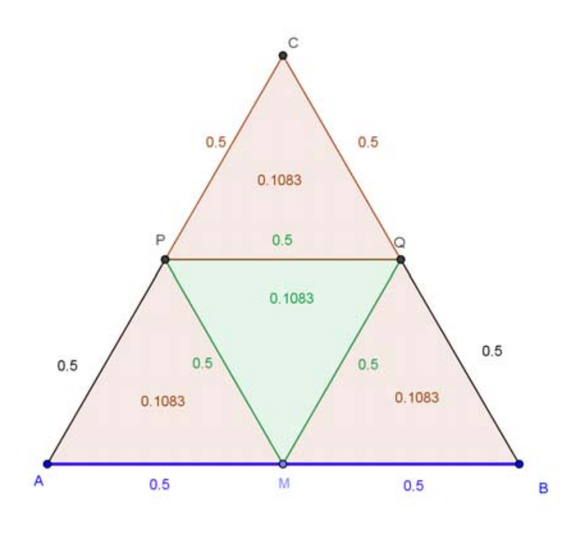
Graphique caché

En conclusion, l'aire du quadrilatère APQB est minimale pour x = 0,5 autrement dit quand M est au milieu de [AB].

- Au cours de sa résolution, Mylène utilise une approximation de $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Quelle est cette approximation ?
- En utilisant l'approximation de Mylène, retrouver les textes cachés en exprimant l'aire du triangle AMP en fonction de x puis celle du quadrilatère APQB.
- Comme l'a fait Mylène, utiliser la calculatrice pour visualiser la courbe associée à l'aire du quadrilatère APQB et commenter le résultat énoncé par Mylène.

Séance 3 : analyse de la production de Julie

J'ai fait la figure (cf. annexe 1) et placé M au milieu de [AB], j'ai alors remarqué que les trois triangles sont superposables, j'ai pensé à Thalès et complété la figure pour obtenir le triangle ABC.
Dans le formulaire du livre, j'ai trouvé une formule pour l'aire d'un triangle équilatéral, ici de côté 1 donc l'aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$. *J'en déduis que l'aire du triangle MPQ est égale à* $\frac{\sqrt{3}}{16}$ *et que l'aire du trapèze ABQP est égale à* $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.



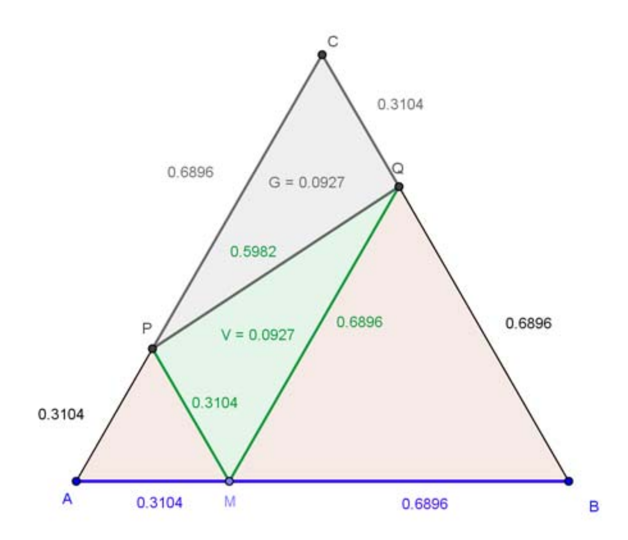
Annexe 1

Dans le cas général, l'aire du triangle équilatéral AMP est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ *, celle de BMQ est égale à* $\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$ *, V=G donc par découpage, cf. annexe 2, j'obtiens :*

$$2\times V=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$$

D'où $V=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)$

Après, j'ai voulu comparer V à $\frac{\sqrt{3}}{16}$ *mais je n'ai pas réussi. J'ai donc décidé d'abandonner la méthode … Mais je suis certaine de ma conjecture : le minimum de l'une et le maximum de l'autre sont bien obtenus simultanément au milieu de [AB]. D'ailleurs je l'ai vérifié en traçant les courbes sur papier millimétré (cf. annexe 3).*



Annexe 2

- Julie utilise, sans le justifier, l'égalité $V = G$. Par un raisonnement géométrique, compléter l'exposé de Julie, en démontrant l'égalité des aires des triangles CPQ et MPQ.
- Réaliser l'annexe 3 évoquée par Julie.
- Pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on pose $V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)$.
- Vérifier que $V\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{16}$.
- En étudiant le signe de $V(x)-V\left(\frac{1}{2}\right)$, démontrer le résultat relatif à l'aire du triangle MPQ.
- Sans aucun calcul, justifier la dernière intuition de Julie : « le minimum de l'une et le maximum de l'autre sont bien obtenus simultanément ».

<u>Séance 4 : analyse de la production d'Alexis</u>

Comme je ne trouvais rien malgré tout le temps qui passait, j'ai cherché « aire d'un triangle » sur « Wikipédia » et j'ai trouvé trois formules :

- *l'une utilise base et hauteur mais je ne connais pas la hauteur du triangle PQM alors je l'ai éliminé ;*
- *l'autre la formule du Héron mais il faut connaître les trois côtés et je n'en connais que deux ;*
- *donc je me suis permis d'utiliser la troisième* **S** = $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

En admettant ce résultat, je trouve facilement les aires des trois triangles et du quadrilatère :

- *pour APM, je trouve* $\mathbf{S_1}$ = « texte caché » ;
- *pour BMQ, je trouve* $\mathbf{S_2}$ = « texte caché » ;
- *pour MPQ, je trouve* $\mathbf{S_3}$ = $\frac{1}{2}x(1-x)\sin(60)$;
- *pour APQB, je trouve* $\mathbf{S_4}$ = « texte caché » = $\frac{1}{2}\sin(60)\times(x^2-x+1)$.

Étude de S_3.

a) <u>*Sens de variation.*</u>

Comme $\sin(60)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *, alors* $\frac{1}{2}x(1-x)\sin(60)=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ *c'est un polynôme du second degré donc sa courbe est une parabole* (Γ_3) *ici tournée vers le bas car* $a=-\frac{\sqrt{3}}{4}<0$.

b) <u>*Coordonnées du sommet de*</u> (Γ_3)

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 0-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 0^2=0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=0$$

le polynôme s'annule en 0 et en 1 donc $x_S=\frac{0+1}{2}=0,5$ *et* $y_S=f(x_S)=f(0,5)=\frac{\sqrt{3}}{16}$.

- Utiliser les informations données par Alexis (cf. a) et b)) pour dresser le tableau de variation de la fonction f_3 définie sur [0 ; 1] par $f_3(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)$.

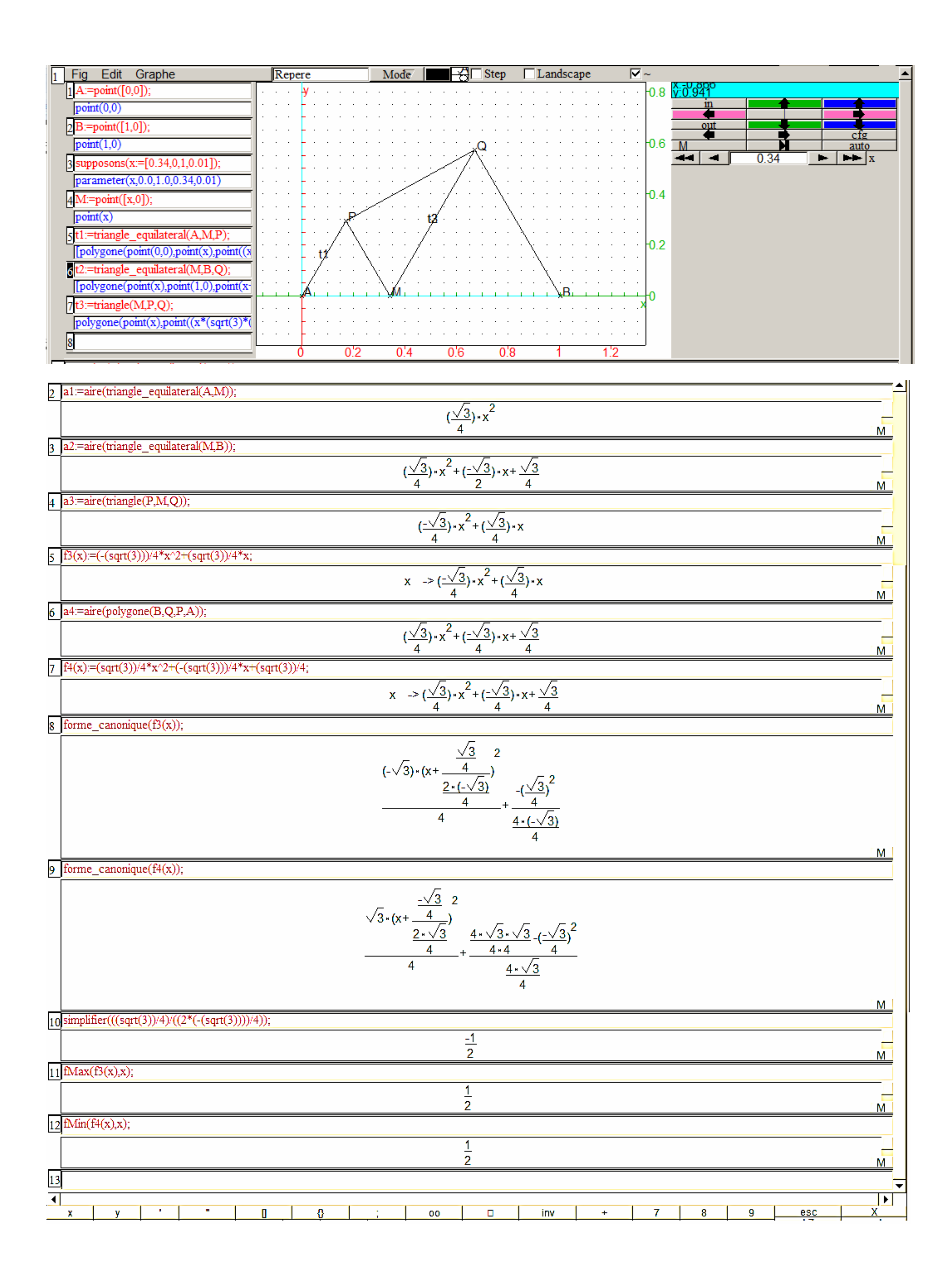
Étude de S_4.

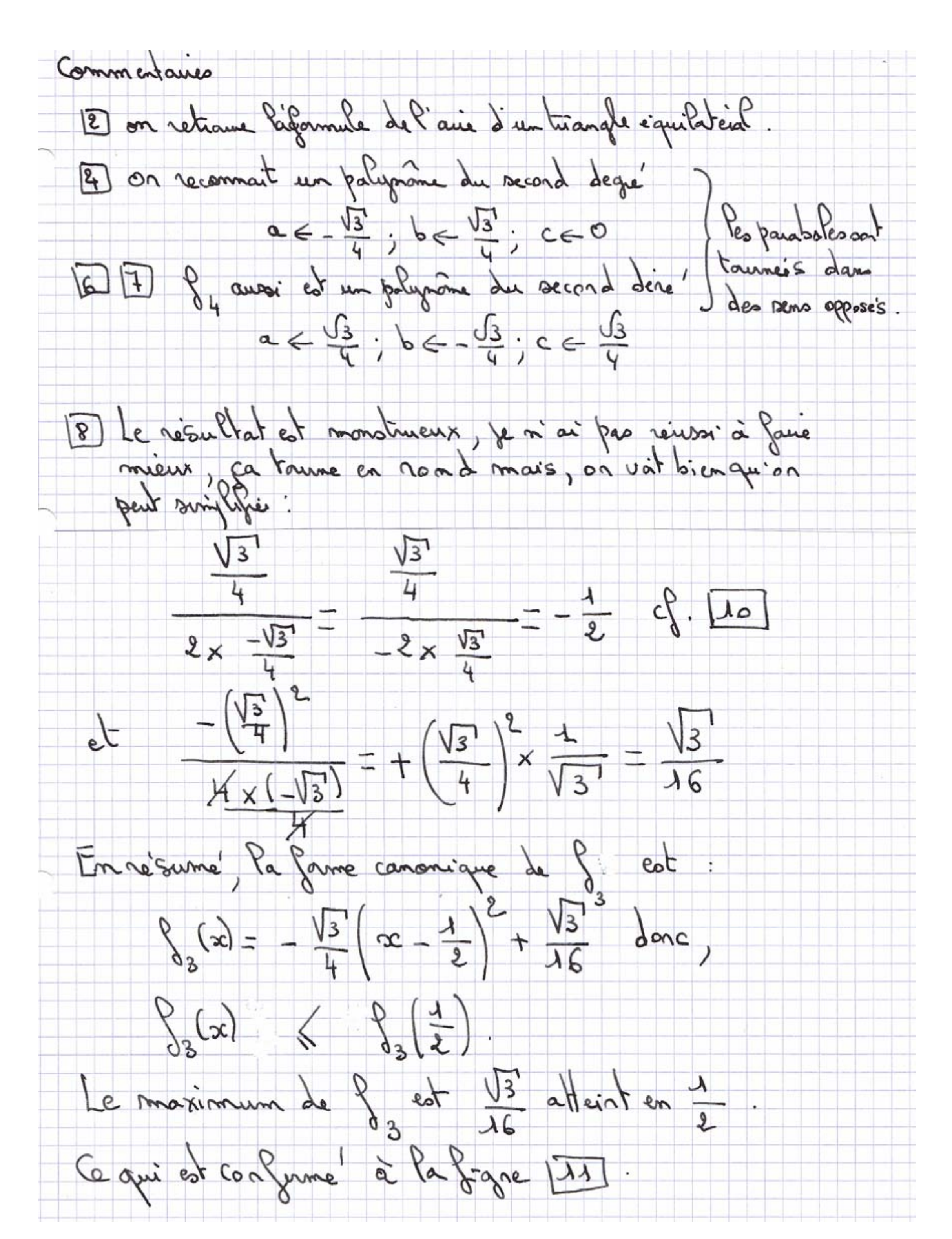
« texte caché »

- Exprimer S1 et S2 en fonction de x. En déduire que $\mathbf{S_4}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}$.
- On note f_4 la fonction définie sur [0 ;1] par $f_4(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}$ et de courbe représentative (Γ_4). Trouver, dans l'intervalle [0 ; 1], deux nombres x_1 et x_2 et ayant la même image par f_4. En déduire le sommet de (Γ_4) et le tableau de variation de f_4.

<u>Séance 5 : analyse de la production de Paul Alexandre</u>

Comme je connais assez bien XCas (surtout l'instruction canonical_form() que j'ai utilisée l'année dernière), j'ai préféré utiliser XCas.


A:=point([0,0]);
B:=point([1,0]);
supposons(x:=[0.34,0,1,0.01]);
M:=point([x,0]);
t1:=triangle_equilateral(A,M,P);
t2:=triangle_equilateral(M,B,Q);
t3:=triangle(M,P,Q);
a1:=aire(triangle_equilateral(A,M));
a2:=aire(triangle_equilateral(M,B));
a3:=aire(triangle(P,M,Q));
f3(x):=(-(sqrt(3)))/4*x^2+(sqrt(3))/4*x;
a4:=aire(polygone(B,Q,P,A));
f4(x):=(sqrt(3))/4*x^2+(-(sqrt(3)))/4*x+(sqrt(3))/4;
forme_canonique(f3(x));
forme_canonique(f4(x));
simplifier(((sqrt(3))/4)/((2*(-(sqrt(3))))/4));
fMax(f3(x),x);
fMin(f4(x),x);



Commentaires

[2] on retrouve la formule de l'aire d'un triangle équilatéral.

[4] on reconnait un polynôme du second degré

$a \leftarrow -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $b \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}$; $c \leftarrow 0$

[6] [7] f_4 aussi est un polynôme du second degré

$a \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}$; $b \leftarrow -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $c \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}$

} les paraboles sont tournées dans des sens opposés.

[8] Le résultat est monstrueux, je n'ai pas réussi à faire mieux, ça tourne en rond mais, on voit bien qu'on peut simplifier :

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2\times\frac{-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}} = -\frac{1}{2} \quad \text{cf. } [10]$$

et

$$\frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}{\frac{4\times(-\sqrt{3})}{4}} = +\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

En résumé, la forme canonique de f_3 est :

$$f_3(x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{16} \text{ donc,}$$

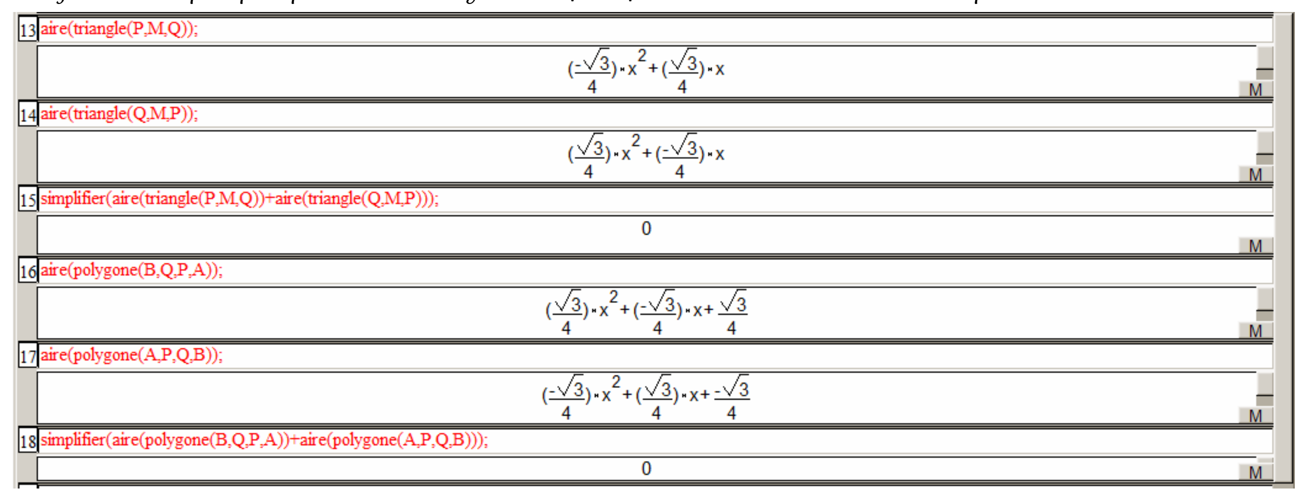
$$f_3(x) \leqslant f_3\left(\frac{1}{2}\right).$$

Le maximum de f_3 est $\frac{\sqrt{3}}{16}$ atteint en $\frac{1}{2}$.

Ce qui est confirmé à la ligne [11].

- Extraire des documents livrés par Paul-Alexandre, les informations relatives à la forme canonique de f_3.
- A la manière de Paul-Alexandre, simplifier le résultat retourné ligne 9 pour en déduire la forme canonique de f_4.
- En développant, vérifier les calculs relatifs à f_4.
- Utiliser Xcas pour obtenir la forme canonique du polynôme $x^2 - x + 1$. Vérifier ce résultat en développant. En déduire son minimum et son tableau de variation.
- Recommencer avec le trinôme $-x^2 + x$.
- Critiquer la démarche de Paul-Alexandre.

Ici, j'ai remarqué quelque chose de bizarre, il faut faire attention à l'ordre des points…



- Commenter cette dernière remarque de Paul-Alexandre.

Remarque :

L'analyse de la production de Paul-Alexandre est plus difficile. Elle pourra n'être proposée qu'à certains groupes, ou en accompagnement personnalisé.

<u>Évaluation des acquis des élèves.</u>

Extrait des programmes des premières S, ES et L :

Objectif général

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :

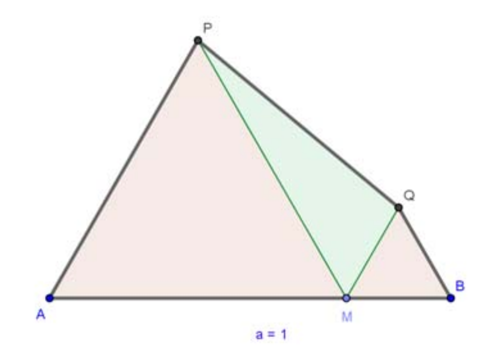
- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

L'évaluation proposée se déroule en deux parties. La première partie permet une évaluation de certaines compétences citées dans les programmes, en incitant l'élève à s'auto-évaluer. La deuxième partie fait le point sur les connaissances acquises par les élèves à la fin de l'activité.

Texte de l'évaluation

M est un point libre sur le segment [AB] de longueur 1, AMP et MBQ sont équilatéraux.

1. Déterminer la position de M qui rend maximale l'aire du triangle MPQ.
2. Expliquer pourquoi cette position rend minimale l'aire du quadrilatère ABQP



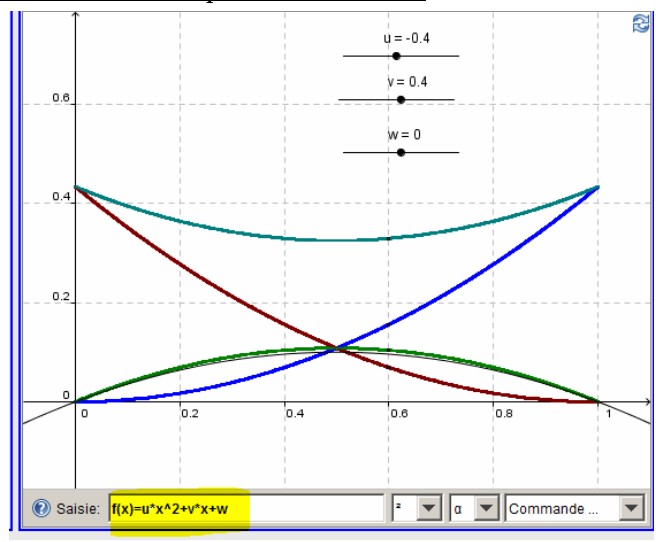
Première partie de l'évaluation (20mn – 8 points)

• En un maximum de 10 lignes, en guise de conclusion de l'étude : donner le point qui vous a semblé le plus délicat à traiter ou qui a posé le plus de difficultés ainsi que le point sur lequel vous avez le plus progressé. Justifier vos choix.

<u>Aucun développement mathématique n'est demandé.</u>

• En un maximum de 15 lignes, proposer ce qui vous parait-être une démarche « idéale » de résolution du problème. On sera amené à se souvenir des points positifs et négatifs des différentes démarches des cinq élèves.

<u>Aucun développement mathématique n'est demandé.</u>



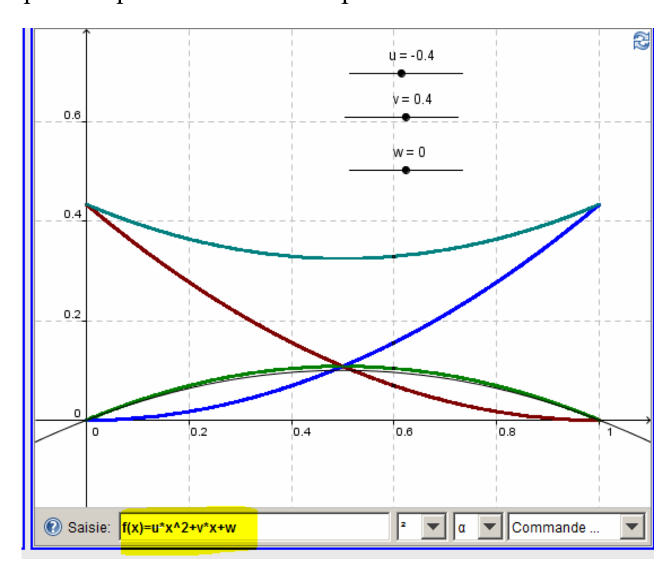
Seconde partie de l'évaluation (35 minutes - 12 points)

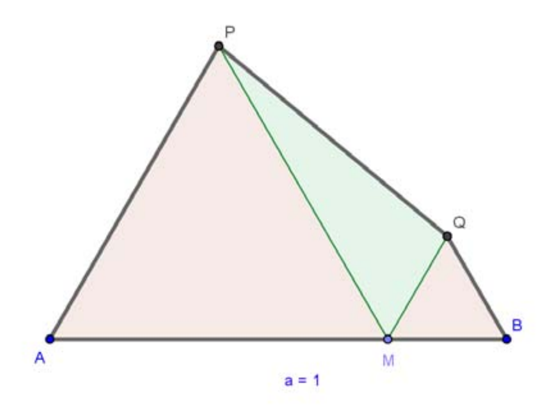
1. Associer les courbes et les aires des polygones AMP, MBQ, MQP et APQB. Découper, coller, légender. <u>On ne demande aucune justification</u>.
2. On pose AM=x, exprimer l'aire du triangle AMP en fonction de x. <u>Justifier</u>.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - x^2\right)$. On admet qu'une des courbes ci-contre représente cette fonction.

3. Utiliser le tableau de variation de f pour <u>justifier</u> le choix de la courbe associée à cette fonction.

<u>Question de synthèse</u> : énoncer différentes méthodes permettant de déterminer les coordonnées du sommet d'une parabole quelconque. Structurer la réponse.





Remarque :

Afin de construire rapidement le cours sur le second degré, le professeur a fait le choix de donner les figures nécessaires aux élèves.

Un prolongement possible de cette activité est la construction de la figure de l'exercice à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Le baby-boom

Problématiques développées : P2, P3, P5 et P6.

Série : toutes séries.

Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur le second degré. Modéliser une situation.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'écrit.
Connaissances	La parabole. Statistiques.
Modalités de gestion de classe	Travail en groupes. Activité en autonomie.

Scénario pédagogique

Situation (fiche élève)

- Consignes données à l'élève :
  Modéliser l'évolution des naissances lors de la période du baby-boom au Canada par une fonction polynôme du second degré.
  Mesurer l'intérêt de cette modélisation par l'estimation du nombre de naissances en 1970.
  Rédiger un compte-rendu de cette activité présentant conclusions et démarches.
- Supports et ressources de travail :
  Tableur et/ou calculatrice.
  Les données proviennent du site « CANSIM sur E-STAT ».

Années	Estimation naissances
1950	372009
1951	381092
1952	403559
1953	417884
1954	436198
1955	442937
1956	450739
1957	469093
1958	470118
1959	479275
1960	478551
1961	475700
1962	469693
1963	465767
1964	452915

Années	Estimation naissances
1965	418595
1966	387710
1967	370894
1968	372009
1969	369647
1970	371988
1971	362187
1972	347319
1973	343373
1974	350650
1975	359323
1976	359987
1977	361400
1978	358852
1979	366064

Années	Estimation naissances
1980	370709
1981	371346
1982	373082
1983	373689
1984	377031
1985	375727
1986	372913
1987	369742
1988	376795
1989	392661
1990	405486
1991	402533
1992	398643
1993	388394
1994	385114

Années	Estimation naissances
1995	378016
1996	366200
1997	348598
1998	342418
1999	337249
2000	327882
2001	333744
2002	328802
2003	335202
2004	337072
2005	342176
2006	354617
2007	367864
2008	374595
2009	380535

Aide ou « coup de pouce »

- **Vérification de la bonne compréhension :**

Pour inciter les élèves à reformuler la consigne, on pourra leur poser quelques questions :

  - Qu'est-ce que le baby-boom ? À quelle période se situe-t-il au Canada ?
  - Quel est le travail à effectuer ? Que demande-t-on de réaliser ? D'estimer ?
  - Quelles informations nous donnent les ressources proposées ?

- **Aide à la démarche de résolution :**
  - Comment peut-on afficher un nuage de points sur l'écran de la calculatrice ? À l'aide du tableur ?
  - Comment afficher à l'écran une courbe de tendance ? Comment obtenir son équation ?

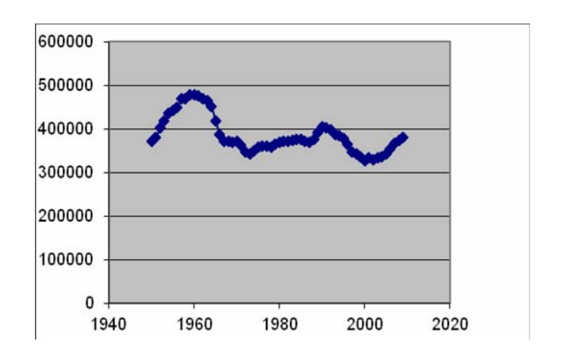
- **Apport de connaissances et de savoir-faire :**
  - Comment établir le lien entre la parabole et les coefficients a, b et c de la fonction polynôme du second degré ?

Pour aller plus loin (approfondissements et prolongements possibles) :

- Établir une étude statistique permettant de comparer les naissances au Canada et dans les pays d'Europe entre 1950 et 1968. S'appuyer sur le site de l'INSEE.
- Des phénomènes de baby-boom se retrouvent-ils sur le vieux continent ?
- Existe-t-il des périodes de l'histoire de France où l'on a pu constater des phénomènes comparables, où la courbe des naissances est modélisable par une parabole ?

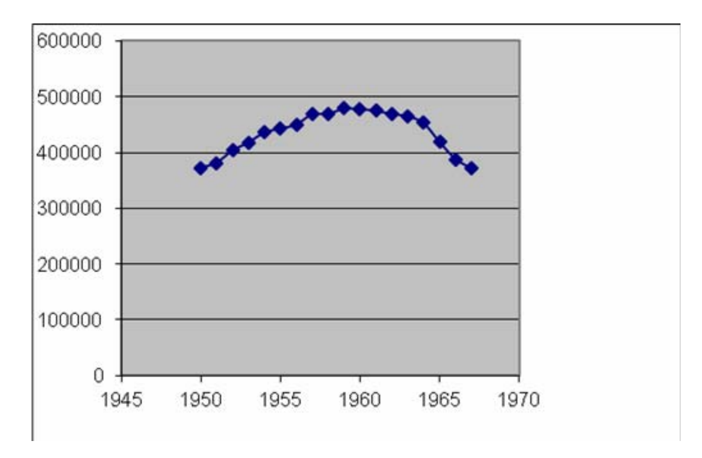
Compte-rendu des activités des élèves

Dans un premier temps, les élèves représentent le nuage de points de coordonnées (année, nombre de naissances). Le nuage obtenu est le suivant :



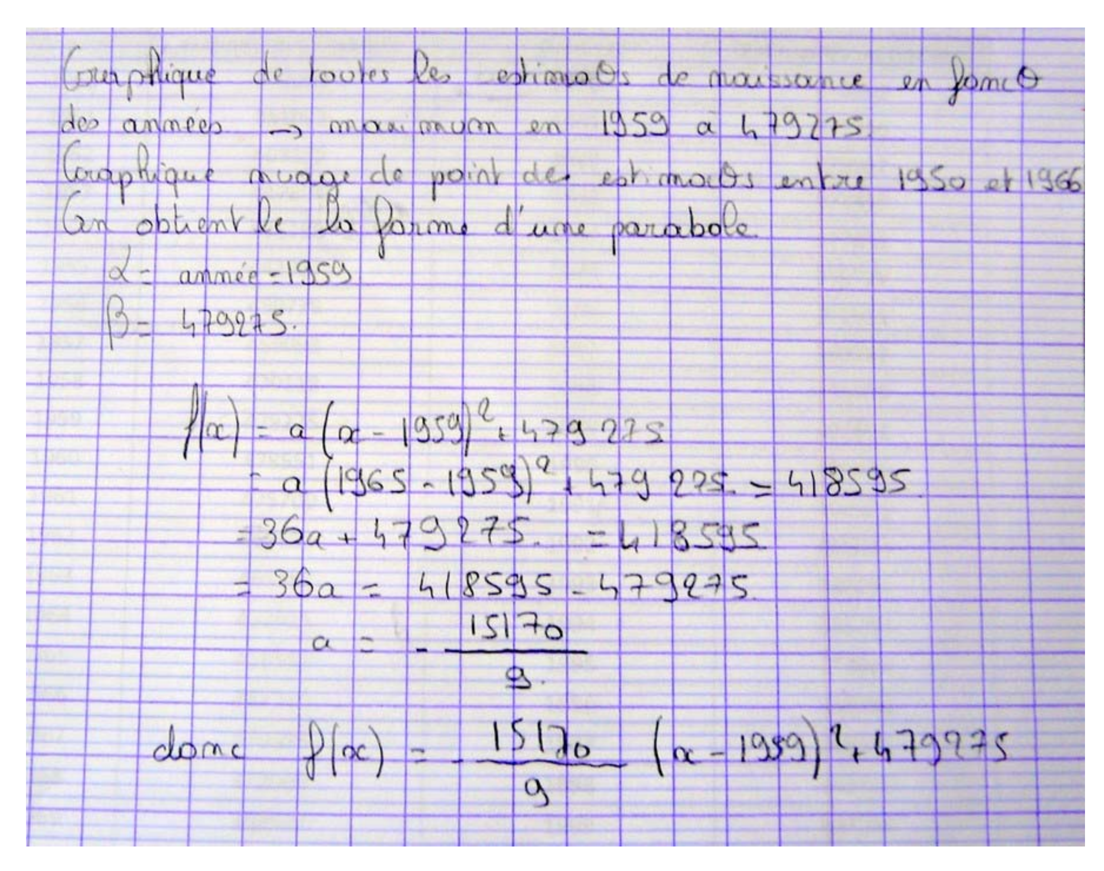
Une des élèves de la classe, Élodie, annonce : « Le baby-boom semble être situé entre 1950 et 1967 ». Elle décide donc de ne garder que les valeurs correspondantes.

Elle obtient le nuage de points suivant :



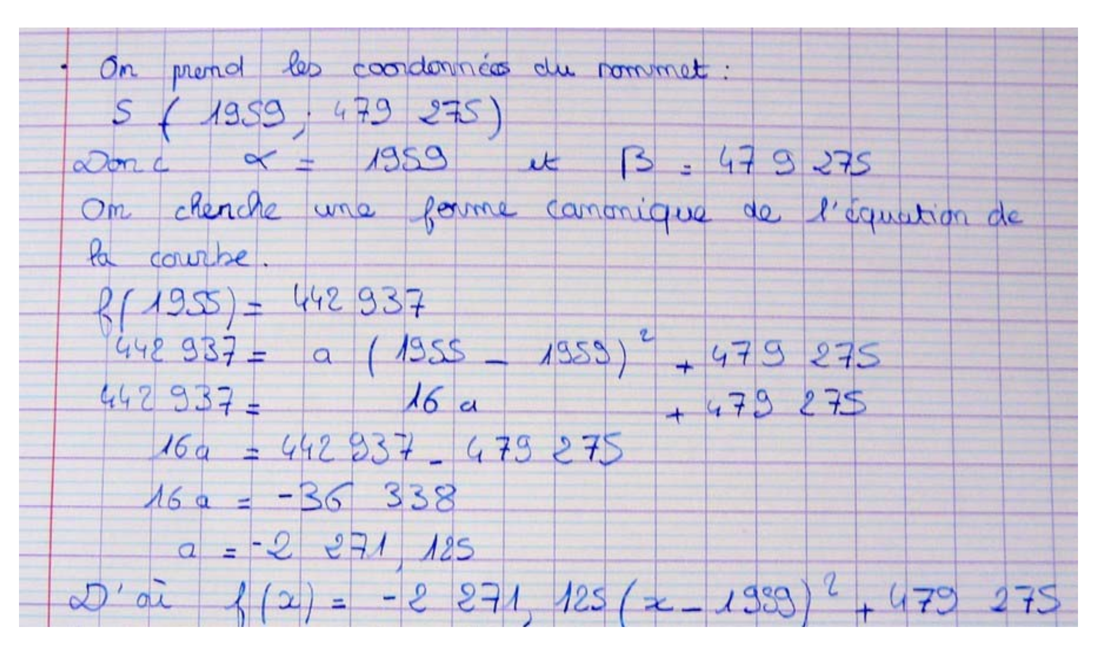
Le professeur donne la consigne de décrire les éléments de recherche qui permettent de modéliser mathématiquement cette situation.

Les élèves travaillent en autonomie. On obtient diverses productions parmi lesquelles les deux suivantes :


Graphique de toutes les estimations de naissance en fonction des années → maximum en 1959 à 479275.
Graphique nuage de point des estimations entre 1950 et 1966
On obtient le la forme d'une parabole
α = année = 1959
β = 479275.

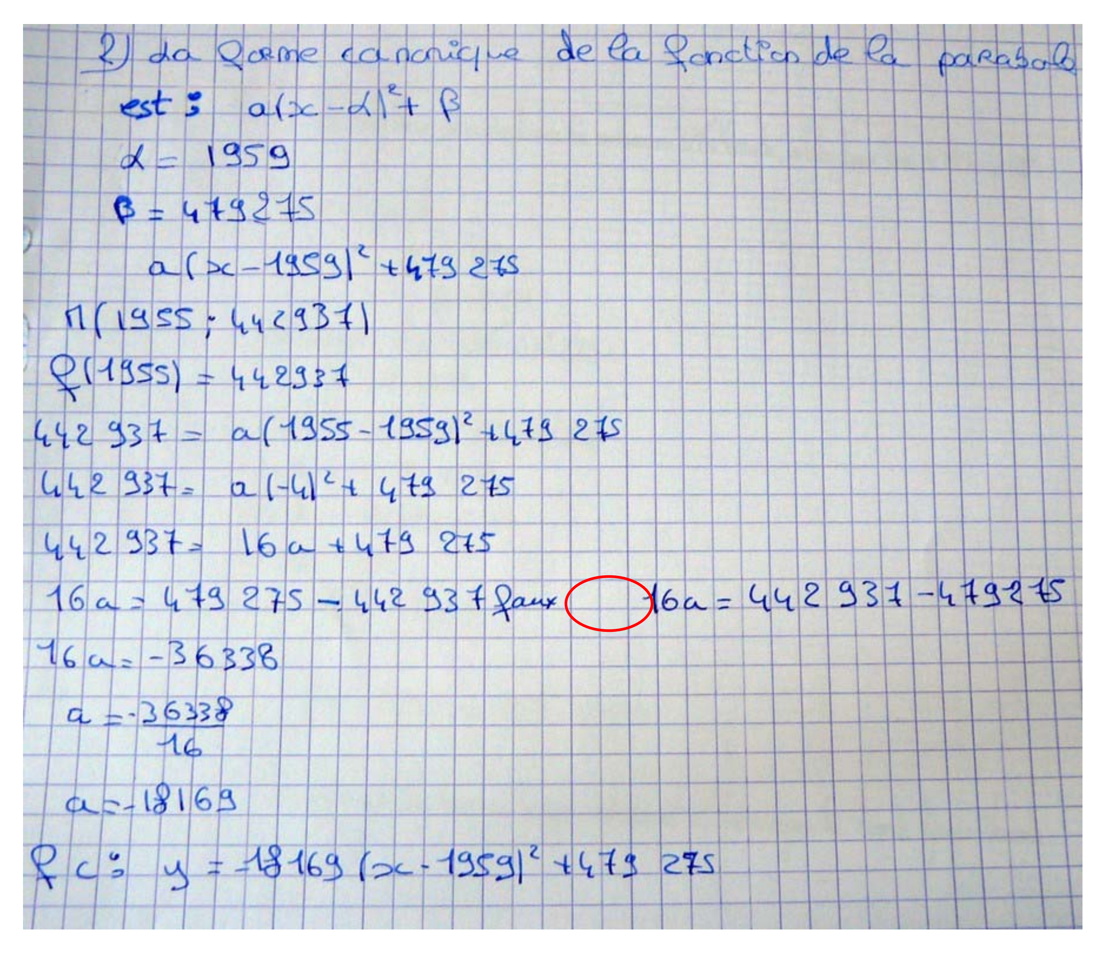
$f(x) = a(x - 1959)^2 + 479275$
$= a(1965 - 1959)^2 + 479275 = 418595$
$= 36a + 479275 = 418595$
$= 36a = 418595 - 479275$
$a = -\frac{15170}{9}$

donc $f(x) = -\frac{15170}{9}(x - 1959)^2 + 479275$


On prend les coordonnées du sommet :
S (1959 ; 479 275)
Donc α = 1959 et β = 479 275
On cherche une forme canonique de l'équation de la courbe.
f(1955) = 442 937
442 937 = a (1955 – 1959)² + 479 275
442 937 = 16 a + 479 275
16a = 442 937 – 479 275
16 a = –36 338
a = –2 271,125
D'où f(x) = –2 271,125 (x – 1959)² + 479 275

Il s'ensuit un travail collectif sur la qualité de la communication écrite.

Le professeur a repéré un certain nombre d'erreurs dans la production suivante :


2) La forme canonique de la fonction de la parabole est : a(x – α)² + β
α = 1959
β = 479275
a(x – 1959)² + 479 275
M(1955 ; 442937)
f(1955) = 442937
442 937 = a(1955 – 1959)² + 479 275
442 937 = a(–4)² + 479 275
442 937 = 16a + 479 275
16a = 479 275 – 442 937 faux 16a = 442 937 – 479 275
16a = –36338
a = –36338 / 16
a = –18169
f c : y = –18169 (x – 1959)² + 479 275

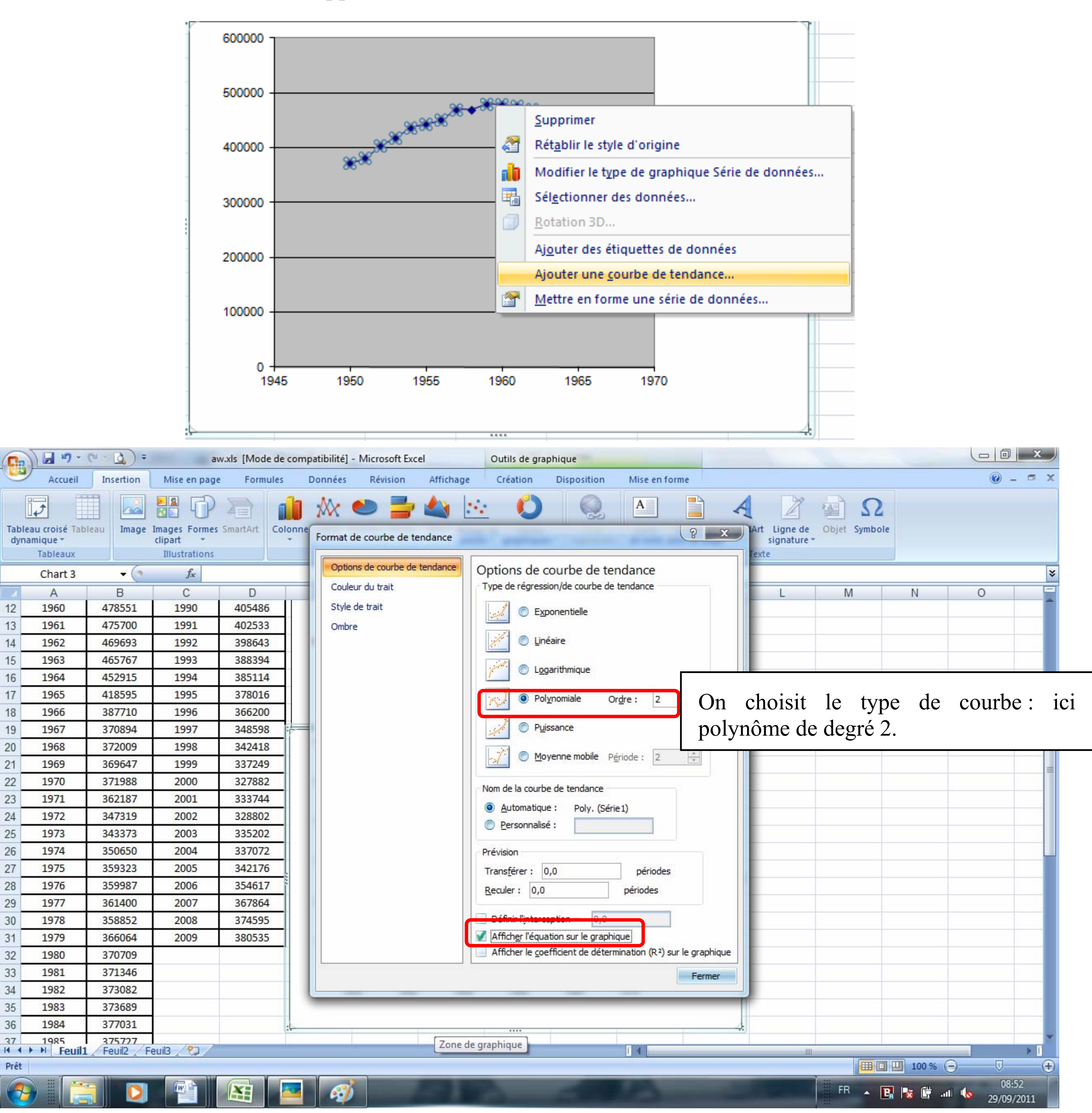
Par un questionnement ouvert, l'enseignant amène l'élève à critiquer sa production. Ce dernier constate immédiatement que le coefficient *a* est en contradiction avec l'allure de la courbe obtenue au tableur :

« La parabole est tournée vers le bas donc le coefficient de x² doit être négatif. Celui que j'obtiens est positif. J'ai fait une erreur de signe ».

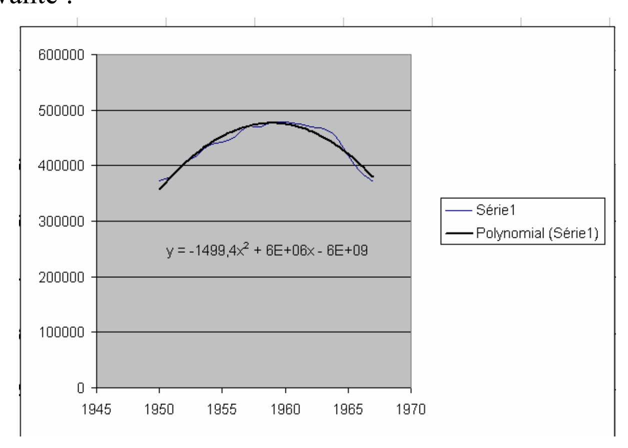
L'élève rectifie mais commet maintenant une erreur de calcul suite à une mauvaise manipulation des touches de la calculatrice. C'est l'occasion pour le professeur de travailler l'ordre de grandeur et le calcul mental réfléchi (Quel est le rapport entre 36000 et 18000 ? Comment diviser mentalement par 16 ?...).

Un temps d'échange collectif amène le professeur à présenter une nouvelle fonctionnalité du tableur : la courbe de tendance.

À l'aide d'un clic droit, on fait apparaître :



On obtient la courbe suivante :



Question du professeur : « Comment comparer l'équation de la parabole que vous avez déterminée avec celle obtenue à l'aide du tableur ? »

Traduction de l'équation :

• $y = -1499,4\,x^2 + 6E+06\,x - 6E+09.$

$y = -1499,4\,x^2 + 6\,000\,000\,x - 6\,000\,000\,000$

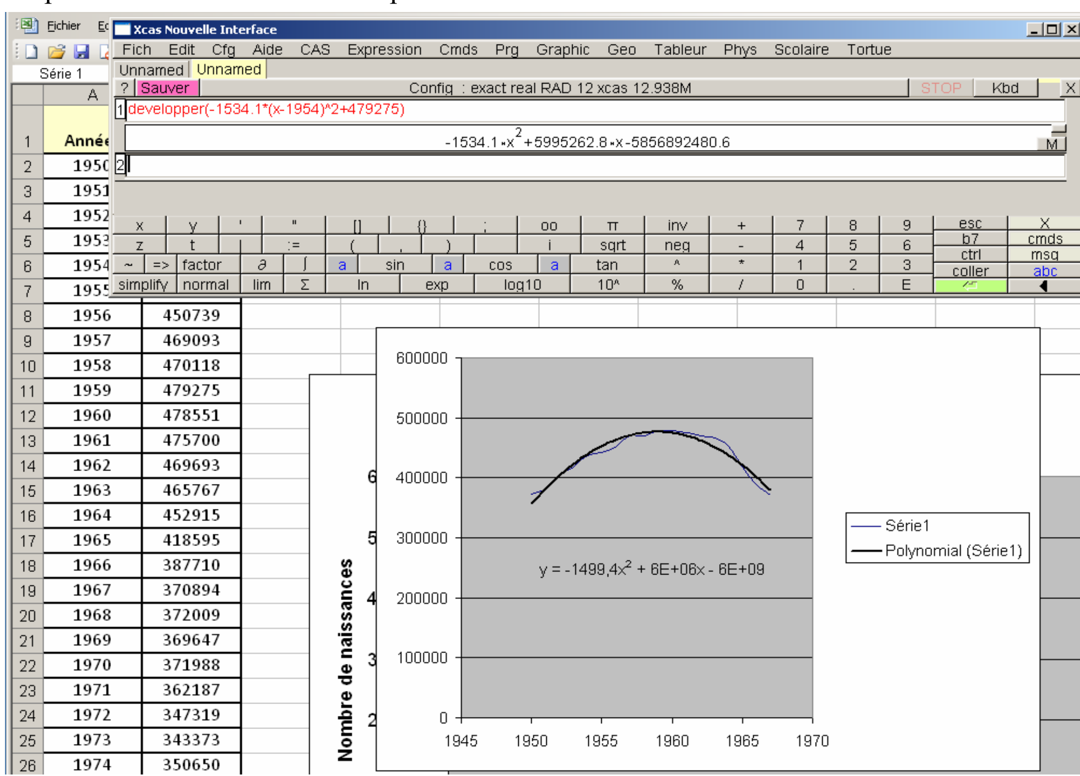
Une autre rédaction :

D'où $f(x) = -2\,271,125\,(x - 1959)^2 + 479\,275$

Avec xcas $f(x) = -2271,125\,x^2 + 8898267,75\,x$ ...

$- 8715373986,12$

Une comparaison visualisée sur une réponse d'élève :



	A	
1	Année	
2	1950	
3	1951	
4	1952	
5	1953	
6	1954	
7	1955	
8	1956	450739
9	1957	469093
10	1958	470118
11	1959	479275
12	1960	478551
13	1961	475700
14	1962	469693
15	1963	465767
16	1964	452915
17	1965	418595
18	1966	387710
19	1967	370894
20	1968	372009
21	1969	369647
22	1970	371988
23	1971	362187
24	1972	347319
25	1973	343373
26	1974	350650

Pour aller plus loin…

« Comparer les résultats obtenus pour l'évaluation du nombre de naissances à l'aide des deux modélisations ».

Une histoire de paraboles

Problématiques développées : P2, P3, P5 et P6.
Série : S.
Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Objectifs pédagogiques	Résoudre un problème traitant du second degré avec les TICE.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'oral.
Connaissances	La parabole.
Logiciels	Logiciel de géométrie dynamique. Tableur.
Modalités de gestion de classe	Activité en autonomie. Travaux pratiques.

Fiche élève : trajectoire du sommet d'une parabole

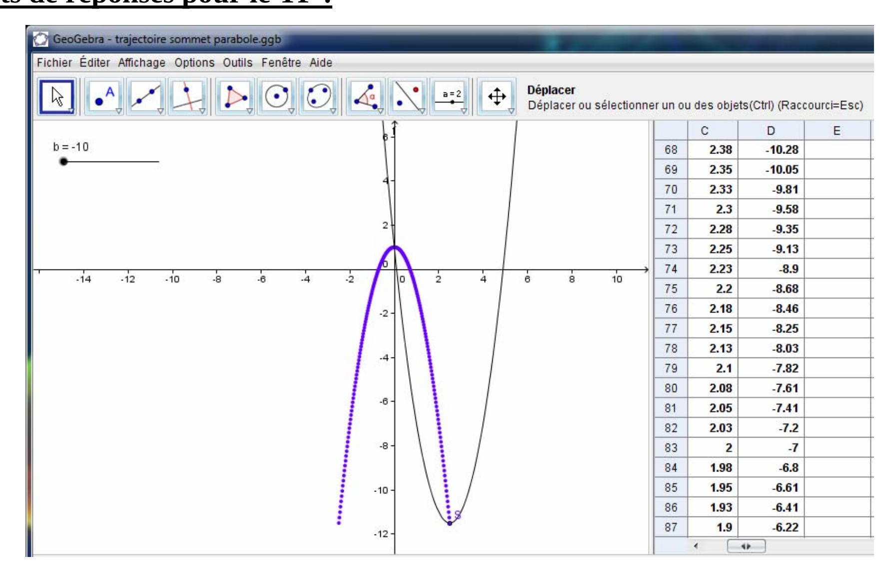
Consignes données à l'élève : traiter le TP en respectant les appels au professeur.

L'objet de ce TP est de conjecturer le lieu du sommet S de la parabole ($\mathcal{P}$) d'équation $y = 2x^2 + bx + 1$ où b est un nombre réel.
Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
Appeler le professeur pour valider la construction.
En faisant varier b, observer les déplacements du point S et répondre au problème.
Appeler le professeur pour valider la construction.
A l'aide d'un tableur saisir les coordonnées de S lorsque b varie et conjecturer l'équation de la courbe obtenue.

Prolongements possibles :

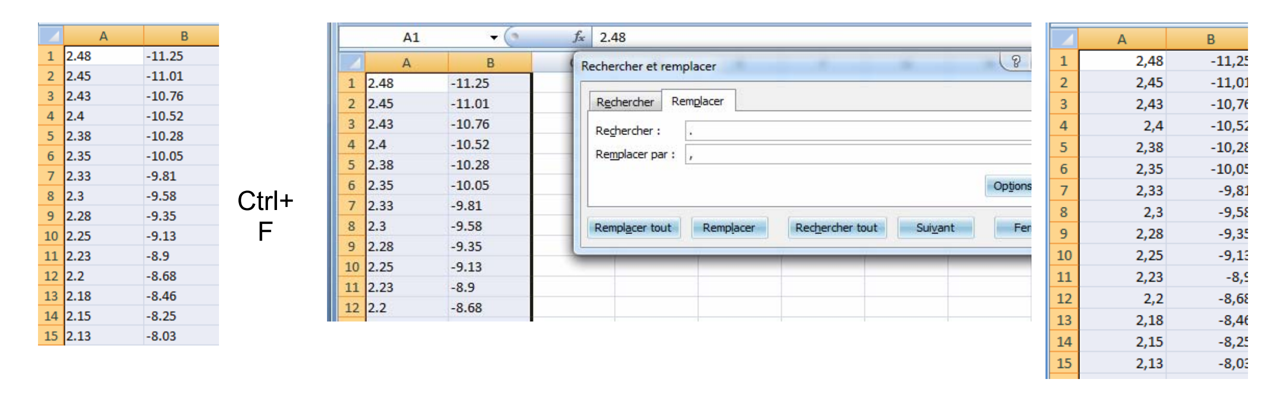
- Dans le cadre du TP, on peut demander à examiner le même problème avec la parabole d'équation $y = ax^2 + x + 2$ où a est un nombre réel.
- Dans le cadre d'un devoir en temps libre, le professeur demande de rédiger la démonstration qui permet de valider ou de rejeter la conjecture concernant le lieu du sommet S de la parabole ($\mathcal{P}$).

Éléments de réponses pour le TP :



	C	D	E
68	2.38	-10.28	
69	2.35	-10.05	
70	2.33	-9.81	
71	2.3	-9.58	
72	2.28	-9.35	
73	2.25	-9.13	
74	2.23	-8.9	
75	2.2	-8.68	
76	2.18	-8.46	
77	2.15	-8.25	
78	2.13	-8.03	
79	2.1	-7.82	
80	2.08	-7.61	
81	2.05	-7.41	
82	2.03	-7.2	
83	2	-7	
84	1.98	-6.8	
85	1.95	-6.61	
86	1.93	-6.41	
87	1.9	-6.22	

Indication :
On pensera à transformer les formats d'écriture des nombres extraits du tableur-*GeoGebra* par la fonction : Ctrl + F (passage du point au point décimal ou virgule)



	A	B
1	2.48	-11.25
2	2.45	-11.01
3	2.43	-10.76
4	2.4	-10.52
5	2.38	-10.28
6	2.35	-10.05
7	2.33	-9.81
8	2.3	-9.58
9	2.28	-9.35
10	2.25	-9.13
11	2.23	-8.9
12	2.2	-8.68
13	2.18	-8.46
14	2.15	-8.25
15	2.13	-8.03

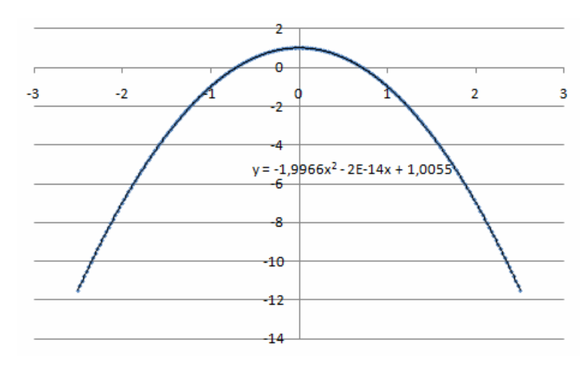
Ctrl+ F

A1 2.48

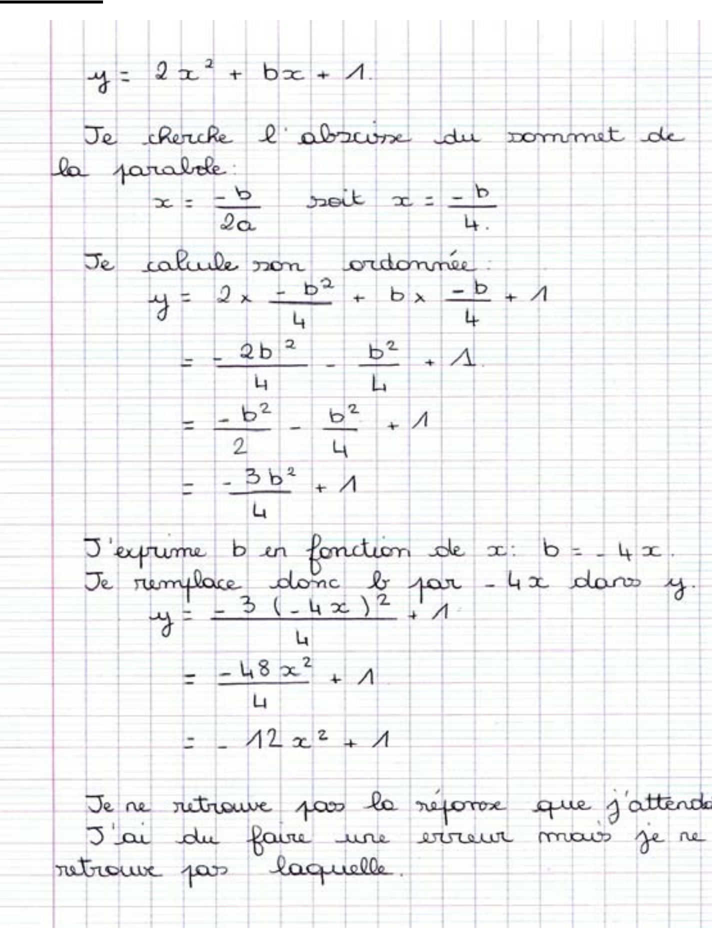
	A	B
1	2.48	-11.25
2	2.45	-11.01
3	2.43	-10.76
4	2.4	-10.52
5	2.38	-10.28
6	2.35	-10.05
7	2.33	-9.81
8	2.3	-9.58
9	2.28	-9.35
10	2.25	-9.13
11	2.23	-8.9
12	2.2	-8.68

	A	B
1	2,48	-11,2
2	2,45	-11,0
3	2,43	-10,7
4	2,4	-10,5
5	2,38	-10,2
6	2,35	-10,0
7	2,33	-9,81
8	2,3	-9,5
9	2,28	-9,3
10	2,25	-9,1
11	2,23	-8,
12	2,2	-8,6
13	2,18	-8,4
14	2,15	-8,2
15	2,13	-8,0

On obtient une idée de l'équation de la trajectoire du sommet en utilisant la courbe de tendance.



<u>Une production écrite :</u>



$y = 2x^2 + bx + 1$

Je cherche l'abscisse du sommet de la parabole :

$x = \frac{-b}{2a}$ soit $x = \frac{-b}{4}$.

Je calcule son ordonnée :

$y = 2 \times \frac{-b^2}{4} + b \times \frac{-b}{4} + 1$

$= -\frac{2b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + 1$

$= \frac{-b^2}{2} - \frac{b^2}{4} + 1$

$= \frac{-3b^2}{4} + 1$

J'exprime b en fonction de x : $b = -4x$.
Je remplace donc b par $-4x$ dans y.

$y = \frac{-3(-4x)^2}{4} + 1$

$= \frac{-48x^2}{4} + 1$

$= -12x^2 + 1$

Je ne retrouve pas la réponse que j'attends. J'ai du faire une erreur mais je ne retrouve pas laquelle.

Commentaires :
L'élève s'engage dans un raisonnement correct, il fait preuve d'esprit critique, sa communication écrite est bonne. Lors de ce travail, il atteste les compétences C2, C3 et C4a explicitées ci-après.

<u>Exemple de grilles de compétences :</u>

Ces grilles permettent une traçabilité dans l'acquisition des compétences repérées.

Grille de compétences à l'usage de l'élève :

NOM	**Prénom**	**Classe**		**Trimestre**			
Grille de compétences : résoudre des problèmes, pratiquer une démarche scientifique							
		DS1	DS2	DS3	TP1	TP2	TP3
C1	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome						
C2	Mener des raisonnements						
C3	Avoir une attitude critique face aux résultats						
C4a	Communiquer à l'écrit						
C4b	Communiquer à l'oral						

Grille à l'usage du professeur :

	Résoudre des problèmes, pratiquer une démarche scientifique				
	C1	**C2**	**C3**	**C4a**	**C4b**
	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome	Mener des raisonnements	Avoir une attitude critique face aux résultats obtenus	Communiquer à l'écrit	Communiquer à l'oral
Nom Prénom					

Exemple d’activité dans le cadre de l’accompagnement personnalisé.

Problématiques développées : P2, P3, P4, P5 et P6.
Série : série S, adaptable aux autres séries.
Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Scénario pédagogique : une évaluation diagnostique réalisée en cours de Mathématiques suivie d’une séance développée dans le cadre de l’Accompagnement Personnalisé. Une séance portant sur la démarche d’investigation, réalisée en cours de Mathématiques, boucle le scénario pédagogique.

L’une des finalités de l’Accompagnement Personnalisé, en classe de première, est de favoriser l’acquisition de compétences propres à chaque voie de formation. De ce fait, les auteurs ont souhaité présenter un scénario pédagogique permettant de développer chez les apprenants des compétences scientifiques tout en répondant spécifiquement aux besoins de chacun. L’évaluation diagnostique est ainsi au cœur de ce protocole, elle pilote l’Accompagnement Personnalisé.

Afin de préparer une séance sur la démarche d’investigation, les professeurs se sont intéressés à l’acquisition de connaissances structurées par les élèves :

L’élève sait-il :

- mobiliser ses connaissances (donner du sens, traduire, décoder, mettre en relation, choisir une propriété, appliquer une méthode…) ;
- utiliser les TIC ;
- raisonner ;
- démontrer ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer un résultat par écrit ?

Voici l’énoncé de l’évaluation :

Après plusieurs relevés, un scientifique a modélisé une passe de volley-ball, la passe de Clément à son coéquipier Florian. La hauteur du ballon $h(t)$ en fonction du temps t est : $h(t) = -0{,}525t^2 + 2{,}1t + 1{,}9$ où $h(t)$ est exprimée en mètres et t en secondes.

a) À quelle hauteur Clément commence-t-il sa passe ?

b) Quelle hauteur maximale le ballon atteint-il ?

c) Florian ne réussit pas à toucher le ballon que Clément lui passe. Combien de temps après la passe de Clément le ballon tombe-t-il au sol ?

d) Durant combien de temps le ballon est-il en phase de descente ?

La hauteur du filet est de 2,43 mètres. Durant combien de temps le ballon est-il situé au-dessus du filet ?

Les réponses sont à justifier.

L’évaluation a débouché sur la formation de trois groupes de besoins en fonction des profils repérés.

Le premier groupe

Les élèves de ce groupe s’engagent, ont des connaissances, parfois confuses, peu structurées. Ils éprouvent des difficultés à reconnaître dans un problème simple l’outil mathématique adéquat. Ils montrent des acquis dans l’utilisation des calculatrices. Ils attestent d’un regard critique intéressant et communiquent correctement à l’écrit.

Voici quelques extraits significatifs d’une copie d’un élève de ce groupe.

Extrait 1

a) $h(t) = -0{,}525t^2 + 2{,}1t + 1{,}9$
h la hauteur en m.
t le temps en s
on cherche la hauteur tel que le temps t=0
on pose $h(0) = -0{,}525 \times 0^2 + 2{,}1 \times 0 + 1{,}9$
$= 1{,}9$
ainsi Clément commence sa passe à 1,9 m donc
$u_0 = 1{,}9$m
2) On cherche a quelle hauteur maximale le ballon atteint-il.
on pose $U_n = -0{,}525n^2 + 2{,}1n + 1{,}9$
on utilise le mode recur de la calculatrice.
on visualise les premiers termes suivant:
$u_0 = 1{,}9$
$u_1 = 3{,}475$
$u_2 = 4$ — il semble que $u_2 = 4$ soit le maximum de cette fonction.
$u_3 = 3{,}475$
$u_4 = 1{,}9.$ — il semblerait donc que la hauteur maxima est 4 m.
On cherche a justifier cette hypothèse.

Extrait 2

il s'agit donc bien d'une fonction polynome du second degré
on cherche a étudier le tableau de variation de cette fonction.
on pose $\Delta = a\,b^2 - 4ac$
$= -0{,}525 \times (2{,}1)^2 - 4 \times (-0{,}525) \times 1{,}9$
$= 1{,}67475 > 0$

Extrait 3

Je n'arrive à rien d'interessant avec mes resultats
je repars sur la forme.
$U_n = -0{,}525n^2 + 2{,}1n + 1{,}9.$
jesais donc grâce au mode recur que le max est atteint au rang 2.

on pose: $U_2 = -0{,}525 \times 2^2 + 2{,}1 \times 2 + 1{,}9.$
$= 4$

ainsi la hauteur max est 4 m.

Le deuxième groupe

Les élèves de ce groupe comprennent et interprètent correctement la situation. Ils utilisent à bon escient des connaissances mathématiques et la calculatrice.Ils ne justifient pas les résultats.

Voici un extrait de copie.

a) On remplace t par 1. On cherche la hauteur des mains de Clément
$-0,525 \times 1^2 + 2,1 \times 1 + 1,9 = 3,475$.
$-0,525 \times 0^2 + 2,1 \times 0 + 1,9 = 1,9$.
On rentre cette fonction dans la Table des fonctions sur la calculatrice et on observe que lors de la passe de Clément il se trouve à 1,9m du sol.
b) Le ballon atteint son point culminant à 2 seconde à la hauteur de 4 mètres.
c) F(4) = 1,9m donc à F(5) = 0.
d) Le ballon est au plus haut à 2 secondes à 4 mètres 5 - 2 = 3
Le ballon touche le sol à 5 secondes donc il est en descente à partir de la 2ième seconde.
e) Si le filet est à 2,43 mètres dans le tableau des fonctions à la seconde 1, 2 et 3 le ballon ~~le ballon se trouv~~ se trouve successiv à 3,475 ; 4 ; 3,475 mètres donc il reste 3 secondes au dessus du filet.

Le troisième groupe

Les élèves de ce groupe sont en réussite globale.

Pour permettre le progrès de tous les élèves, quels que soient leurs besoins, une remédiation plus ciblée, fondée sur les points forts de chacun, est proposée en Accompagnement Personnalisé.

Le support, commun aux trois groupes, est un exercice du même type que celui proposé en évaluation diagnostique. Le travail demandé à chaque groupe est, par contre, différent.

Des chercheurs ont, en première approximation, modélisé le taux de croissance μ (par heure h^{-1}) de la bactérie Methylosinustrichosporium (*) en fonction de la température T (en degré Celsius) par :

$$\mu(T) = -6\times10^{-5}T^2 + 2,76\times10^{-3}T - 1,998\times10^{-2}.$$

Les chercheurs souhaitent connaître :

- les températures minimale et maximale en-deçà et au-delà desquelles le taux de croissance est propice au développement de la bactérie ;
- le taux de croissance maximum ;
- l'intervalle des températures pour lequel le taux de croissance augmente en fonction de la température ;
- les températures donnant un taux de croissance égal à $4,5\times10^{-3}$.

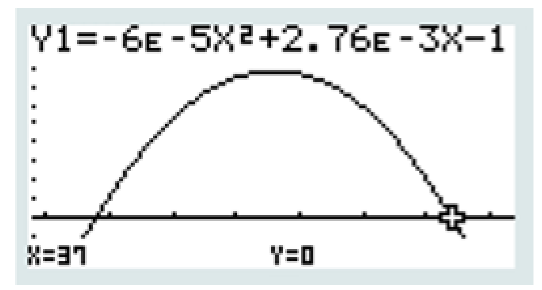
(*) Bactéries capables de croître et de se multiplier en utilisant le méthane comme seule source de carbone et d'énergie.

Pour les élèves du premier groupe : l'objectif fixé par le professeur est d'apprendre à utiliser son cours.

Pour cela, le professeur propose aux apprenants de résoudre le problème à l'aide de la leçon et de l'ébauche du travail d'un élève qu'il donne comme support, ce dernier étant reproduit ci-dessous :

Pour résoudre le problème posé, Mélanie effectue la démarche suivante :

- elle repère dans le texte les mots importants pour s'approprier la situation ;
- elle trace à l'écran de sa calculatrice la courbe représentant la fonction μ



- la parabole obtenue modélise le taux de croissance de la bactérie ;
- μ est une fonction polynôme de degré 2 ;
- elle écrit $a = \ldots$, $b = \ldots$ et $c = \ldots$

Poursuivre le travail de Mélanie afin de répondre aux questions posées par les chercheurs.

Pour les élèves du deuxième groupe : l'objectif fixé par le professeur est d'apprendre à utiliser une fiche méthode pour apprendre à justifier.

L'activité proposée aux élèves par le professeur est la suivante :

Pour résoudre le problème posé, Charlotte utilise la fiche méthode suivante :
f est la fonction polynôme définie sur R par :
$f(x) = -6\times10^{-5}x^2 + 2{,}76\times10^{-3}x - 1{,}998\times10^{-2} = -6\times10^{-5}(x-9)(x-37) = -6\times10^{-5}(x-23)^2 + 1{,}176\times10^{-2}$.

- Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, j'utilise la forme factorisée de $f(x)$: $f(x) = -6\times10^{-5}(x-9)(x-37)$

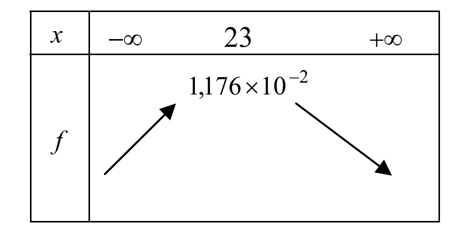
$f(x) = 0$ équivaut à $-6\times10^{-5}(x-9)(x-37) = 0$, ce qui donne $x = 9$ ou $x = 37$.

- Pour calculer le discriminant de f, j'utilise la forme développée de f :

$f(x) = -6\times10^{-5}x^2 + 2{,}76\times10^{-3}x - 1{,}998\times10^{-2}$
$a = -6\times10^{-5}$; $b = 2{,}76\times10^{-3}$; $c = -1{,}998\times10^{-2}$
$\Delta = (2{,}76\times10^{-3})^2 - 4\times(-6\times10^{-5})\times(1{,}998\times10^{-2}) = 2{,}8224\times10^{-6}$

- Pour dresser le tableau de variation de f , j'utilise la forme canonique de f :

$f(x) = -6\times10^{-5}(x-23)^2 + 1{,}176\times10^{-2}$



x	$-\infty$	23	$+\infty$
f	↗	$1{,}176\times10^{-2}$	↘

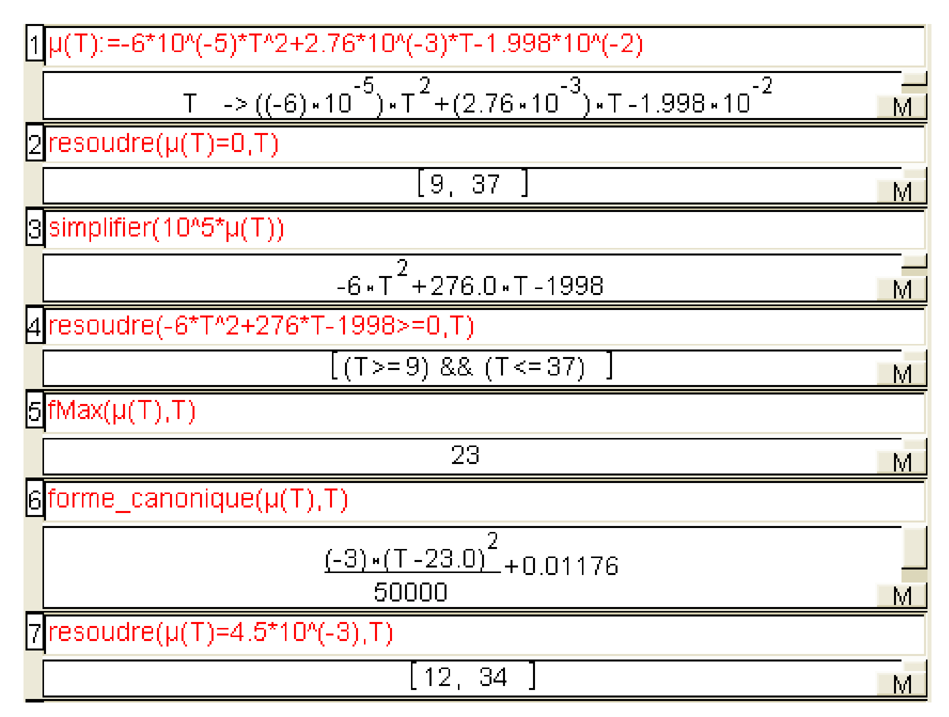
Répondre aux questions suivantes en choisissant la forme de f la plus adéquate :

1. Résoudre dans **R** l'inéquation $f(x) \geq 0$.
   1.A. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) \leq 1{,}176\times10^{-2}$.
   1.B. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole qui représente f .
   1.C. Résoudre dans **R** l'équation $f(x) = 4{,}5\times10^{-3}$.
2. Répondre aux questions posées par les chercheurs.

Pour les élèves du troisième groupe : l'objectif fixé par le professeur est d'approfondir.

L'activité proposée aux élèves de ce groupe consiste à résoudre le problème à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Pour résoudre le problème posé, Léa utilise un logiciel de calcul formel dont voici une copie d'écran :



Expliquer la démarche de Léa.

Bilan des travaux

Les corrections et les synthèses des différentes démarches proposées à chaque groupe d'élèves sont faites en Accompagnement Personnalisé. Chaque groupe expose son travail au reste de la classe, favorisant ainsi la communication orale. Cette synthèse offre à chaque élève la possibilité de choisir l'une des démarches pour un même problème en fonction de ses compétences.

Prolongement

Afin de mettre à profit ces pistes de différenciations pédagogiques, il serait intéressant de proposer deux situations similaires aux élèves : l'une en classe, accompagnée d'un questionnement sur le choix méthodologique effectué par l'élève (qui peut être fait avant l'évaluation diagnostique) et l'autre sur l'Espace Numérique de Travail mettant en scène une situation plus complexe dans laquelle les élèves devraient mobiliser et combiner plusieurs procédures acquises. Le professeur pourrait ainsi vérifier la capacité des élèves à réinvestir ce qu'ils ont appris dans un autre cadre et selon des modalités différentes.

2. Dérivation

Lien entre coefficient directeur et pente d’une droite

Cette activité a pour but d’anticiper les difficultés, d’assurer une meilleure homogénéité des connaissances à l’approche du chapitre sur la dérivation. Elle fait suite à un repérage des besoins sur les notions d’équations de droites, de coefficient directeur, de pente.

Problématiques développées : P1, P2, P4 et P5.
Série : toutes séries.
Place dans la progression : avant le cours sur la dérivation.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les équations de droite. Donner un sens concret au coefficient directeur.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l’oral.
Connaissances	Équations de droites.
Logiciels	Tableur et/ou calculatrice. Logiciel de géométrie dynamique.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel. Accompagnement personnalisé.

Scénario pédagogique

Phase 1 : un support concret : à la montagne (extrait Bac L maths info)

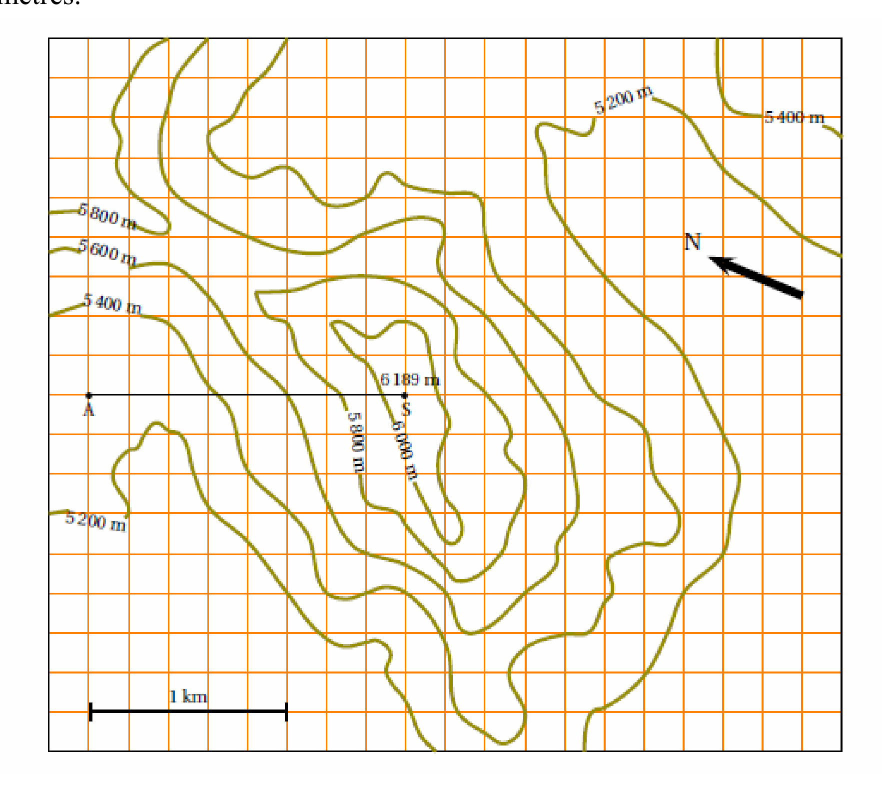
Le professeur laisse travailler ses élèves en autonomie sur le support proposé ci-dessous. Il passe dans les rangs pour aider ou débloquer certains élèves en difficulté. Des besoins se font sentir sur un éclairage entre « coefficient directeur » et « pente d’une droite ». Le professeur explore ces notions à l’aide du logiciel *GeoGebra* afin de créer des images mentales chez les apprenants. Une synthèse collective est réalisée à l’issue de ce travail qui conduit à l’élaboration d’une fiche-méthode.



Island peak 6189m - Makalu 8463 m

Ci-dessous se trouve la carte de la région montagneuse autour du sommet « Island Peak » au Népal. Le sommet culmine à 6 189 mètres d’altitude et est matérialisé sur la carte par le point S.

1. Hachurer sur la carte la zone montagneuse située à une altitude comprise entre 5 200 mètres et 5 400 mètres.



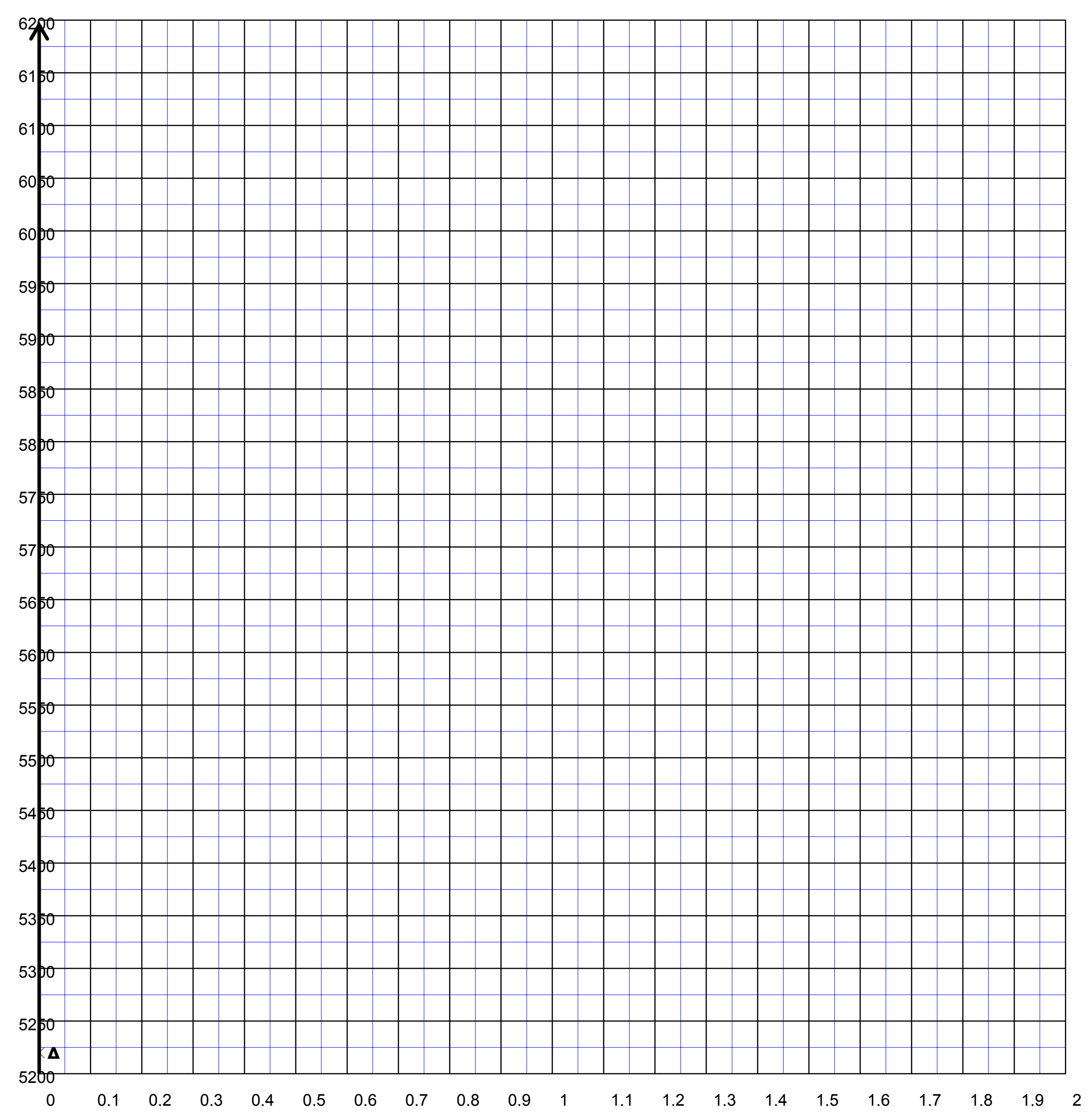
2. Alexandre a enfin réussi à s'offrir le trek de ses rêves : atteindre en quelques jours le camp de base de l'Everest que représente l'Island Peak.

Pour sa dernière étape, Alexandre va partir du point A situé à 5 220 mètres d'altitude pour arriver au sommet S en suivant le trajet indiqué sur la carte.

- À partir de la lecture de la carte, calculer l'élévation moyenne, exprimée en mètres par kilomètre parcouru, lors de sa dernière étape. Arrondir le résultat à l'unité.
- Dans un repère donné, le point A a pour coordonnées (0 ; 5 220). Tracer dans le repère donné un profil du parcours d'Alexandre.

Indication possible : pour aider à tracer le profil, on peut repérer sur la carte des points du parcours dont l'altitude est connue.

- Le profil obtenu est la représentation d'une fonction dite affine par morceaux. Quelle est son expression ?
- Que représente le coefficient directeur de chacun de ces segments de droites ?
- À l'aide d'un nouveau tracé, retrouver sur le graphique l'élévation moyenne par kilomètre parcouru.

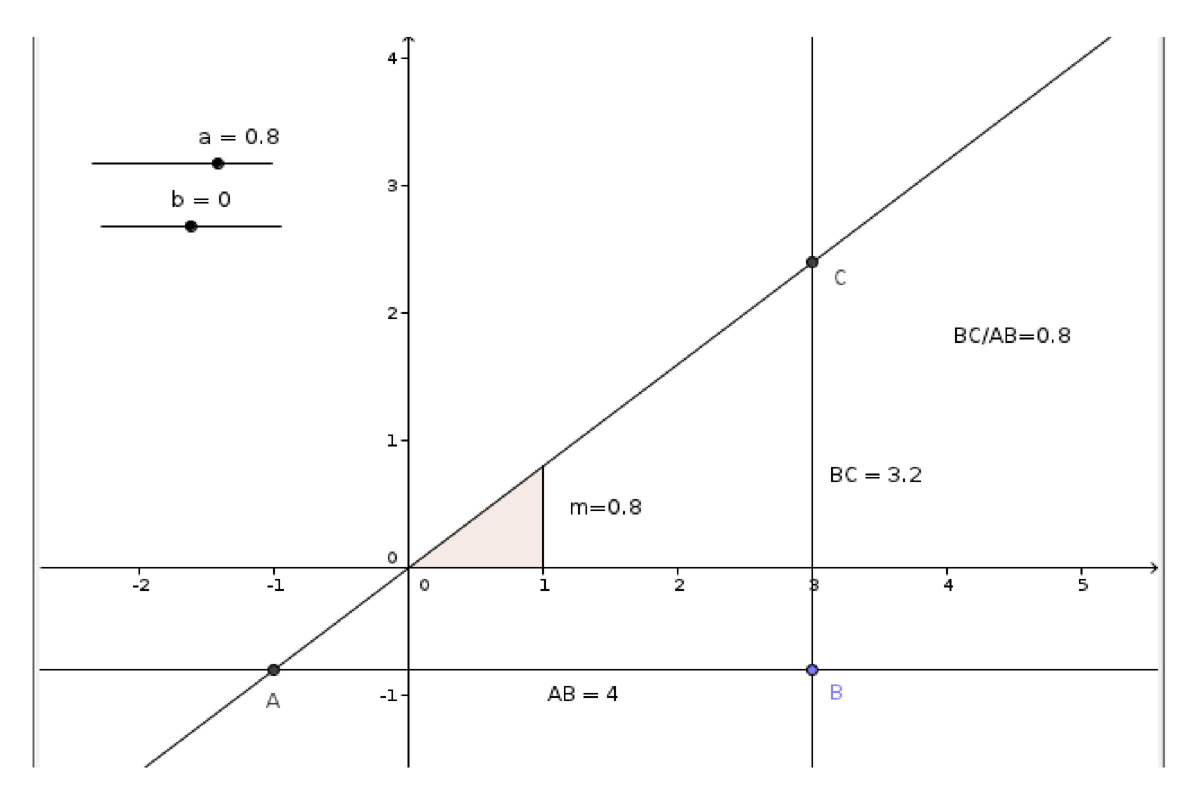


Phase 2 : prolongement de l'activité par l'élaboration d'une fiche personnelle.

En utilisant le logiciel *GéoGebra*, tracer la droite d'équation $y = ax + b$, a et b étant les valeurs données par deux curseurs. On se positionne par exemple sur $y= 0,8x$ dans un repère orthogonal. On prend le point A d'abscisse –1 de la droite tracée, B est un point mobile sur la droite horizontale passant par A et le point C est l'intersection de la droite tracée et de la perpendiculaire à (AB) passant par B. On calcule AB, BC, et le rapport BC/AB.

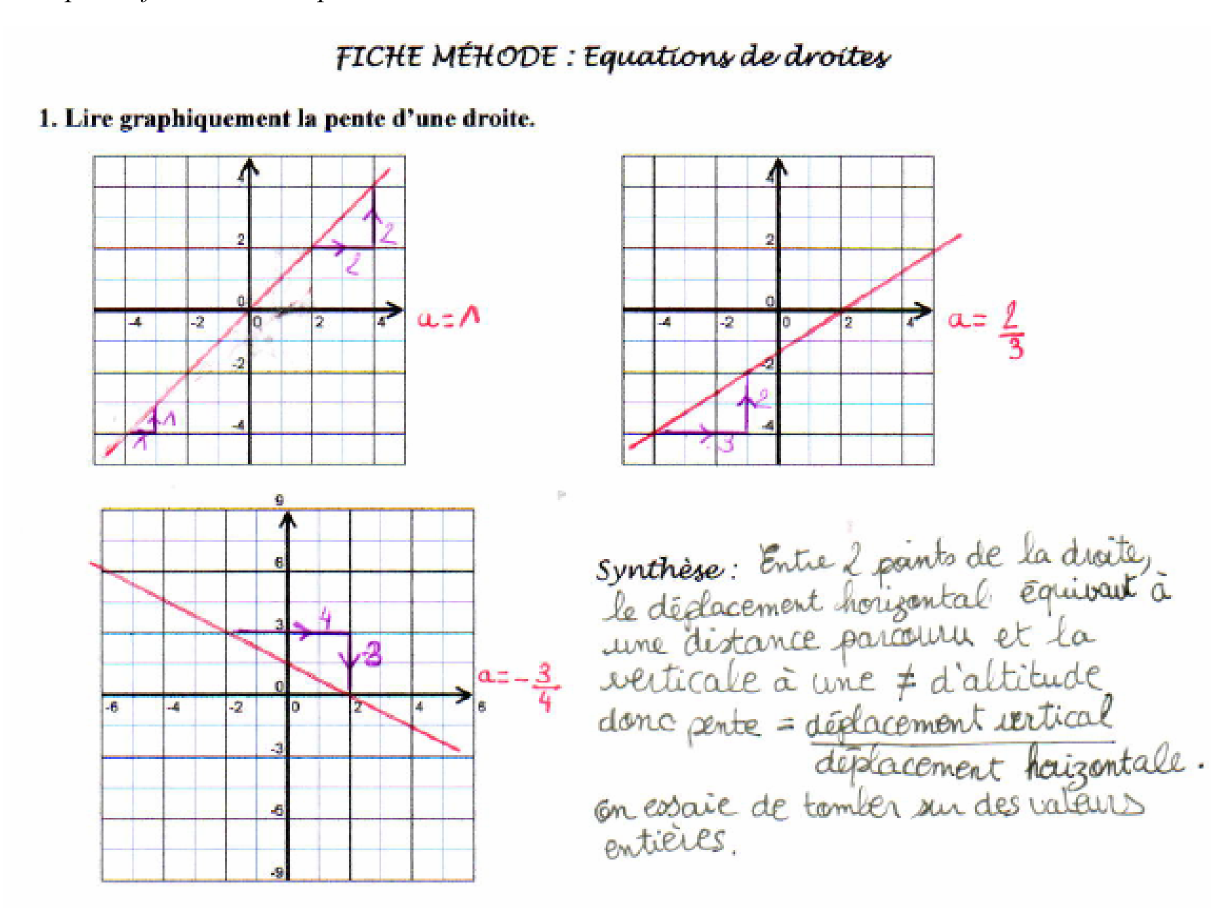
Les élèves remarquent alors que, quel que soit le point B, le rapport est constant.

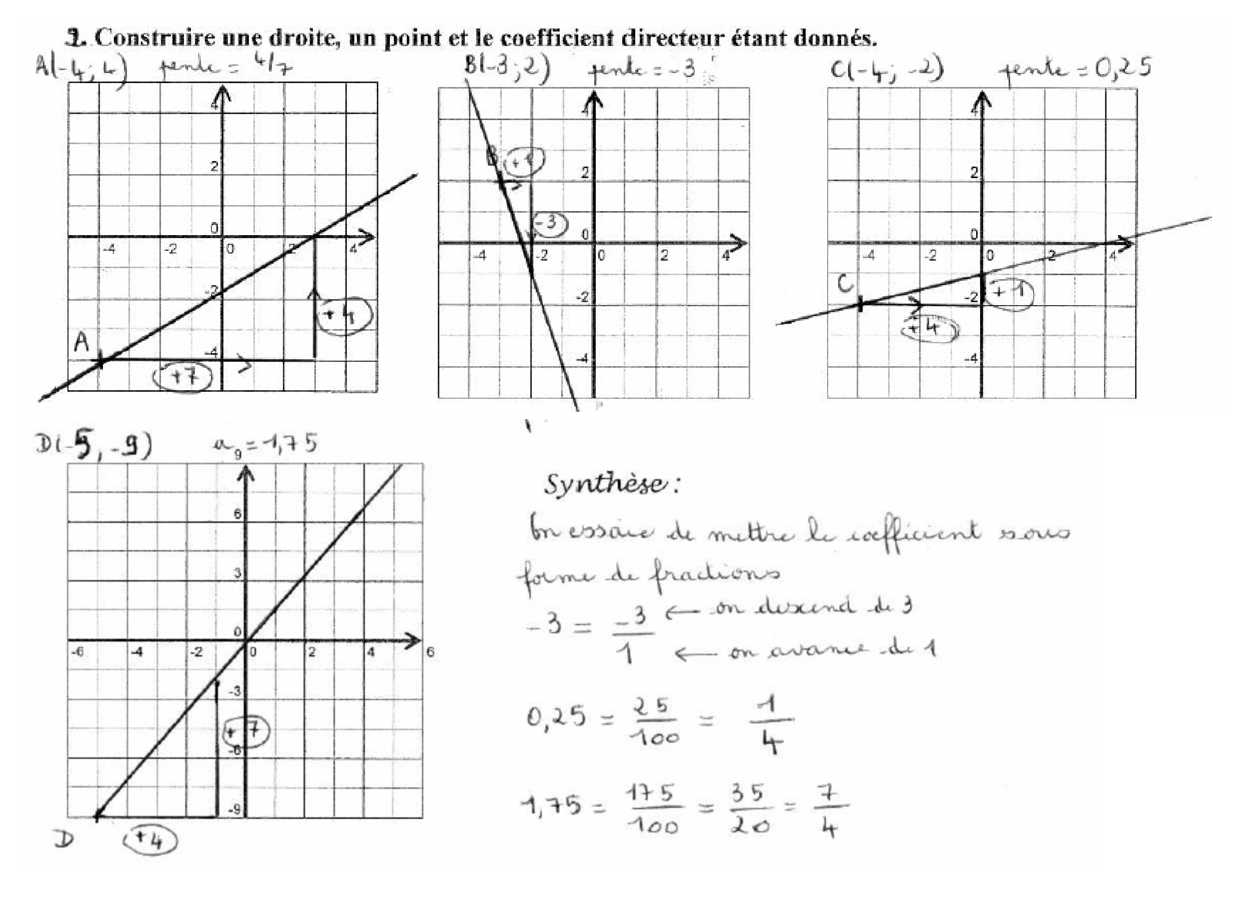
Les triangles rectangles qui apparaissent à l'écran ont des côtés proportionnels.



À l'issue de cette activité, les élèves amorcent le début d'une **fiche-méthode qu'ils compléteront au fur et à mesure** des séances.

Exemple de fiche élaborée par des élèves :





On pourra vérifier avec les élèves par calcul que si x « augmente » de 1 alors y « augmente » de a.

Phase 3 : lien graphique entre coefficient directeur et pente.

L'objectif de l'étude suivante est de créer chez les élèves des images mentales afin de les rendre capables d'appréhender le lien entre coefficient directeur et pente. Pour cela, on utilise le logiciel *GeoGebra*. Les élèves échangent leurs observations à l'oral et complètent en autonomie leur fiche-méthode selon leurs besoins.

On se placera dans un repère **orthonormé** et on continue d'exploiter la situation créée avec le logiciel *GeoGebra*.

a. Éduquer son œil, créer des liens entre coefficients directeurs et situations de la droite.

À l'oral, le professeur amène les élèves à s'intéresser aux questions suivantes :

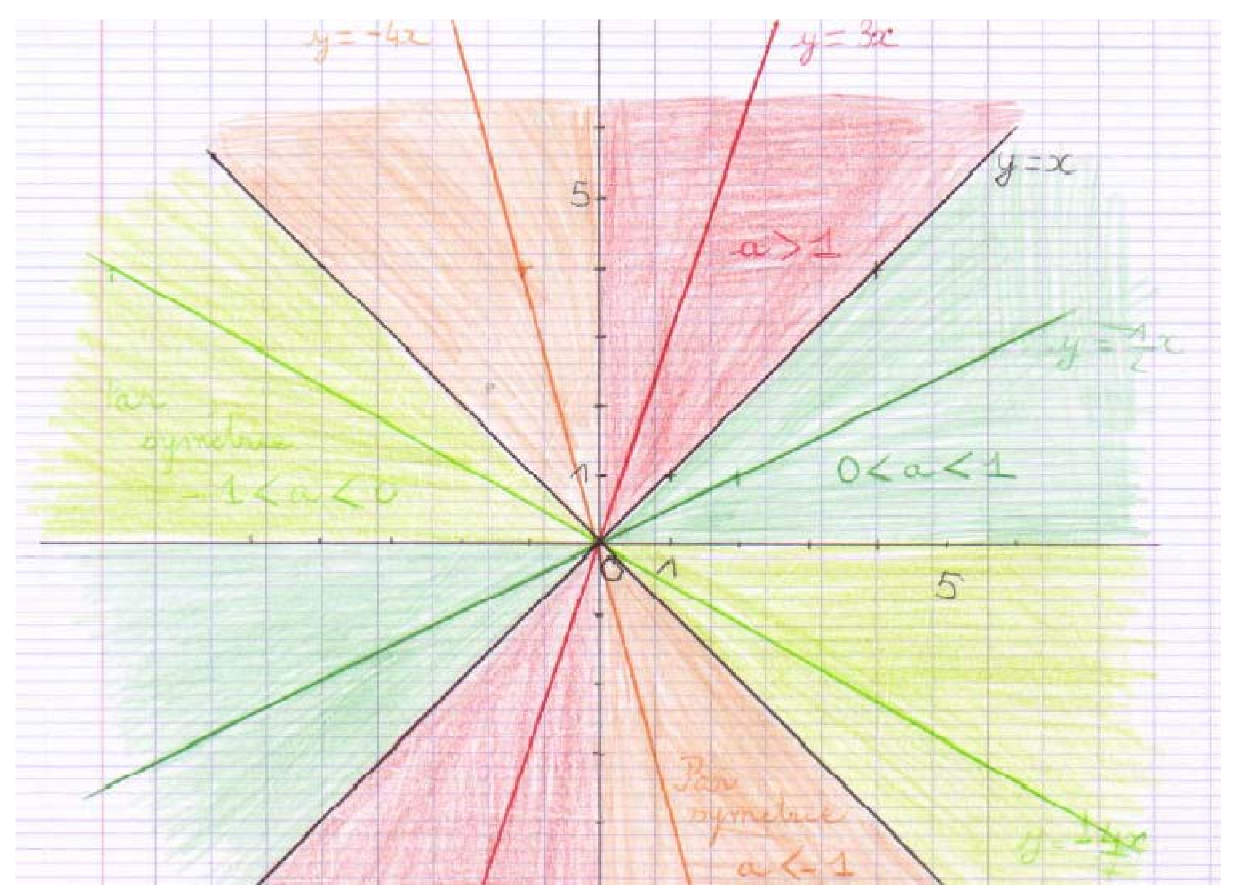
- Qu'observe-t-on quand on modifie le paramètre b ? Conclure.

On remarquera que $b = f(0)$.

- On fixe $b = 0$.

Qu'observe-ton lorsque $a > 1$? $a = 1$? $0 < a < 1$? $a = 0$? $-1 < a < 0$? $a = -1$?

Exemple de synthèse d'élève :



b. Symétries et coefficients directeurs.

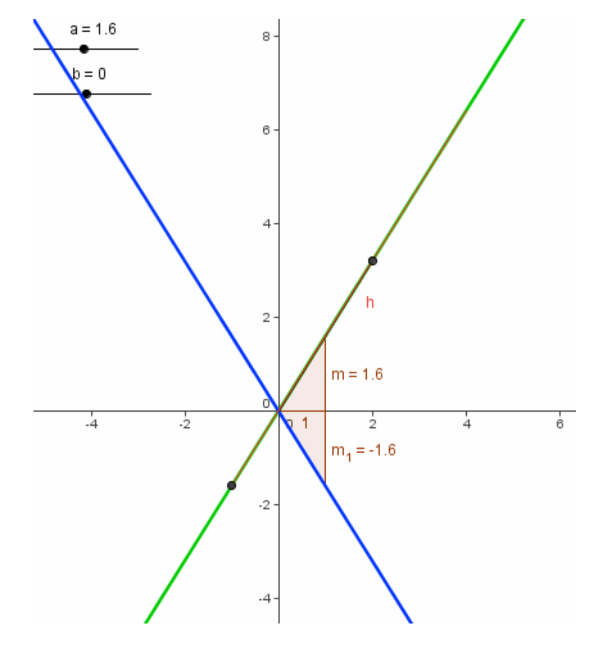
À l'aide du logiciel *GeoGebra*, tracer une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax$, puis la droite $\mathcal{D}'$ symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à l'axe des ordonnées. Que dire des coefficients directeurs des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$?

Faire de même avec les droites symétriques de $\mathcal{D}$:

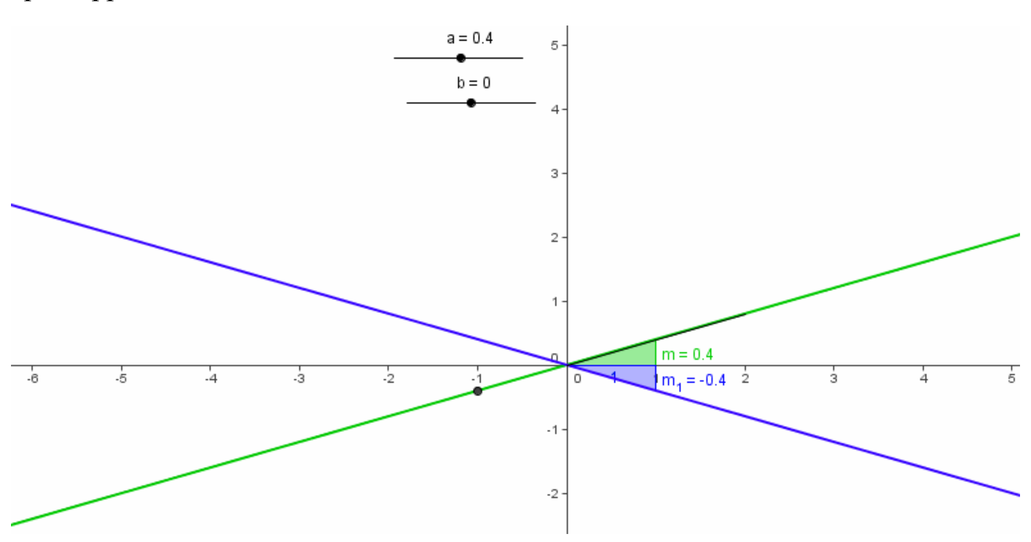
- par rapport à l'axe des abscisses,
- par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$),
- par rapport à la seconde bissectrice (droite d'équation $y = -x$).

Dans les représentations ci-dessous, la droite verte est la droite initiale $\mathcal{D}$ et la droite bleue est sa symétrique par rapport à l'axe précisé.

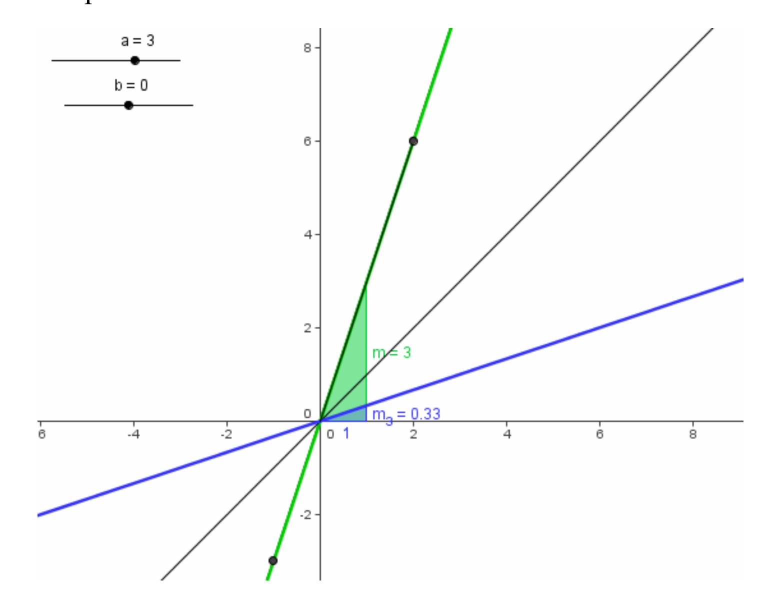
Symétrie par rapport à l'axe des abscisses :



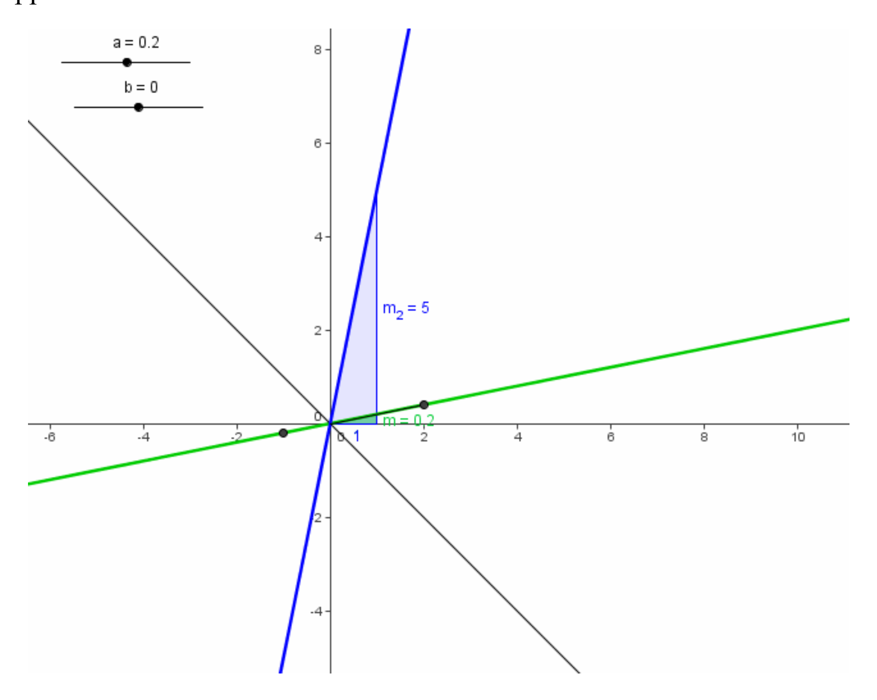
Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :



Symétrie par rapport à la première bissectrice :

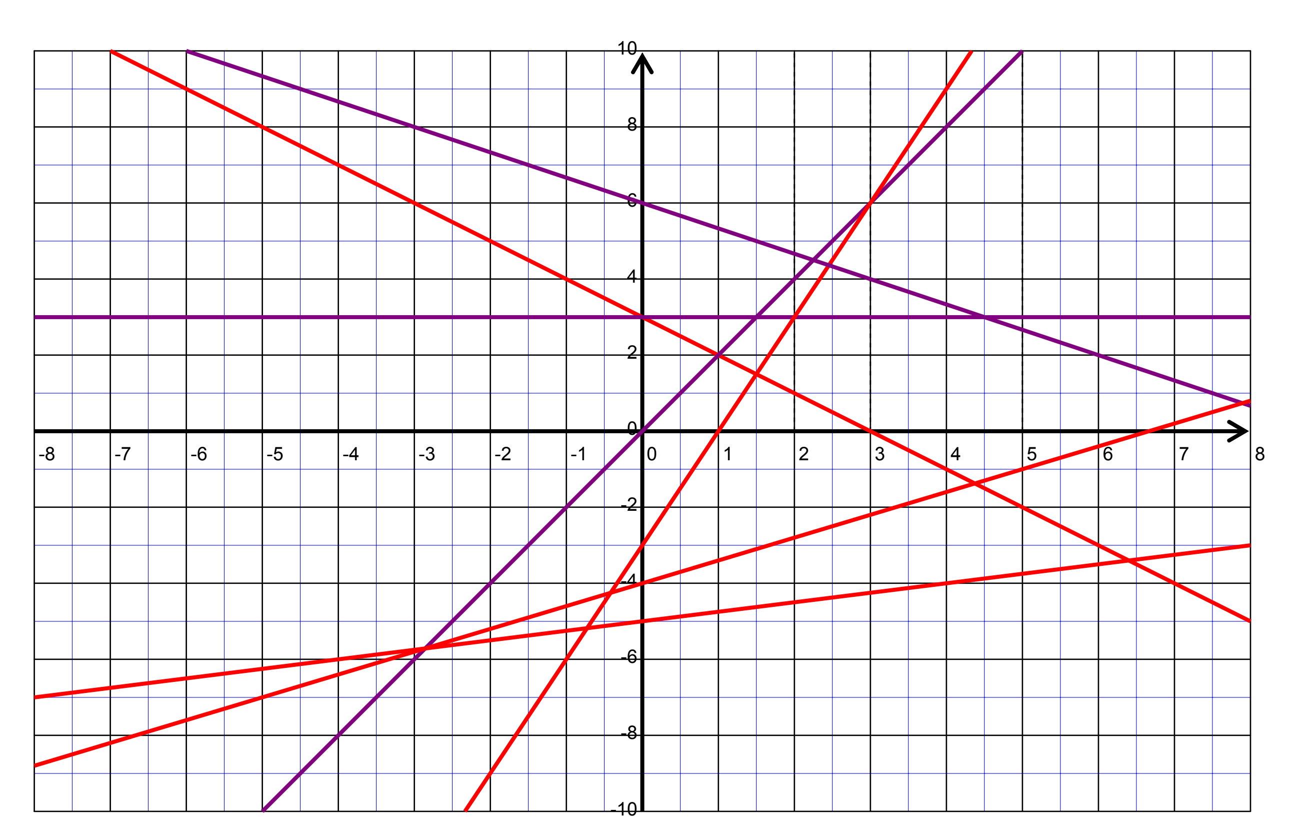


Symétrie par rapport à la seconde bissectrice :



Pour aller plus loin, on pourra se placer dans un repère orthogonal…

Pour conclure, une mise en application est réalisée en demandant aux élèves de déterminer les équations des droites représentées dans le repère ci-dessous :



Introduction à la dérivation en utilisant un T.B.I.

Problématiques développées : P1, P2, P4, P8 et P9.
Série : toutes séries (expérimenté en première ES-L).
Place dans la progression : avant le cours sur la dérivation.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les fonctions, sur les droites. Introduire un nouvel outil et montrer son intérêt.
Compétences	Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Mener des raisonnements. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Les fonctions. Les droites.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel et collectif.

Scénario d'introduction au chapitre sur la dérivation

Le scénario pédagogique consiste à introduire le nombre dérivé en classe de Première. Il a été testé en classe de 1ère L avec un groupe d'élèves peu habitués à manier les concepts d'analyse. Le professeur utilise un Tableau Blanc Interactif (T.B.I, appelé aussi T.N.I pour Tableau Numérique Interactif) ainsi que des boîtiers de vote.

Le tableau blanc interactif

Le T.B.I. est un outil numérique permettant de centraliser sur le tableau les logiciels, les cours, les écrits numérisés, en complète interaction à partir de l'écran de projection. L'enseignant est ainsi plus libre, il n'est plus astreint à rester à côté de l'ordinateur. Il fait face aux élèves et peut mieux observer son public. Les essais des élèves, les expérimentations effectuées peuvent être stockés afin de conserver trace de la vie mathématique de la classe.

Il est possible en outre d'utiliser des boîtiers d'évaluation qui permettent aux élèves de répondre en direct et de manière individuelle à des questionnaires à choix multiples. Les résultats des votes apparaissent en direct sur l'écran du T.B.I., et aident le professeur à établir des diagnostics sur les connaissances et les savoir-faire des élèves, ce qui lui permet ensuite de mettre en place les réponses pédagogiques appropriées.

Partie I : évaluation diagnostique des élèves

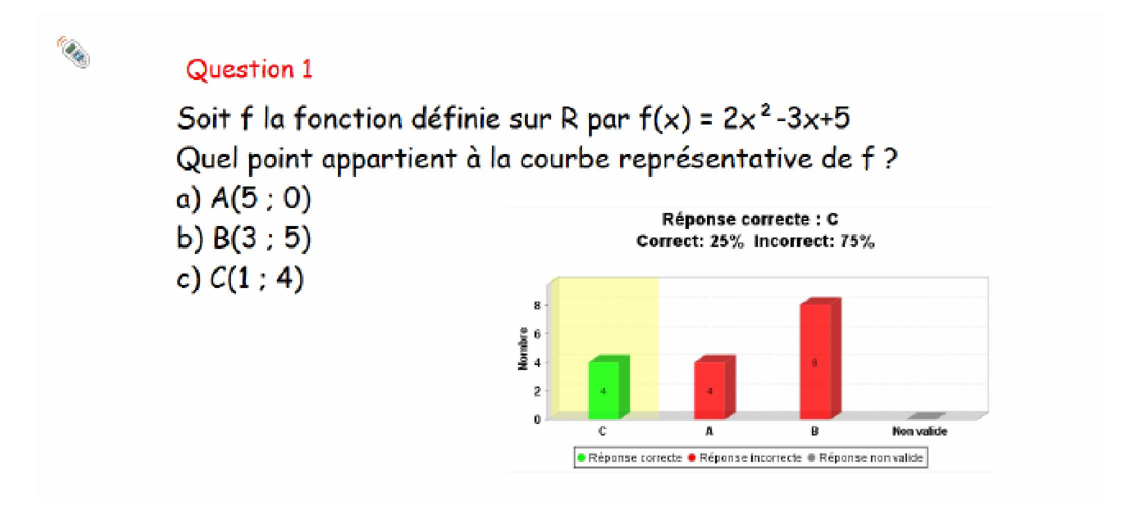
Afin de faire le point sur certaines connaissances des élèves portant sur les fonctions, nécessaires à une bonne compréhension du chapitre sur la dérivation, le professeur a conçu un QCM comprenant en particulier des distracteurs permettant de repérer quelques erreurs spécifiques. L'objectif de l'enseignant est ainsi d'effectuer en direct des remédiations personnalisées en classe entière.

Pour chaque question du QCM, l'élève doit voter pour la réponse qu'il pense être la bonne. Le tableau récapitulatif des résultats s'affiche ensuite sur le T.B.I..Le professeur relève les erreurs commises en temps réel, sans que la notion de sanction ne soit présente. Il repère un élève concerné par une erreur et lui demande d'expliquer son raisonnement. L'enseignant peut alors démonter les mécanismes erronés.

Cette expérimentation a duré 2 heures. Elle a permis de faire le point sur des notions essentielles portant sur les fonctions et a aidé les apprenants à créer leurs propres fiches méthodologiques. En effet, les élèves consignent, dans un petit cahier personnel, les aides, les méthodes, les outils de contrôle à l'aide des TIC (calcul formel, logiciel de géométrie…), les rappels de cours dont ils estiment avoir besoin, ainsi que leurs erreurs analysées et corrigées.

On trouvera ci-dessous les questions posées ainsi que des extraits de travaux effectués en classe, et notifiés dans certains « petits cahiers » d'élèves.

Question 1 :



La moitié des élèves font une confusion avec la forme canonique dans laquelle on voit apparaître les coordonnées du sommet de la parabole et pensent qu'il y a un lien entre les coordonnées d'un point de la courbe et les coefficients de son équation. Un quart d'entre eux confondent abscisse et ordonnée.

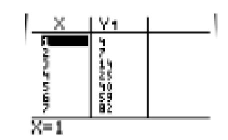
Pistes de remédiation :

- Faire expliciter par un élève ayant répondu B la méthode permettant de contrôler qu'un point appartient à la courbe représentative d'une fonction.
- Mettre en évidence les liens entre la forme canonique et la parabole correspondante.
- Utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice.
- Rappeler la définition de la courbe représentative d'une fonction.

Un extrait du cahier d'un élève :

Comment montre-t-on qu'un point appartient à la courbe représentative d'une fonction ?

- Il faut remplacer x par l'abscisse du point et trouver l'ordonnée.
- Faire le graphique et le tableau de valeur sur la calculatrice



Complément : On peut prolonger par l'écriture d'un algorithme :

Construire un algorithme vérifiant l'appartenance d'un point à la courbe

Entrée : on définit la fonction f
on entre les coordonnées (x, y) du point

Traitement : si $f(x) = y$
alors afficher « oui »
sinon afficher « non »

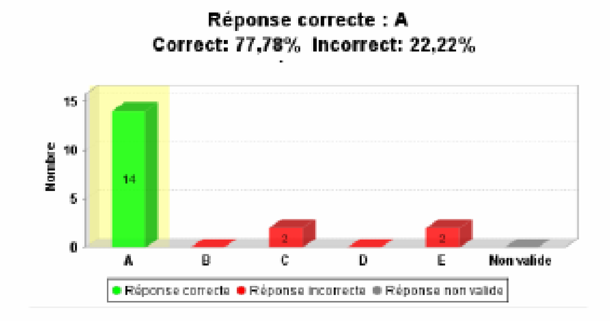
Question 2 :



Question 2

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)= 3-2x^2$.
Soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé.
Le point M de (C) d'abscisse -3 a pour ordonnée :

a) -15
b) 21
c) -9
d) 9
e) -33



Les élèves ont manifestement retenu la notion d'appartenance à une courbe. Seules quelques erreurs de calcul sont relevées.

Piste de remédiation :

- Expliciter les règles de priorité des opérations.

Un extrait du cahier d'un élève :

Quelles étaient les erreurs visées dans la question précédente ?

$3 - 2\times(-3)^2$

$= 3 - 2\times 9$

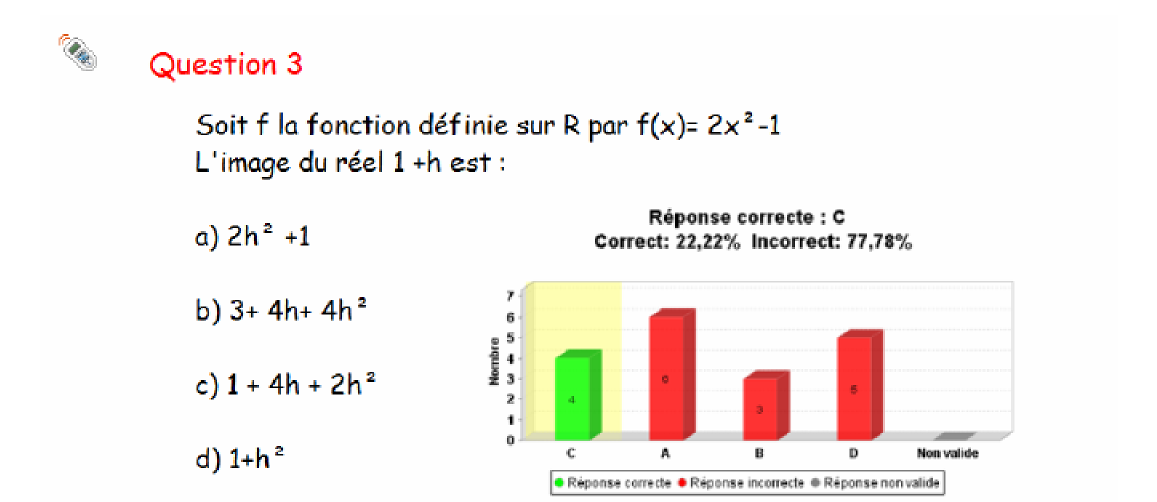
$= -15$

⚠ $(-3)^2 \neq -9$

$(-3)^2 \neq 6$ Confusion carré - double

$2x^2 \neq (2x)^2$

Question 3 :



La plupart des élèves ne comprennent pas la question posée.

Pistes de remédiation :

- Faire expliquer par certains élèves le sens de cette question.
- Se réapproprier les identités remarquables.
- Apprendre à contrôler la validité du développement (usage de tests, utilisation d'un logiciel de calcul formel,…).

Un extrait du cahier d'un élève :

Comment contrôler le résultat de mon calcul ?

$$2(1+h)^2 - 1 = 2\left[1 + 2\times 1\times h + h^2\right] - 1$$
$$= 2 + 4h + 2h^2 - 1 = 2h^2 + 4h + 1$$

- on peut contrôler en remplaçant h par une valeur par exemple 1.

$f(1+1) = 2(2)^2 - 1 = 7$

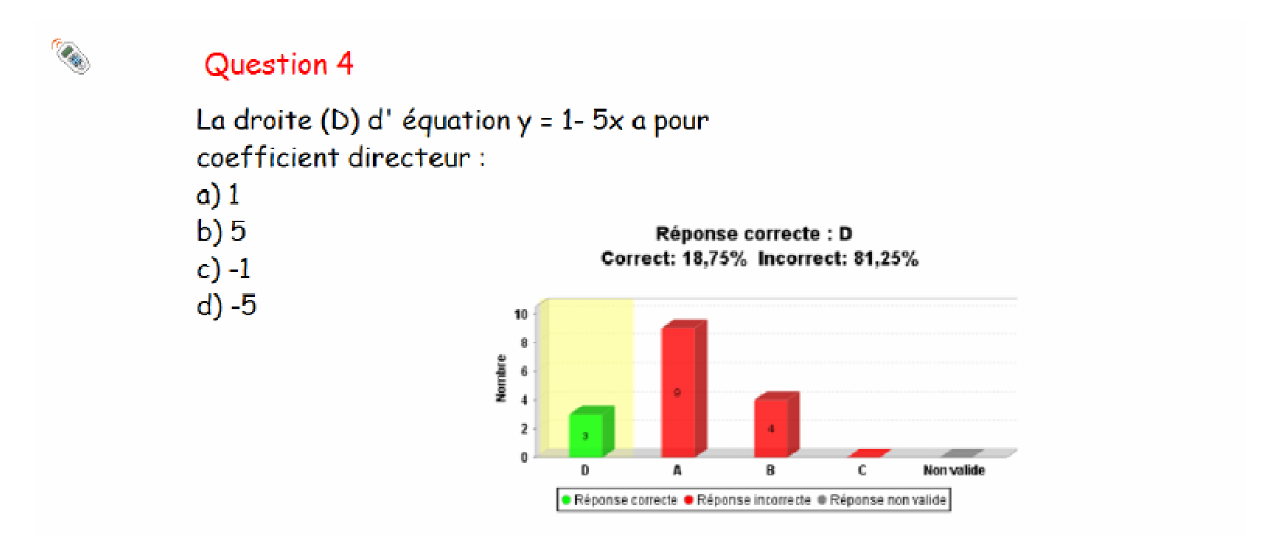
a) $2\times 1^2 + 1 = 3$ b) $3 + 4 + 4 = 11$

c) $1 + 4 + 2 = 7$ d) $1 + 1^2 = 2$

- on utilise un logiciel de calcul formel

```
1 f(x):=2x^2-1
      x -> 2·x^2-1
2 f(1+h)
      2·(1+h)^2-1
3 simplify(f(1+h))
      2·h^2+4·h+1
```

Question 4 :

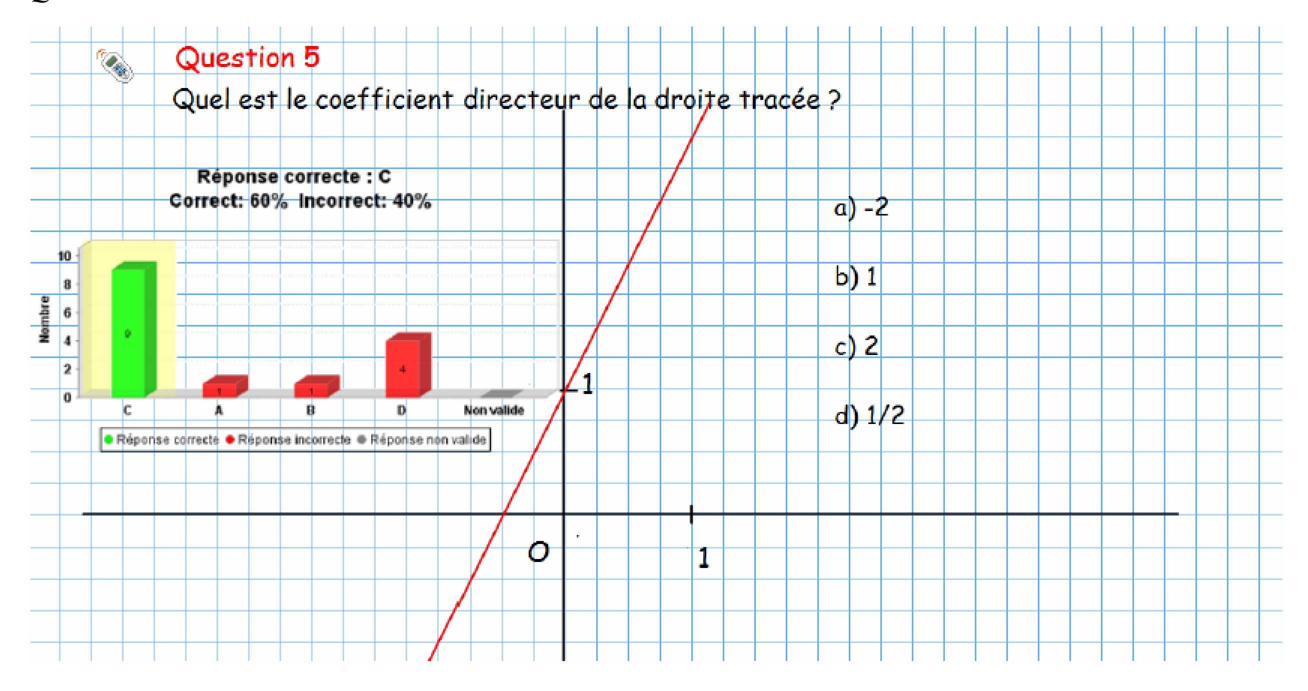


Les réponses mettent en évidence des connaissances trop fragiles.

Pistes de remédiation :

- Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour construire une image mentale du coefficient directeur d'une droite.
- Travail sur la proportionnalité des accroissements de *x* et *y*. Faire remarquer alors que si *x* « augmente » de 1, alors y « augmente » de *a*.

Question 5 :

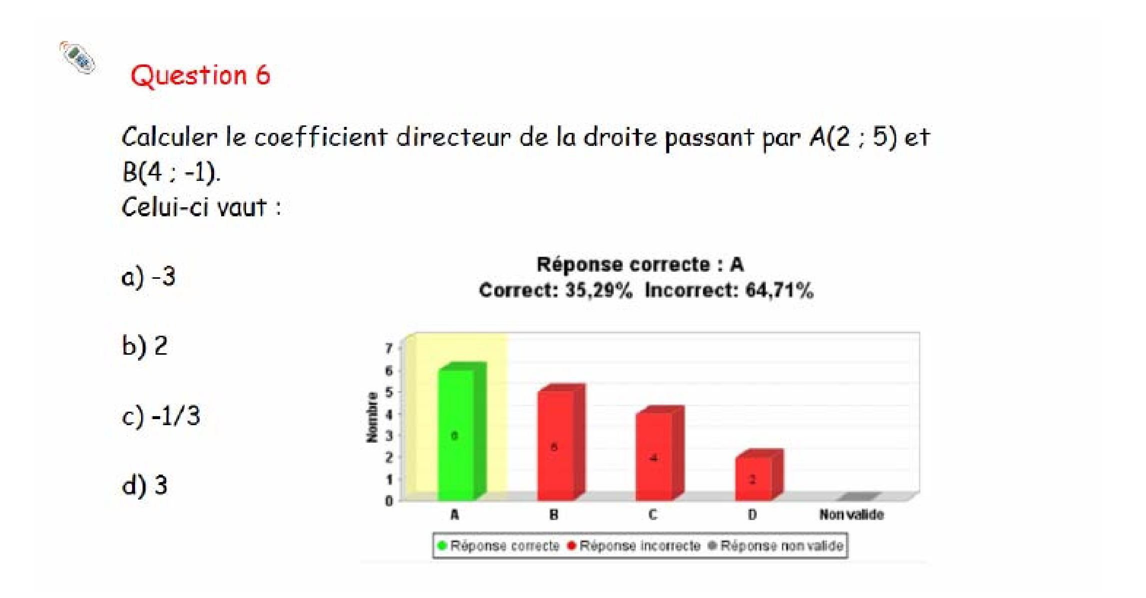


On note encore quelques confusions entre l'abscisse et l'ordonnée.

Pistes de remédiation :

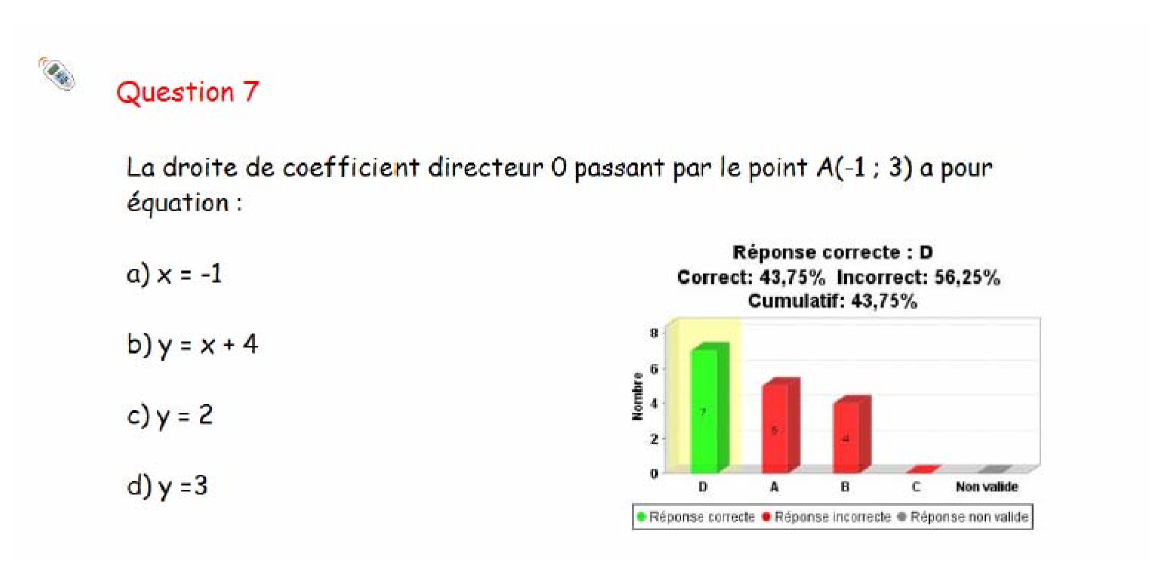
- Interpréter le coefficient directeur en termes d'inclinaison.
- Lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite.
- Faire le lien avec la formule $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Question 6 :



Visualiser la droite permet d'apporter une remédiation efficace.

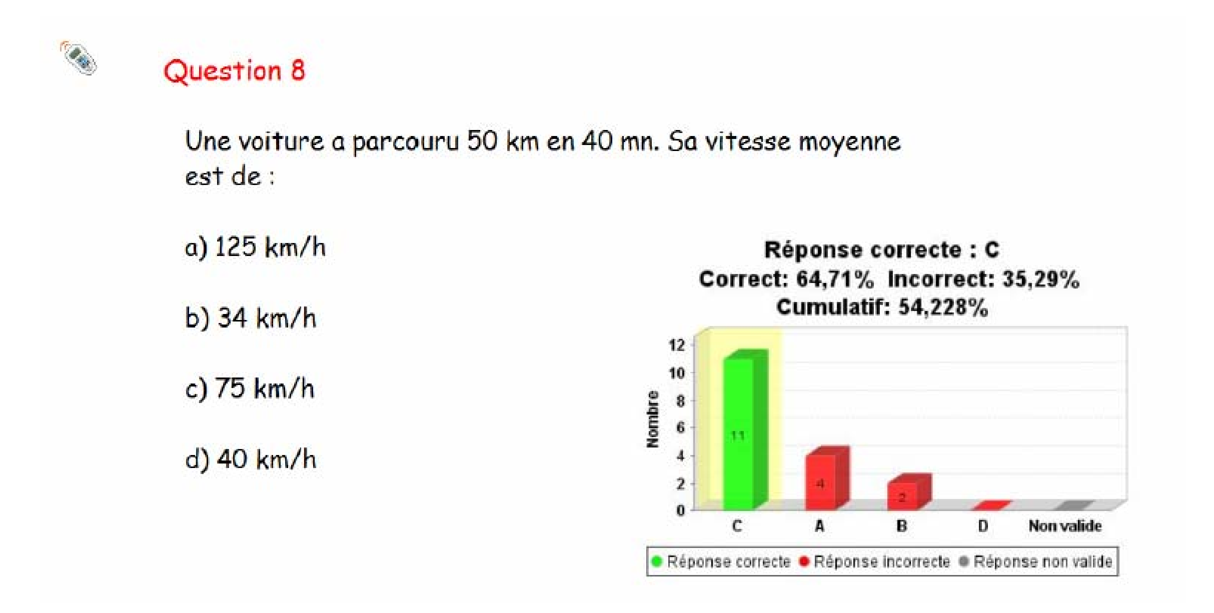
Question 7 :



Pistes de remédiation :

- Visualiser la droite horizontale.
- Caractériser l'ensemble des points ayant même ordonnée.
- Rappeler le lien entre coefficient directeur et inclinaison d'une droite.

Question 8 :



Pistes de remédiation :

- Donner du sens à la notion de vitesse.
- Explicitation des démarches utilisées (règle de trois, « produit en croix », propriétés de linéarité, formule sur la vitesse).

<u>Pistes de travail en accompagnement personnalisé (AP) ou à l'extérieur de la classe</u>

On pourra poursuivre les remédiations en Accompagnement Personnalisé à partir des notes écrites sur les « petits cahiers » des élèves qui constituent dorénavant des références pour les apprenants.

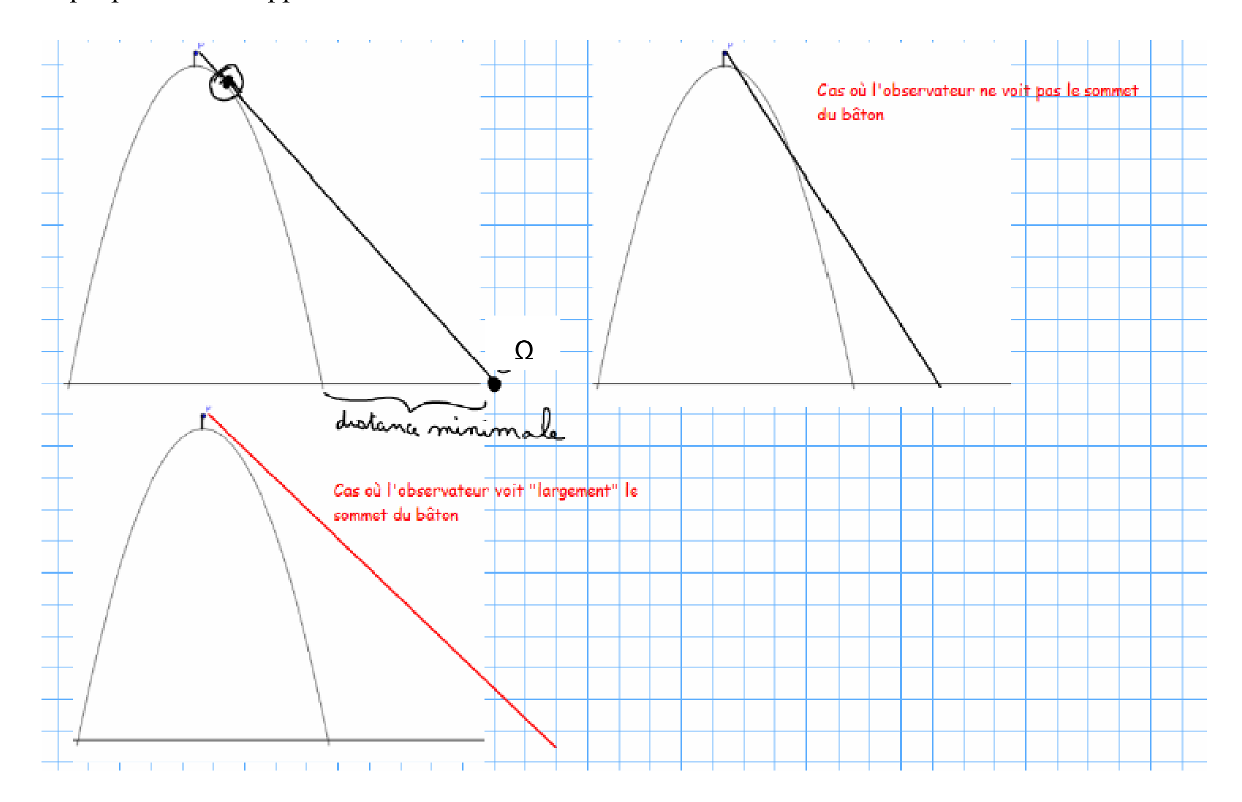
- Aide à la structuration des connaissances, à l'apprentissage d'une leçon : exposé oral des connaissances sur les fonctions affines.
- Aide au développement de l'autonomie : rédaction d'une fiche-méthode sur la lecture d'une image, d'un antécédent, construction d'un tableau de valeurs et d'une courbe représentative, vérification de l'appartenance d'un point à une courbe, fonctions polynômes du second degré…
- Utilisation de la fiche-méthode précédente pour résoudre des exercices d'entraînement choisis par l'élève lui-même en fonction de l'analyse qu'il fait de ses difficultés.
- Utilisation d'un exerciseur en ligne (Euler, WIMS…) pour des exercices répétitifs sur la lecture ou le calcul d'un coefficient directeur.

Partie II : découverte de la notion de tangente à une courbe

Reprise avec *GeoGebra* de l'activité terril (Document d'accompagnement – 2001).

L'énoncé du problème :
Au sommet d'un terril de 25m de haut se trouve planté un bâton de 1 m de haut. À quelle distance minimale du pied du terril faut-il se placer pour apercevoir le bout du bâton de 1 m de haut ?

Le professeur découpe le T.B.I. en quatre parties sur lesquelles le schéma du terril est représenté. Il propose à quatre élèves de positionner avec des tracés l'endroit où devrait se trouver l'observateur. Les différentes réflexions des élèves aboutissent au fait que la position la meilleure est celle où la droite (ΩP) reliant l'observateur au sommet du bâton « frôle » un point du terril. Le mot « tangente » est évoqué par certains apprenants. Les schémas suivants sont sélectionnés :



Le débat mathématique autour de l'existence d'une telle droite se poursuit dans la classe.

Le professeur demande aux élèves d'admettre que la ligne de pente de ce terril est une portion de la parabole d'équation $y = -x^2 + 25$.

On sait que l'ordonnée à l'origine est égale à 26. Donc la droite a une équation de la forme $y = ax + 26$, avec $a < 0$.

Puisqu'il y a un point d'intersection entre la droite et la parabole, alors x est solution de l'équation : $-x^2 + 25 = ax + 26$.

Soit à résoudre l'équation : $x^2 + ax + 1 = 0$.

Le groupe reconnaît une équation du second degré, dont le discriminant vaut $\Delta = a^2 - 4$.

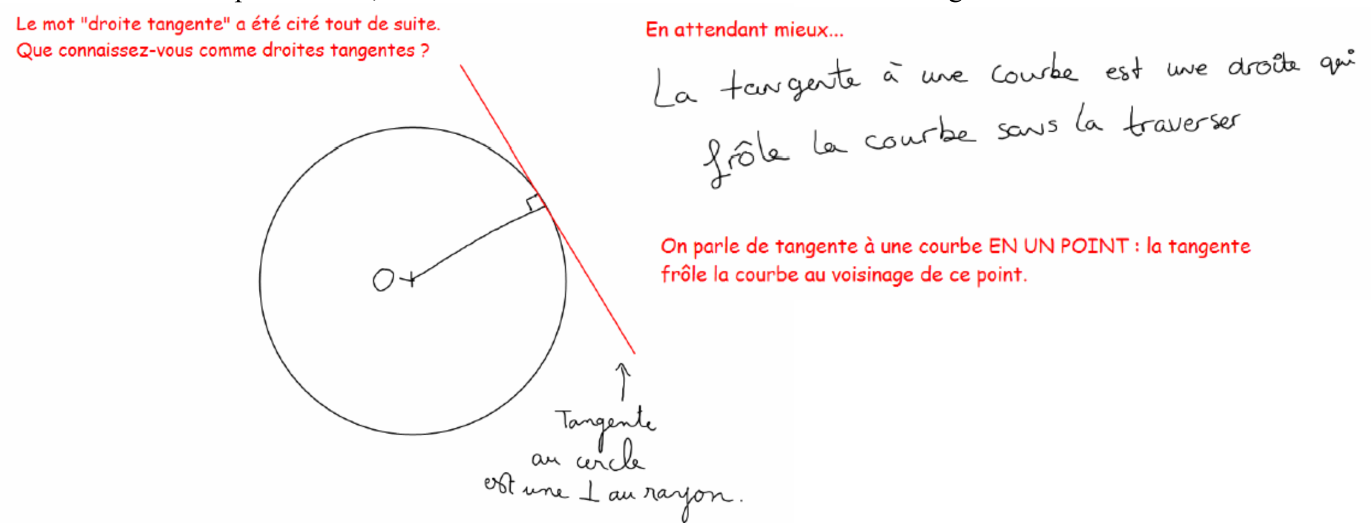
L'équation a une unique solution si et seulement si $a = -2$ (rappel : on sait que a est négatif).

Il reste à vérifier que le point d'intersection est le point de coordonnées (1 ; 24) et que la droite cherchée a pour équation $y = -2x + 26$.

Le point Ω a donc pour abscisse 13.

La tangente est la position limite d'une sécante.

Avec l'exemple du terril, les élèves ont donné « leur » définition de la tangente.



Le professeur utilise alors un logiciel de géométrie dynamique pour montrer qu'une tangente à une courbe est la position limite d'une sécante.

La définition de la tangente est ensuite donnée aux élèves. L'enseignant peut alors introduire le taux d'accroissement de la fonction f en a, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, et sa limite quand h tend vers 0.

Partie III : définition du nombre dérivé et équation d'une tangente

Extrait des programmes des premières S, ES et L :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point.	• Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé.

Pour conclure le scénario pédagogique, le cours est synthétisé avec la classe. Il est suivi d'exercices d'application axés sur :

- la lecture graphique de nombres dérivés ;
- le tracé d'une tangente connaissant le coefficient directeur de la droite ;
- quelques calculs de taux d'accroissement à l'aide, si besoin, d'un logiciel de calcul formel ;
- la recherche d'équations de tangentes à une courbe donnée en un point.

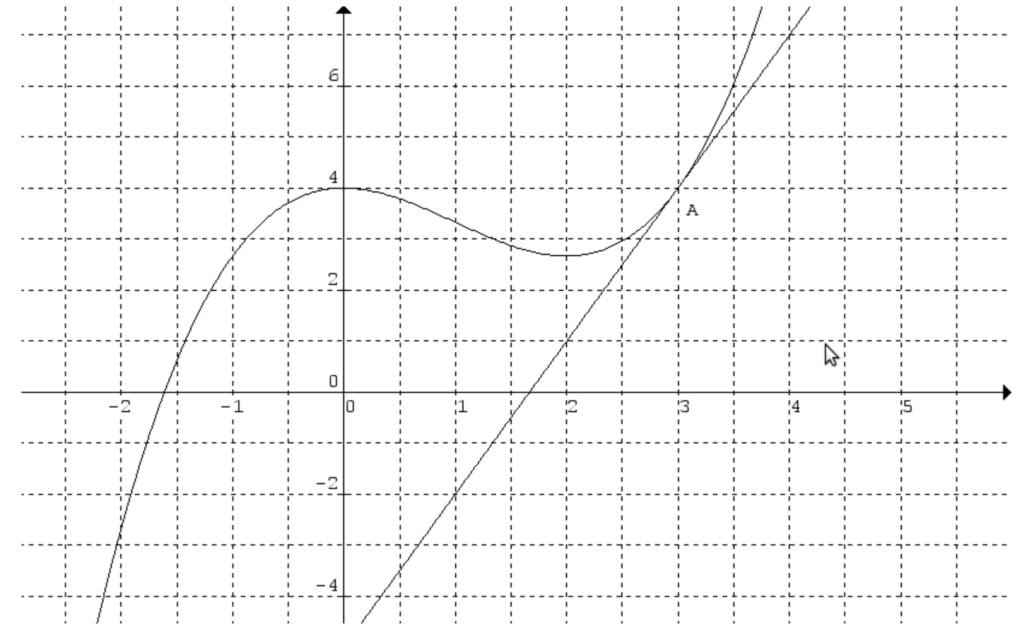
Partie IV : évaluation formative

Un Questionnaire à Choix Multiples, permettant à chaque élève de s'auto-évaluer, est mis en ligne par le professeur. Cette auto-évaluation aide l'élève à repérer ses points forts et ses points faibles. Il peut ainsi travailler certaines connaissances mal dominées, avec l'aide éventuelle d'un enseignant, avant une interrogation écrite.

1) La fonction f est définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = -2x^2 + x + 2$. Lequel des points suivants appartient à la courbe représentative de f ?

a. A(2 ; 0) b. B(1 ; 2) c. C(2 ; 2) d. D(2 ; -4)

On donne la courbe représentative d'une fonction g qui permet de répondre aux questions 2), 3), 4) et 5) :



2) La valeur de $g(-2)$ est :

a. $-2,5$ b. $-1,75$ c. 0 d. 0,5

3) La valeur de $g'(0)$ est:

a. 4 b. 7 c. 0 d. $-0,75$

4) Le coefficient directeur de la tangente au point A est :

a. 4 b. 3 c. -3 d. 2

5) La tangente tracée permet de déterminer :

a. $g'(4)$ b. $g'(3)$ c. $g'(-3)$ d. $g'(1,75)$

6) Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 - x + 2$. Pour déterminer $f'(1)$, il faut simplifier l'expression :

a. $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ b. $\dfrac{f(1+h) - 1}{h}$ c. $f(2) - f(1)$ d. $\dfrac{f(1+h) - 2}{h}$

7) Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 - x + 2$.

On donne la copie d'écran issue de Xcas :

```
f(x):=x^2-x+2
                                        x -> x^2 -x+2
simplify(f(1+h))
                                        h^2 +h+2
```

La valeur de $f'(1)$ est : a. 2 b. 1 c. 4 d. 0

8) Soit g la fonction définie par $g(t) = \dfrac{t}{t-5}$

On donne la copie d'écran de Xcas:

```
g(t):=t/(t-5)
                                        t -> t/(t-5)
simplify((g(6+h)-g(6))/h)
                                        -5/(h+1)
```

La valeur de $g'(6)$ est : a. -5 b. $-\dfrac{5}{2}$ c. $-\dfrac{5}{7}$ d. 6

Une deuxième introduction à la dérivation

Problématiques développées : P2, P3 et P7.
Série : toutes séries (expérimenté en première S).
Place dans la progression : avant le cours sur la dérivation.

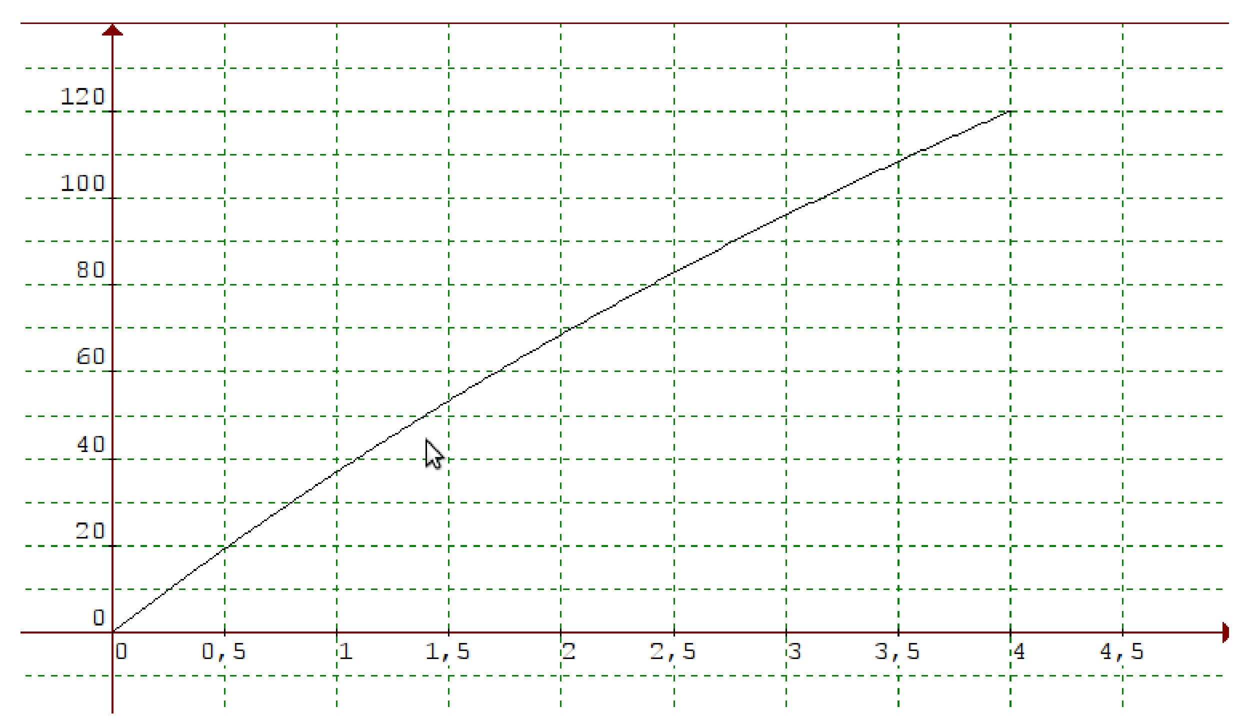
Objectifs pédagogiques	Introduire un nouvel outil, lui donner du sens et montrer son intérêt.
Compétences	Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Mener des raisonnements. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Les fonctions. Les droites.
Logiciels	Logiciel de calcul formel.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel et collectif.

Activité : « le radar »

Après un séjour passé en Allemagne, un célèbre professeur de mathématiques emprunte la voie express sans limitation de vitesse. Lors du passage de la frontière pour regagner la France, il réalise que la limitation de vitesse est de 130km/h. Il décide donc de freiner son véhicule afin d'éviter une éventuelle contravention! Il stabilise sa vitesse au bout de 4 secondes.

À partir du franchissement de la frontière par le véhicule, on note t le temps écoulé en seconde et $f(t)$ la distance parcourue en mètres.

Sur l'intervalle [0 ; 4], la fonction f est définie par $f(t) = \dfrac{480t}{t+12}$. Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de f sur l'intervalle [0 ; 4].



Partie A: Étude du mouvement

1. Calculer $\dfrac{f(3)-f(0,5)}{2,5}$ puis donner une interprétation du résultat.
2. Exprimer, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, $V(h)=\dfrac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h}$ en fonction de h puis donner une interprétation du résultat.
3. À l'aide de la calculatrice, observer les valeurs de $V(h)$ pour h variant de 0,1 à 0,5 avec un pas de 0,1.
   Faire ensuite varier h de 0,01 à 0,1 avec un pas de 0,01.
   Faire enfin varier h de 0,001 à 0,01 avec un pas de 0,001.
   Lorsque h est proche de 0, que devient $V(h)$?

   Le résultat obtenu s'appelle la limite de $V(h)$ quand h tend vers 0. En terme concret, cette valeur correspond à la vitesse instantanée du véhicule à l'instant $t = 0,5$.
4. Le célèbre professeur de mathématiques aperçoit les gendarmes avec leur radar à l'instant $t = 0,5$. En tenant compte des vitesses retenues par le cinémomètre (voir tableau ci-dessous), est-il en infraction lorsqu'il est surpris par les gendarmes? Justifier votre réponse.

VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE – Cinémomètre		VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE – Cinémomètre		VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE – Cinémomètre	
	Fixe	Mobile		Fixe	Mobile		Fixe	Mobile
55	50	—	86	81	76	117	111	105
56	51	—	87	82	77	118	112	106
57	52	—	88	83	78	119	113	107
58	53	—	89	84	79	120	114	108
59	54	—	90	85	80	121	114	108
60	55	50	91	86	81	122	115	109
61	56	51	92	87	82	123	116	110
62	57	52	93	88	83	124	117	111
63	58	53	94	89	84	125	118	112
64	59	54	95	90	85	126	119	113
65	60	55	96	91	86	127	120	114
66	61	56	97	92	87	128	121	115
67	62	57	98	93	88	129	122	116
68	63	58	99	94	89	130	123	117
69	64	59	100	95	90	131	124	117
70	65	60	101	95	90	132	125	118
71	66	61	102	96	91	133	126	119
72	67	62	103	97	92	134	127	120
73	68	63	104	98	93	135	128	121
74	69	64	105	99	94	136	129	122
75	70	65	106	100	95	137	130	123
76	71	66	107	101	96	138	131	124
77	72	67	108	102	97	139	132	125
78	73	68	109	103	98	140	133	126
79	74	69	110	104	99	141	133	126
80	75	70	111	105	99	142	134	127
81	76	71	112	106	100	143	135	128
82	77	72	113	107	101	144	136	129
83	78	73	114	108	102	145	137	130
84	79	74	115	109	103	146	138	131
85	80	75	116	110	104	147	139	132

La première colonne donne la vitesse enregistrée par le cinémomètre. Afin de tenir compte des erreurs de mesure, cette vitesse enregistrée est transformée en une vitesse retenue, qui est celle utilisée pour constater une infraction.

Lorsque le cinémomètre est fixe, la deuxième colonne du tableau donne la vitesse retenue ; lorsque l'appareil est embarqué à l'intérieur d'une voiture de gendarmerie et que la mesure se fait en roulant, c'est la troisième colonne du tableau qui donne la vitesse retenue.

Partie B : Par le calcul formel

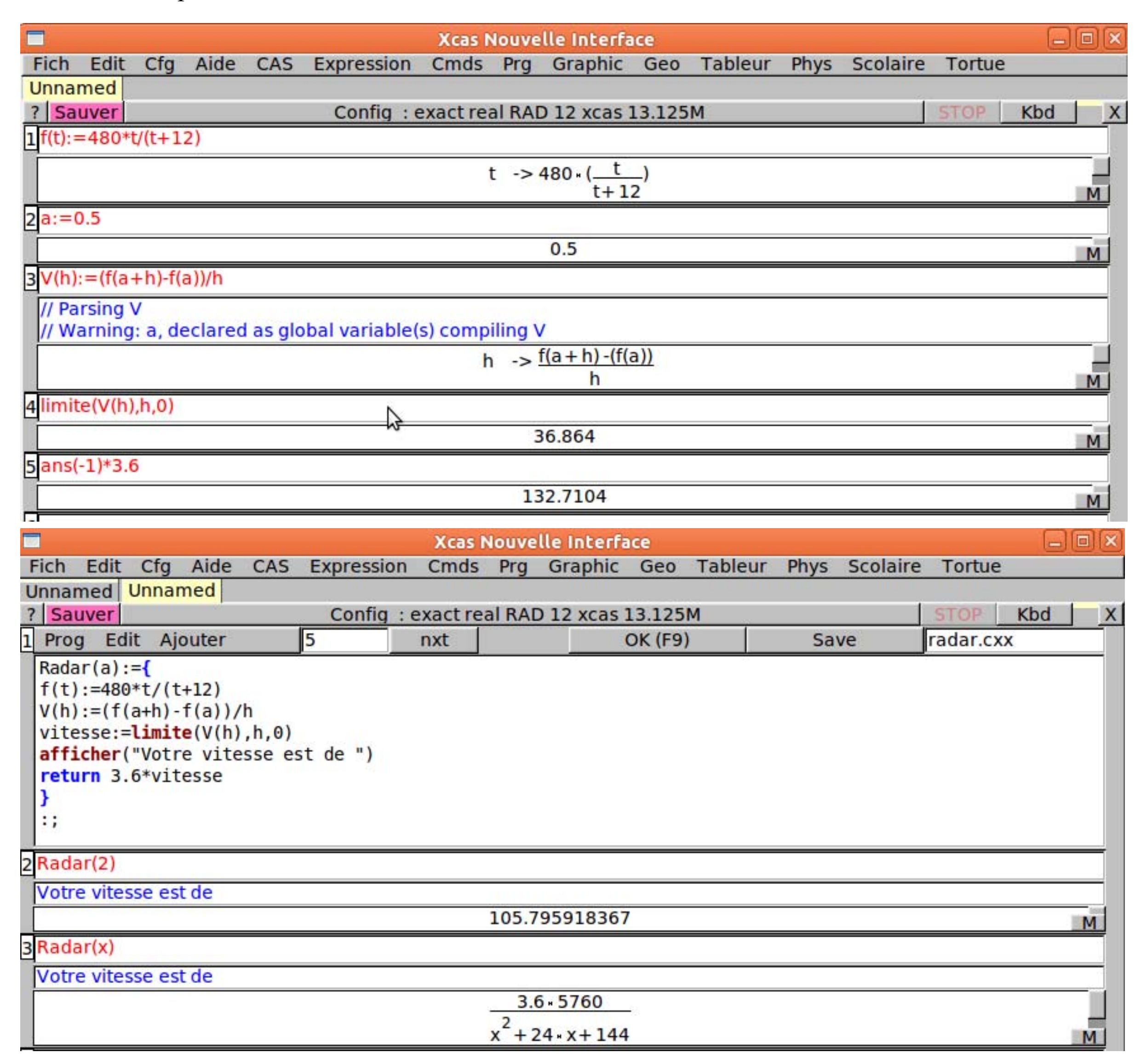
Émettre une conjecture quant à l'instant t, compris entre 0 et 4, à partir duquel la vitesse du célèbre professeur de mathématiques restera inférieure à 110km/h (on demande une valeur arrondie de t à la seconde près).

Aide : pour le logiciel de calcul formel *Xcas*, la commande qui permet de calculer la limite de $V(h)$ quand h tend vers 0 est limite($V(h)$,h,0).

Partie C : Par l'algorithmique

5. Écrire un algorithme permettant de calculer la vitesse instantanée du célèbre professeur de mathématiques à un instant a compris entre 0 et 4.
6. Écrire cet algorithme en langage Xcas puis exécuter ce programme pour différentes valeurs de a, comprises entre 0 et 4.
7. À l'aide du programme, déterminer en fonction de l'instant x, la vitesse instantanée du célèbre professeur de mathématiques.

Éléments de réponse



3. Pourcentages

Job de vacances

Cette activité a pour but :

- d'entraîner les élèves à une pratique aisée de techniques élémentaires de calcul sur les pourcentages ;
- d'amener les élèves à avoir une attitude critique vis-à-vis des informations chiffrées.

Problématiques développées : P1, P2, P6.
Série : ES - L.
Place dans la progression : pendant le cours sur les pourcentages.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les pourcentages. Donner un sens concret au lien entre une évolution et un pourcentage.
Compétences	Rechercher, extraire et organiser l'information utile. Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Pourcentages.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel.

Scénario pédagogique

Étape 1 : le professeur laisse travailler les élèves en autonomie sur le support donné sur la page suivante. Il passe dans les rangs aider ou débloquer certains élèves en difficulté. Une synthèse collective est réalisée à l'issue du travail.

Aurélie, une jeune fille de 16 ans, a trouvé un premier emploi de vacances en tant qu'animatrice dans le centre de vacances « Les alouettes ». Elle doit effectuer 109 heures de travail pour un salaire net de 647 euros auquel s'ajoutent 79 euros d'indemnités de congés payés.

En se renseignant sur la législation en vigueur concernant les salaires et indemnités de congés payés, elle a trouvé les informations suivantes :

Salaire et indemnité de congés payés (Circulaire DRT n° 2002-15 du 22 août 2002)

Le salaire minimum de croissance (SMIC) est le salaire horaire en dessous duquel il est interdit de rémunérer un salarié et ce, quelle que soit la forme de sa rémunération (au temps, au rendement, à la tâche, à la pièce, à la commission ou au pourboire). Le SMIC assure aux salariés dont les salaires sont les plus faibles la garantie de leur pouvoir d'achat et une participation au développement économique de la Nation.

Le montant du **SMIC horaire brut** est fixé, depuis le 1er janvier 2011, à 9 €.

Les jeunes de moins de 18 ans titulaires d'un contrat de travail sont rémunérés au minimum sur la base du SMIC :

- minoré de 20 % avant 17 ans,
- minoré de 10 % entre 17 et 18 ans.

A noter : pas de minoration de la rémunération si le jeune possède six mois de pratique professionnelle dans la branche.

L'employeur calcule le **salaire net** en déduisant du salaire brut les **charges salariales** qui représentent environ 20% du salaire brut.

Au terme de son contrat, le jeune reçoit une **indemnité de congés payés**. Le montant de cette indemnité est obtenu de la façon suivante :

- on prend 10 % des salaires bruts perçus ;
- on enlève les charges salariales qui représentent environ 20% de cette somme.

Compte tenu de ces informations, Aurélie a-t-elle intérêt à accepter cet emploi ?

Étape 2 : *les élèves prennent connaissance du document donné sur la page suivante. Après qu'ils se soient appropriés ce document, une discussion s'établit pour expliciter certains mots ou certaines notions. Les élèves travaillent ensuite en autonomie puis une synthèse collective est réalisée à l'issue du travail.*

Voici la fiche de salaire d'une employée de 20 ans du centre de vacances « Les alouettes » qui effectue 120 heures de travail :

Association Les Alouettes
2 rue Saint Michel
59009 VILLENEUVE D'ASCQ

SIRET	53713180700039
URSSAF	280 403 4179461

BULLETIN DE PAIE

Période	du 01/07/2011 au 31/07/2011
Paiement	Par virement le 01/08/2011
Plafond du mois	1899,00

Code salarié	S353
Emploi	Animatrice saisonnière
Qualification	Stagiaire BAFA
Heures de présence	120,00

Gabriella SOLIS
56 Avenue Aimé Césaire
59343 ROUBAIX

Elément	Libellé	Base	Taux salarial	Montant salarial	Cotisation patronale	
					Tx patronal	Mont. patronal
7234	Salaire de base	120,00	9,0000	1080,00		
2726	Congés payés	1080,00	10,0000	108,00		
	SALAIRE BRUT			1188,00		
	CHARGES					
55	CSG déductible	1009,80	5,1000	-51,50		
56	CSG non déductible	1009,80	2,4000	-24,24		
57	CRDS	1009,80	0,5000	-5,05		
58	Maladie, maternité, décès	1188,00	0,7500	-8,91	12,8000	152,06
61	Vieillesse plafonnée	1188,00	6,6500	-79,00	8,3000	98,60
332	Solidarité autonomie	1188,00			0,3000	3,56
299	Vieillesse déplafonnée	1188,00	0,1000	-1,19	1,6000	19,01
64	Allocations familiales	1188,00			5,4000	64,15
65	Aide au logement	1188,00			0,1000	1,19
1251	Aide au logement collectivités	1188,00			0,5000	5,94
66	Accident du travail	1188,00			1,1000	13,07
75	Transport	1188,00			1,7000	20,20
67	Retraite	1188,00	2,2800	-27,09	3,4100	40,51
73	Centre de gestion	1188,00			0,5500	6,53
74	Centre National de la Fonction Publique Territoriale	1188,00			1,0000	11,88
	TOTAL COTISATIONS			196,97		436,71
	MONTANT A VERSER			991,03		

1°) Citer deux cotisations payées uniquement par le salarié. Citer deux cotisations payées par le salarié et l'employeur.

2°) Quel est le coût total de ce salarié pour le centre de vacances ?

3°) La base de calcul pour les deux CSG (déductible et non-déductible) et la CRDS est un pourcentage du salaire brut. Déterminer ce pourcentage.

4°) Afin de calculer le pourcentage du salaire brut que représentent les charges salariales, Léa a fait la somme des taux et a trouvé 17,78. Est-ce exact ?

Approfondissement possible :

Le gouvernement envisage de faire passer le montant de la CSG déductible de 5,1% à 6,1%. Quel sera alors le pourcentage de diminution du salaire ?

Etape 3 *: travail en temps libre ou en salle informatique.*

En utilisant un tableur, établir la fiche de salaire d'un salarié de 19 ans de ce centre de vacances effectuant 160 heures de travail.

Calcul d'impôts

Cette activité (extrait du sujet du groupement 5 du CRPE session 2009) a pour but :

- d'entraîner les élèves à une pratique aisée de techniques élémentaires de calcul sur les pourcentages ;
- d'amener les élèves à avoir une attitude critique vis-à-vis des informations chiffrées.

Problématiques développées : P1 et P6.
Série : ES - L.
Place dans la progression : pendant le cours sur les pourcentages.

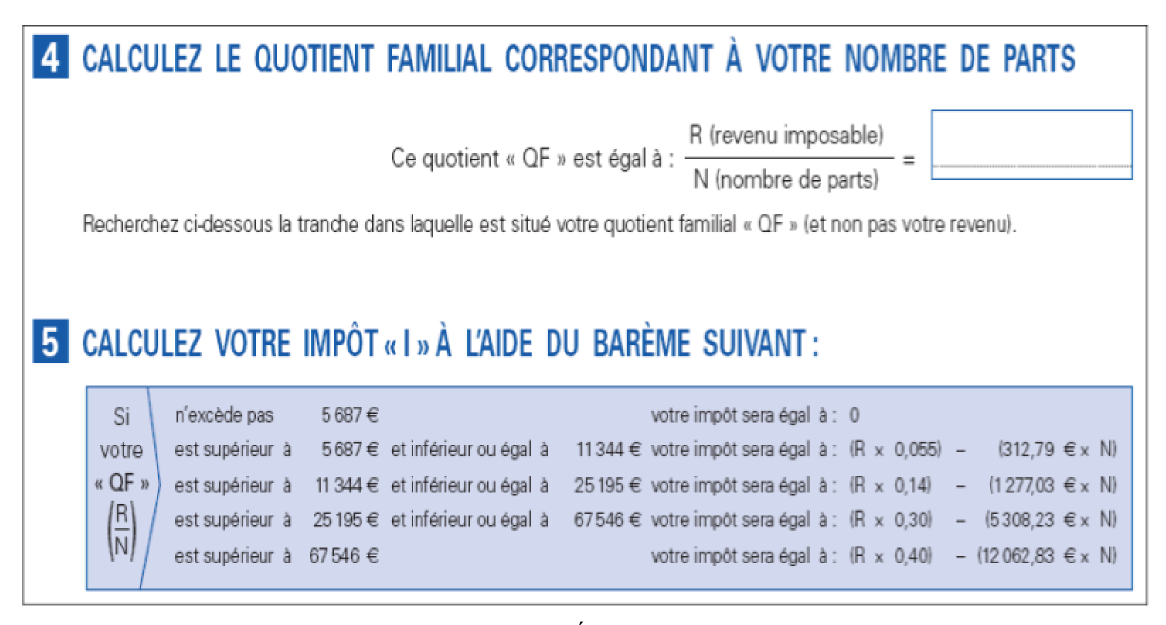
Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les pourcentages. Donner un sens concret au lien entre une évolution et un pourcentage.
Compétences	Rechercher, extraire et organiser l'information utile. Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Pourcentages.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel.

M. et Mme Durand sont mariés et n'ont pas de personne à charge.
Pour l'année étudiée dans cet exercice, leur revenu imposable est de 50 000 €.

1°) Sachant que ce revenu imposable a été calculé en opérant sur le revenu annuel du couple une réduction de 10%, calculer le revenu annuel du couple avant cette réduction.

2°) Le revenu annuel de Mme Durand représente 85 % du revenu annuel de M. Durand. Quel est le revenu annuel de M. Durand ?

3°) Pour les couples mariés sans personne à charge, le nombre de parts N est égal à 2.
Calculer le montant de l'impôt à payer pour ce couple en utilisant le barème donné ci-dessous :



4 CALCULEZ LE QUOTIENT FAMILIAL CORRESPONDANT À VOTRE NOMBRE DE PARTS

Ce quotient « QF » est égal à : $\dfrac{\text{R (revenu imposable)}}{\text{N (nombre de parts)}}$ =

Recherchez ci-dessous la tranche dans laquelle est situé votre quotient familial « QF » (et non pas votre revenu).

5 CALCULEZ VOTRE IMPÔT « I » À L'AIDE DU BARÈME SUIVANT :

Si votre « QF » $\left(\frac{R}{N}\right)$	n'excède pas	5 687 €			votre impôt sera égal à : 0
	est supérieur à	5 687 €	et inférieur ou égal à	11 344 €	votre impôt sera égal à : (R x 0,055) – (312,79 € x N)
	est supérieur à	11 344 €	et inférieur ou égal à	25 195 €	votre impôt sera égal à : (R x 0,14) – (1 277,03 € x N)
	est supérieur à	25 195 €	et inférieur ou égal à	67 546 €	votre impôt sera égal à : (R x 0,30) – (5 308,23 € x N)
	est supérieur à	67 546 €			votre impôt sera égal à : (R x 0,40) – (12 062,83 € x N)

Source: Ministère de l'Économie et des finances

4°) On avait proposé à Mme Durand un autre poste lui offrant une augmentation de son revenu annuel de 1 000 €.

Son mari l'en avait dissuadée en lui disant : « Tu n'y songes pas ! Avec ce nouveau poste, nous allons changer de tranche d'imposition et toute ton augmentation va être absorbée par les impôts.»

Son argument était-il valable ? Expliquer la réponse.

4. Suites

Modes de génération d'une suite

Ces deux activités ont pour but d'illustrer des modes de génération de suites à partir de nuages de points à l'aide d'un lissage par moyennes mobiles. Les travaux s'effectuent sur tableur. L'objectif est également de donner un sens concret, ici économique, à la notion de suite.

Problématiques développées : P2, P3 et P6.
Série : ES-L, éventuellement S.
Place dans la progression : avant le chapitre sur les suites.

Objectifs pédagogiques	Introduire la notion de suites et exploiter sa représentation graphique.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique face aux résultats obtenus. Communiquer à l'oral. B2I lycée.
Connaissances	Représentation d'une série statistique. Notion d'évolution.
Logiciels	Tableur
Modalités de gestion de classe	Travail individuel. Accompagnement personnalisé.

Exemple 1 : illustrer l'évolution du prix de l'essence

Trois documents sont fournis aux élèves : 1) un extrait d'un cours d'économie, 2) un tableau donnant les prix de l'essence sur une période et 3) quelques éléments du contexte économique de cette période.

Document 1 : extrait d'un cours d'économie

Une série chronologique est une série statistique ordonnée en fonction du temps.
Sur la représentation graphique d'une série chronologique, on peut distinguer les composantes fondamentales suivantes :

• le mouvement de tendance générale ou trend indiquant l'évolution générale du phénomène étudié ;

• les mouvements cycliques sur une grande période autour du trend. Ces mouvements peuvent être périodiques (exemple : récession et expansion économique, etc.) ;

• les mouvements saisonniers ou variations saisonnières sont des variations se reproduisant périodiquement à des moments bien déterminés (exemple : vente de mazout avant l'hiver, etc.) ;

• les mouvements accidentels ou résiduels sont dus à des facteurs exceptionnels pour la plupart imprévisibles (grève, risque de guerre, etc.).

Document 2 : prix de l'essence sur une période

Le document ci-dessous donne les variations du prix d'un litre d'essence entre les années 1988 et 2007. Ces prix sont exprimés en euros.

Année	Prix
1988	0,749
1989	0,813
1990	0,816
1991	0,805
1992	0,784
1993	0,788
1994	0,819
1995	0,867
1996	0,921
1997	0,956

Année	Prix
1998	0,980
1999	1,006
2000	1,099
2001	1,049
2002	1,000
2003	1,040
2004	1,070
2005	1,220
2006	1,250
2007	1,265

Source : Insee, annuaire statistique de la France

Document 3 : contexte historique de cette période

• Les prix s'effondrèrent en 1987. Ces bas prix stimulèrent la consommation et ralentirent la production hors moyen orient où les coûts d'exploitation sont plus élevés (cas de l'extraction offshore par exemple).

• Les conflits entre le Koweït et l'Iraq en 1990 annulèrent l'offre de pétrole de ces pays qui fut compensée par l'Arabie Saoudite et le Venezuela pour la majorité, le reste des pays de l'OPEP comblant le manque à produire.

• Les prix en déclin depuis le début des années 1990 ne remontèrent qu'à partir du boom économique aux États-unis et en Asie au milieu des années 1990.

• La crise financière asiatique mit un terme brutal à l'embellie des prix à partir de 1997.

• Le déclin des prix s'accentua jusqu'en février 1999 pour atteindre 10 dollars américains/baril. Puis à partir de mars 99, à la suite d'un accord de réduction de la production des pays de l'OPEP mais aussi d'Oman, de la Fédération de Russie, de Mexico et de la Norvège, les prix n'ont cessé d'augmenter jusqu'à atteindre plus de 30 dollars américains/baril un an plus tard. L'OPEP décida alors d'augmenter la production avec comme objectif de stabiliser les prix entre 20 et 25 dollars américains/baril. Les prix redescendirent à nouveau à partir de décembre 2000 pour se stabiliser autour de 28 dollars américains.

• A la suite des attentats du 11 septembre 2001 une légère hausse a eu lieu, mais très rapidement, du fait d'une baisse de la demande en fuel d'aviation et des perspectives de stagnation de la croissance économique qui prévalaient jusqu'alors, les cours ont à nouveau plongé et l'OPEP a décidé de réduire sa production à partir de janvier 2002 à condition que les pays hors de l'OPEP contribuent également à cette réduction.

• Depuis le début des années 2000, le cours du pétrole a connu un niveau historique très élevé et une hausse constante depuis 2001. La moyenne des prix du pétrole a été de 18.5$ environ sur la période 1985-2000 alors que depuis 2000, celle-ci est de 41.6$" (2000-2007). Cette hausse très importante s'explique notamment par le dynamisme de l'économie chinoise et l'émergence de pays nouvellement industrialisés qui tendent à augmenter leur consommation d'énergie, ainsi que par l'amélioration des conditions économiques dans certaines régions du monde et en particulier aux États-Unis (qui se retrouvent de ce fait devoir faire face à une certaine tension au niveau des stocks nationaux). Les sous-jacents ne suffisent cependant pas à expliquer le développement des cours du pétrole sur les années 2003-2004. Ceux-ci ont, en effet, été également fortement influencés par des sur-réactions spéculatives en relation avec les perturbations potentielles au niveau de l'offre (évènements en Irak, par exemple) ou de la demande (faiblesse et baisse des stocks américains).

1. Afin d'ordonner les prix du document 2, on décide d'appeler p_0 le prix d'un libre d'essence en 2008, p_1 le prix en 2009, et ainsi de suite… Illustrer l'évolution de cette suite de prix à l'aide d'un nuage de points réalisé à l'aide d'un tableur.

2. Exploiter la représentation graphique de la suite des prix pour décrire certaines composantes du document 1, composantes que l'on expliquera à l'aide du document 3.

3. Afin d'observer une tendance générale, on décide de créer une nouvelle suite de prix (q_n) obtenue par lissage de moyennes mobiles.

Le principe de cette méthode est de construire une nouvelle suite obtenue en calculant des moyennes arithmétiques successives de longueur fixe à partir des données originales. Chacune de ces moyennes obtenues correspondra au “milieu” de la période pour laquelle la moyenne arithmétique vient d'être calculée.

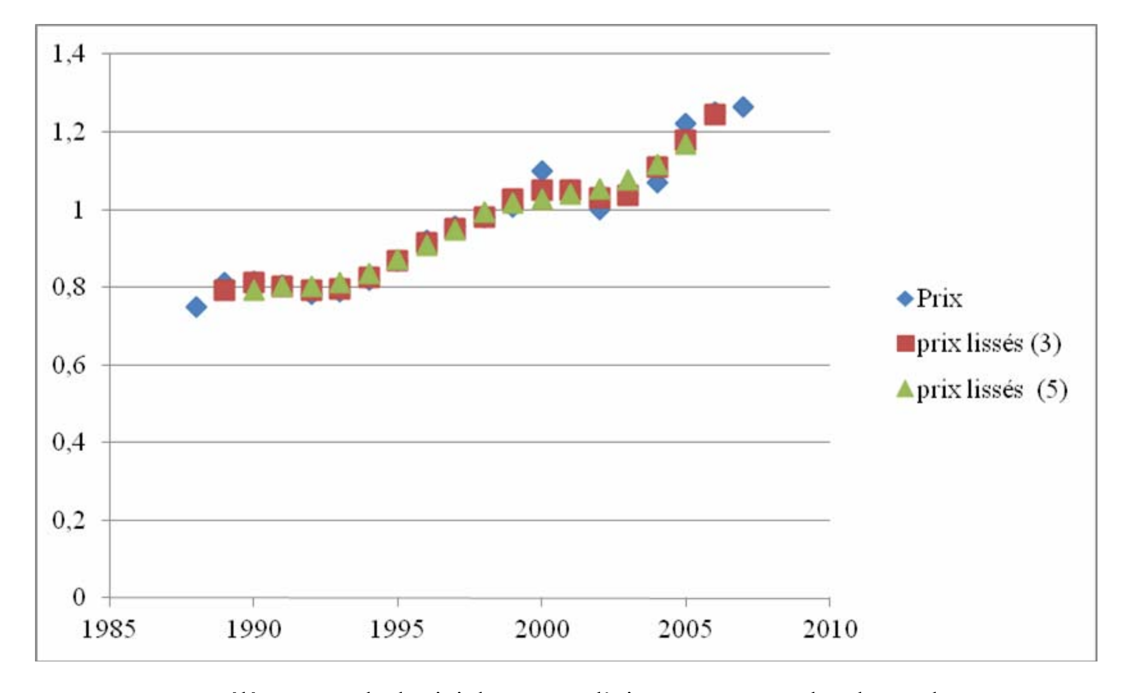
Par exemple :

Année	Rang	Termes	Prix	Prix lissés par moyennes mobiles de période 3
1988	0	p_0	0,749	
1989	1	p_1	0,813	La moyenne de période 3 est égale à : (0,749+0,813+0,813)/3=0,792
1990	2	p_2	0,816	0,811
1991	3	p_3	0,805	0,801
1992	…	…	0,784	…

Réaliser une telle feuille de calcul à l'aide d'un tableur. Ajouter une colonne avec la suite des prix lissés par moyennes mobiles de période 5 puis représenter graphiquement dans le même repère les trois suites de prix obtenues. Ces nouveaux graphiques permettent-ils de mieux mettre en correspondance certaines informations du document 3 ?

Commentaires :

Les élèves aboutissent à une représentation du type suivant :



On peut montrer aux élèves que le logiciel permet d'ajouter une courbe de tendance par moyennes mobiles directement par un clic droit sur le nuage de points de la suite initiale en précisant la période. On explique ainsi comment ont été réalisés les calculs du logiciel.

Exemple 2 : le grossiste en fleurs coupées

Comment aider un grossiste en fleurs coupées à harmoniser un peu ses prix pour éviter de trop fortes fluctuations lors de la revente de sa marchandise ?

Le tableau ci-dessous donne le prix d'achat HT moyen, en gros, d'une botte de 10 roses. Les prix sont relevés sur quatre périodes de chaque mois, de septembre 2009 à août 2010.

Périodes	Prix moyen d'une botte de roses par périodes (en euros)
Septembre	
1	1,82
2	2,02
3	2,63
4	2,27
Octobre	
5	2,23
6	2,36
7	2,61
8	3,01
Novembre	
9	3,81
10	3,01
11	2,92
12	2,93
Décembre	
13	3,82
14	4,01
15	4,22
16	5,82
Janvier	
17	4,51
18	4,52
19	5,13
20	4,57
Février	
21	5,01
22	12,08
23	5,04
24	6,02

Périodes	Prix moyen d'une botte de roses par période (en euros)
Mars	
25	6,03
26	5,04
27	4,11
28	3,53
Avril	
29	2,54
30	2,64
31	2,73
32	2,83
Mai	
33	2,84
34	3,04
35	4,11
36	3,81
Juin	
37	3,01
38	2,10
39	2,22
40	2,15
Juillet	
41	2,21
42	2,09
43	1,83
44	1,73
Août	
45	3,02
46	3,31
47	3,52
48	2,50

1. Illustrer l'évolution de cette suite de prix à l'aide d'un nuage de points réalisé à l'aide d'un tableur. Exploiter la représentation graphique de cette suite pour décrire certaines composantes économiques du cours de la botte de roses et les interpréter (mouvements saisonniers sur 12 mois, fêtes, coûts en énergie pour la production,…).

2. Le grossiste cherche à lisser davantage ses prix, sur la quinzaine, voire sur le mois. Proposer une stratégie permettant de l'aider.

3. Le grossiste s'octroie un taux de marge commerciale brute de 33,3% pour la revente. Le lissage des prix à la quinzaine ou au mois lui est-il favorable, défavorable ou sans effet ?

Jeux de nombres

De nombreux jeux de nombres, dont s'emparent facilement les élèves, génèrent des suites numériques. Captivants et synonymes de curiosité, ces jeux facilitent le développement des compétences pour la formation des élèves. L'activité présentée ci-dessous a pour but d'aborder les modes de génération d'une suite. Sans grande difficulté, elle permet aux élèves d'investir rapidement le sujet. Attrayante, elle apporte beaucoup en termes d'investigation tout en renforçant le calcul mental. Avant de se lancer dans la conjecture, les élèves observent différentes suites de nombres, ce qui leur permet de conceptualiser différentes natures de suites en les comparant. Cette activité permet aussi de favoriser l'oral. La partie algorithmique renforce le raisonnement et la logique.

Le travail demandé aux élèves est réalisé en deux temps :

1. Une lecture active de l'énoncé suivie d'une recherche individuelle. Le professeur accompagne l'élève dans son travail d'investigation, puis donne la parole aux élèves pour une analyse critique des résultats qu'ils ont proposés.
2. Dans un deuxième temps, l'activité sollicite une démarche algorithmique. Le professeur termine sa séance en demandant aux élèves d'écrire l'algorithme dans le langage de leur choix, de le programmer puis de le tester afin de valider les conjectures émises.

Problématiques développées : P2, P3, P6 et P7.
Série : toutes séries.
Place dans la progression : avant le cours sur les suites.

Objectifs pédagogiques	Approcher la notion de suites numériques, en variant les supports et les outils. Amener la notation indicielle des termes d'une suite.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus.
Connaissances	Les notions d'algorithmique de la classe de seconde.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel puis collectif. Utilisation de la calculatrice.

Énoncé de l'exercice

On considère le jeu de nombres suivant :

On choisit un nombre entier entre 1 et 99.
À chaque étape, on le remplace par la somme des carrés de ses chiffres.

Exemple : Je choisis n=7.

Étape 1: 49

Étape 2: 97…

1. Poursuivre la procédure pour n = 7.
2. Recommencer avec n = 4.
3. Faire un essai avec un autre entier de votre choix.
4. Comparer les résultats avec ceux obtenus par d'autres élèves de la classe.
5. Émettre une conjecture sur les suites de nombres obtenus.

6. Voici un algorithme :

```
Variables
        q, r, n et s
Entrée
        Saisir le nombre entier n
Traitement
        Affecter 0 à s
        Tant que n > 0
                q prend la partie entière de n/10
                r prend la valeur n – 10q
                s prend la valeur s + r^2
                n prend la valeur q
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher s
```

- Expliquer le rôle de cet algorithme.
- Compléter cet algorithme afin qu'il puisse valider la conjecture émise.

Évolution de cellules cancéreuses

Cette activité est tirée de documents écrits par Dominique Barbolosi (Université Paul Cézanne).

Problématiques développées : P2, P3 et P7..
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Résoudre un problème issu d'un phénomène discret. Utiliser les TICE.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'oral
Connaissances	Représentation graphique d'un nuage de points. Réaliser une feuille de calcul à l'aide du tableur.
Logiciels	Tableur, calculatrice, logiciel de programmation.
Modalités de gestion de classe	Activité en autonomie.

Tout cancer débute par la production d'une cellule cancéreuse. Au cours du temps, cette cellule va produire un ensemble de cellules filles appelé tumeur. On observe que le temps de doublement T d'une tumeur cancéreuse (c'est-à-dire le temps mis par une tumeur donnée pour doubler son nombre de cellules) est sensiblement constant et dépend du type de cancer. Ce temps de doublement peut être évalué sur des cellules prélevées dans la tumeur et mises en culture. Par exemple, pour un cancer du sein, T=14 semaines ; pour certains cancers du poumon T=21 semaines ; pour les cancers du colon et du rectum, T=90 semaines.

Évolution d'une tumeur sans traitement

On fait l'hypothèse qu'une cellule cancéreuse apparaît dans l'organisme d'un individu.
On cherche comment connaître le nombre de cellules cancéreuses qui composent une tumeur dont le temps de doublement T est connu à la fin de chaque période.

Modélisation

Voici deux schémas :

Schéma 1 :

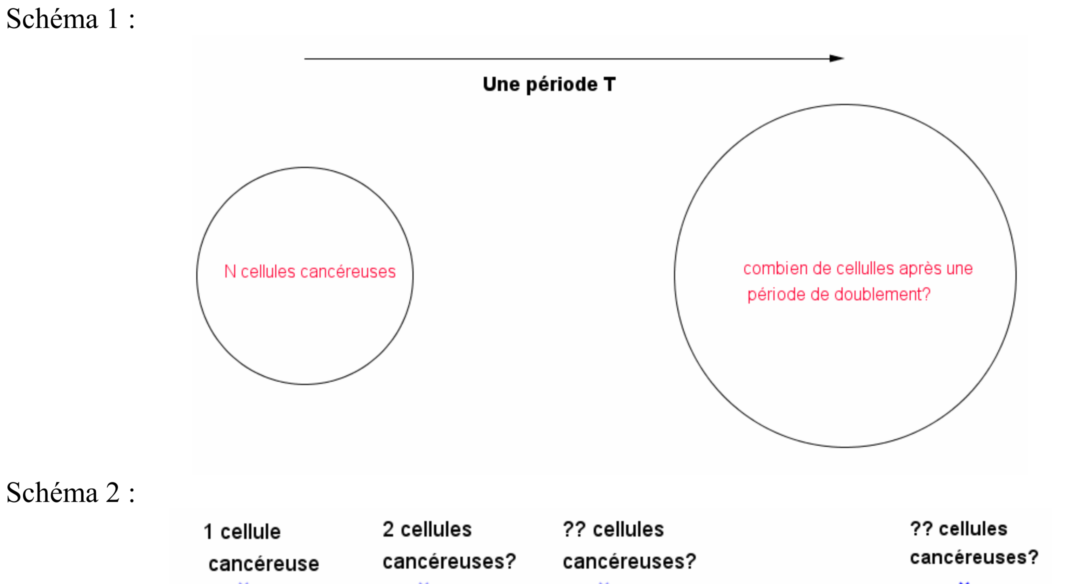


Schéma 2 :

1. À l'aide d'un tableur, réaliser et compléter la feuille de calcul suivante :

	A	B
1	période	nombre de cellules cancéreuses
2	0	1
3	1	2
4	2	4
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

2. À l'aide du tableur, représenter le nuage de points correspondant à l'évolution du nombre de cellules cancéreuses.

3. Compléter le tableau suivant :

Période	0	1	2	3	….	n périodes
Nombre de cellules cancéreuses	1	2	…	…	….	…
Nombre de cellules cancéreuses	u_0	u_1	…	…	….	u_n

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de cellules cancéreuses n période(s) après la naissance de la première cellule cancéreuse. On a donc $u_0 = 1$.

Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Remarque : cette situation peut également être exploitée pour introduire les suites géométriques, mais l'activité privilégie ici un mode de génération numérique et graphique.

Découverte de la tumeur

Actuellement, la plus petite tumeur cancéreuse détectable est constituée de 10^9 cellules, ce qui correspond à peu près à une tumeur d'une masse égale à 1 gramme.

Question : si on découvre aujourd'hui une tumeur ayant 10^9 cellules, peut-on savoir quand est apparue la première cellule cancéreuse ?

Méthode 1 : utiliser un tableur.

Méthode 2 : à l'aide d'un algorithme

```
Variables
        n, u
Initialisation
        n prend la valeur 0
        u prend la valeur 1
Traitement
        Tant que u < … Faire
                n prend la valeur n + 1
                u prend la valeur …
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher n
```

1. Compléter l'algorithme afin qu'il puisse donner une réponse à la question posée.
2. Coder l'algorithme complété à l'aide de la calculatrice, puis l'exécuter. Conclure.

<u>Prolongements possibles</u>

Piste 1

Après le traitement d'un cancer du sein (T=14 semaines), il est d'usage de surveiller la personne traitée sur une période de 5 ans. Sachant qu'un traitement chirurgical peut laisser en résidu indétectable une masse tumorale de 10^3 cellules, expliquer l'origine du choix de 5 ans comme période de surveillance d'un cancer du sein après traitement.

Piste 2

Pour le cancer du colon (T=90 semaines), on préconise un dépistage à partir de 50 ans. Un individu développe une cellule cancéreuse à l'âge de 20 ans. Le dépistage proposé est-il cohérent ? Justifier la réponse.

Population de pies bavardes

Nous allons, dans cette section, nous pencher sur une espèce d'oiseaux, la pie bavarde. C'est une population d'oiseaux très présente en Europe ainsi qu'en Amérique du Nord, surtout dans les provinces de l'Ouest. Il existe une grande population de pies bavardes en Alsace, région de l'est de la France, dans une grande réserve naturelle.

Partie A : Essais de modélisation

Problématiques développées : P2, P3 et P6
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : après l'introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	B2I lycée : le tableur. Rechercher de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur.
Logiciel	Tableur.
Modalités de gestion de classe	Travail de groupe.

Activité

Un groupe de biologistes a relevé pendant quatre ans, le premier janvier de chaque année depuis 2000, le nombre de pies vivant sur une île d'une superficie de 60 km^2.

Il a obtenu les résultats suivants :

Année	Population
2000	300
2001	270
2002	243
2003	220

Les mesures ont été stoppées pendant quelques années, puis ont repris en 2010. On comptait 105 pies sur l'île le premier janvier 2010.

1. Entrer les données dans une feuille de calcul.
2. Proposer une modélisation de la situation à l'aide d'une suite (p_n).
3. En utilisant ce modèle, quel serait la population en 2010 ?
4. Peut-on valider cette modélisation ?

Les biologistes ont admis que le nombre d'oiseaux diminuait de 10% chaque année, à cause des prédateurs et de la régulation des naissances et des décès.

Quelle est dans ce cas la nature de la suite (p_n) ?

Partie B : Premier modèle d'évolution - les biologistes n'interviennent pas.

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6, P7 et P8.
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : après l'introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	B2I lycée : le tableur. Rechercher de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur. Les notions algorithmiques de la classe de seconde
Logiciels	Tableur, logiciel de programmation
Modalités de gestion de classe	Devoir à la maison et (ou) travail de groupe.

Fiche élève

Les deux questions posées à la classe sont :

- Comment évolue la population de pies ?
- En quelle année la population disparaît-elle de l'île si la situation perdure ?

Fiche professeur

Ces questions permettent de mettre en œuvre une démarche expérimentale.

Dans un premier temps, le travail est mené à l'aide d'un tableur.

Celui-ci permet de constater que la population décroît et de déterminer en quelle année cette espèce d'oiseaux aura disparu de l'île. On peut envisager d'utiliser une courbe de tendance.

Le recours à une méthode algorithmique dans un second temps, permet au professeur de proposer des énoncés différenciés, répondant aux besoins de chaque apprenant.

Énoncé 1

1. Interpréter l'algorithme ci-dessous.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

```
Initialisation
        pop ← 105
        n prend la valeur 0
Traitement
        Tant que pop >= 1 Faire
                pop ← pop × 0,9
                n ← n + 1
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher « la population aura disparu en 2010 + n »
```

Énoncé 2

1. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie l'année où la population aura disparu.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

```
Initialisation
        pop ← …
        n prend la valeur 0
Traitement
        Tant que pop >= 1 Faire
                pop ← …
                n ← …
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher « la population aura disparu en … »
```

Énoncé 3

1. Écrire un algorithme qui calcule et affiche en sortie l'année où la population aura disparu.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

Partie C : Deuxième modèle d'évolution - les biologistes interviennent.

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6, P7 et P8.
Série : S.
Place dans la programmation : après la notion de suite géométrique et le sens de variation d'une suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	Interpréter un algorithme. Compléter un algorithme. Modifier un algorithme. Émettre des conjectures. Mobiliser ses connaissances. Analyser de manière critique un document. Utiliser les quantificateurs.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur.
Logiciels	Tableur, logiciel de programmation
Modalités de gestion de classe	Recherche par groupes, avec éventuellement une différenciation portant sur des questions plus ou moins détaillées selon les groupes.

Fiche élève

Pour tenter de modifier la situation, les biologistes décident d'installer un nombre a d'oiseaux de cette espèce le premier janvier de chaque année suivant l'année 2010.
Ils estiment que le risque d'extinction est évité si la population se stabilise autour de 200 oiseaux sur l'île.

1. Partie expérimentale

1.A. Modifier la feuille de calcul établie dans la partie B afin de tenir compte de ce changement.
On pourra noter la valeur de a dans une cellule particulière et on prendra ici $a = 5$.

1.B. Quelle conjecture peut-on émettre quant à l'évolution du nombre d'oiseaux vivant sur l'île ?

1.C. Les biologistes éviteraient-ils ainsi l'extinction de l'espèce ?

1.D. Reprendre les questions *a*., *b*. et *c*. avec les valeurs $a = 10$, $a = 20$ puis $a = 30$.

1.E. Combien doivent-ils installer au minimum d'oiseaux chaque année pour éviter l'extinction ?

1.F. Combien doivent-ils installer au minimum d'oiseaux chaque année pour que le nombre de pies vivant sur l'île retrouve au bout d'un certain nombre d'années sa valeur de l'an 2000 ?

2. Justification

Caroline a répondu correctement à la question 1.E, elle amorce une recherche supplémentaire avec le tableur. Un extrait de sa feuille de calcul est représenté ci-après.
Pour tout entier naturel n, on note q_n le nombre d'oiseaux vivant sur l'île le premier janvier $2010 + n$ lorsque les biologistes décident d'installer 20 oiseaux le premier janvier de chaque année suivant l'année 2010.

	A	B	C	D	E
1	n	q_n	q_n-200	quotient	a= 20
2	0	105	-95	0,9	
3	1	114,5	-85,5	0,9	
4	2	123,05	-76,95	0,9	
5	3	130,75	-69,26		

2.A. Pour tout entier naturel n, exprimer q_{n+1} en fonction de q_n.

2.B. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = q_n - 200$.

2.C. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
Exprimer alors, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n : $q_n = 200 - 95\times(0,9)^n$

4. Démontrer que la suite (q_n) est croissante.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $q_n < 200$.

Pour aller plus loin

On se propose de déterminer le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n > n_0$, q_n appartienne à l'intervalle]199 ;200[.

Pierre propose à Caroline un algorithme ainsi que sa programmation en langage *Scilab* correspondante. Il affirme qu'en exécutant le programme, elle aura répondu à la question :

Initialisation
  n prend la valeur 0
  $q \leftarrow 200 - 95\times(0,9)^n$
Traitement
  Tant que $q < 199$ Faire
    $n \leftarrow n + 1$
    $q \leftarrow 200 - 95\times(0,9)^n$
  Fin du Tant que
Sortie
    Afficher la valeur de n_0

```
n=0 ;
q=200-95*0.9^n ;
while q<=199
  n=n+1 ;
  q=200-95*0,9^n ;
end
afficher('la première valeur de n pour laquelle q_n est ..
compris strictement entre 199 et 200 est égale à '+string(n))
```

1. Interpréter cet algorithme.
2. Coder l'algorithme et l'exécuter.
3. Caroline dit alors à Pierre : « On obtient bien une valeur de n_0 pour laquelle q_{n_0} appartient à l'intervalle]199 ; 200[, mais pourquoi es-tu certain que pour les valeurs de n plus grandes que n_0 la propriété sera encore vérifiée ? ».
4. Répondre alors à la question de l'énoncé.
5. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il détermine le premier entier naturel n0 tel que, pour tout entier naturel $n>n_0$, $q_n \in$]199,9 ; 200[.
Répondre à la même question avec $q_n \in$]199,99 ; 200[.
6. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il détermine le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n>n_0$, $q_n \in$]200 – λ ; 200[, où λ est un réel strictement positif saisi en entrée à l'exécution de l'algorithme.

Que peut-on en déduire quant à la limite de q_n lorsque n tend vers + ∞ ?

Fiche professeur

La question sur le nombre minimal d'oiseaux à installer chaque année pour que le nombre de pies vivant sur l'île retrouve au bout d'un certain nombre d'années la valeur de l'an 2000 peut faire l'objet d'un problème ouvert dont il est possible de demander la démonstration.

Ce travail peut faire l'objet d'un exposé oral.

5. Accompagnement personnalisé

Cartes de jeux

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6 et P7.
Série : série S.
Place dans la progression : tout au long de l'année.

Objectifs pédagogiques	Apprendre à chercher de façon ludique. Utiliser différents outils pour résoudre un problème. Mettre en commun différentes démarches de résolution. Privilégier le travail en groupes. Découvrir la spécialité mathématique en Terminale.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l'oral. Prendre des initiatives.
Connaissances	Celles du programme de seconde ou de première.
Modalités de gestion de classe	Accompagnement Personnalisé.

Description du jeu de cartes

Chaque carte présente un problème court et ouvert, réclamant une réponse (qui peut-être multiple) numérique, approchée ou exacte. Pour résoudre ce problème, l'utilisation de l'informatique et/ou de l'algorithmique sont souvent nécessaires, utiles, mais quelques rares fois inutiles.

Les sujets des problèmes sont variés et couvrent la plus grande part possible du programme de 1ère S.

Les élèves construisent leur démarche en autonomie ; ils choisissent eux-mêmes les logiciels qu'ils comptent utiliser.

Les cartes sont classées suivant la difficulté de résolution :

Cartes vertes : Niveau élémentaire, pour être accessible à tous.
Cartes bleues : Niveau intermédiaire, pour atteindre une maîtrise des outils et des démarches.
Cartes rouges : Niveau supérieur, pour approfondir les démarches.
Cartes noires : Niveau très difficile, pour le plaisir du challenge.

Mises en œuvre possibles

Lors d'une séance, chaque élève prend une carte de la couleur de son choix. Il doit alors résoudre le problème qu'elle présente pour en choisir une autre, et ainsi de suite.
On peut aussi penser à une utilisation en classe entière, en travail en binôme, à la condition de disposer d'un ordinateur pour chaque groupe.

Les énoncés peuvent simplement servir de banque d'énoncés d'exercices utilisant l'outil informatique.

On peut enfin imaginer un concours entre deux classes (ou groupes) : chacune se voit remettre un paquet de cartes, le challenge consistant alors pour chaque classe à résoudre le maximum de cartes dans le temps imparti.

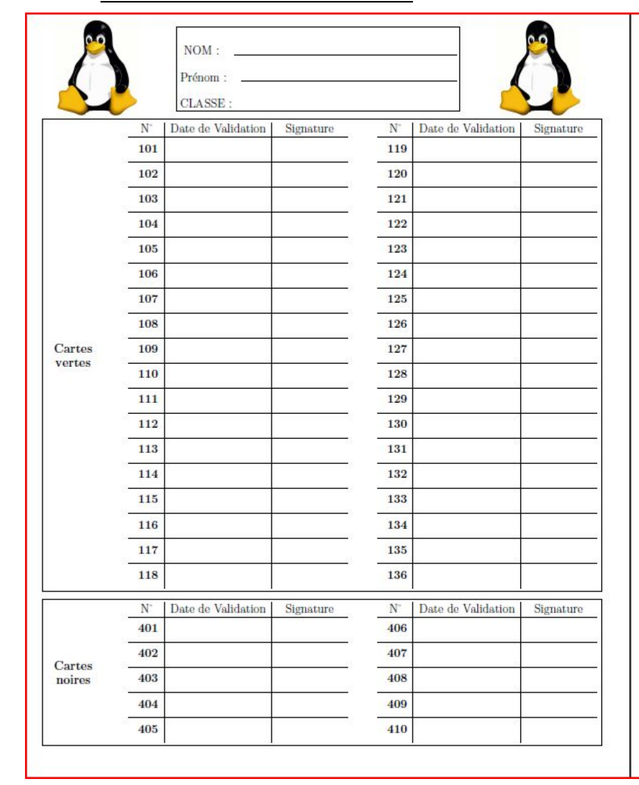
Remarques

La demande du professeur peut être de seulement donner la (ou les) réponse(s) exacte(s), ou bien un compte-rendu expliquant la démarche suivie. On peut imaginer une narration de recherche pour certaines des situations proposées.

Pour l'évaluation, chaque élève dispose d'une feuille de positionnement qui lui permet de se situer dans la maîtrise des outils informatiques.

Annexes

Fiche de suivi individuelle



NOM :

Prénom :

CLASSE :

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
Cartes vertes	101			119		
	102			120		
	103			121		
	104			122		
	105			123		
	106			124		
	107			125		
	108			126		
	109			127		
	110			128		
	111			129		
	112			130		
	113			131		
	114			132		
	115			133		
	116			134		
	117			135		
	118			136		

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
Cartes noires	401			406		
	402			407		
	403			408		
	404			409		
	405			410		

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
Cartes bleues	201			217		
	202			218		
	203			219		
	204			220		
	205			221		
	206			222		
	207			223		
	208			224		
	209			225		
	210			226		
	211			227		
	212			228		
	213			229		
	214			230		
	215			231		
	216			232		

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
Cartes rouges	301			313		
	302			314		
	303			315		
	304			316		
	305			317		
	306			318		
	307			319		
	308			320		
	309			321		
	310			322		
	311			323		
	312			324		

Les principales sources dont sont issus les problèmes

Torneo de Computación y Matemática (CyM), Argentine : www.oma.org.ar/nacional/cym/index.htm

Clubes Cabri, Argentine : www.oma.org.ar/cabri/index.htm

Le concours Alkhawarichti de l'APMEP Lille : http://defiapmep.free.fr/calculs/

Le projet Euler : http://eulerdz.toile-libre.org/index.php

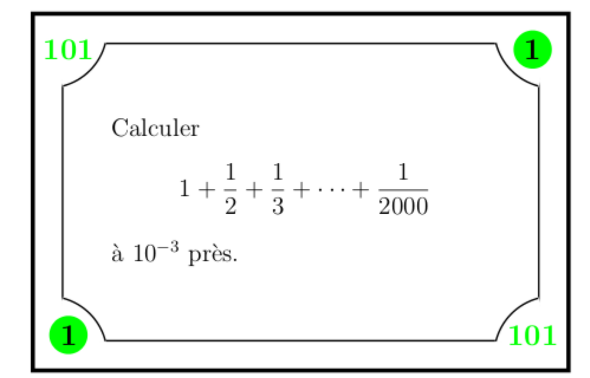
Five hundred mathematical challenges (MAA)

L'épreuve expérimentale de mathématiques en terminale S (IREM Bordeaux)

Introduction de la notion de paramètre au lycée avec un logiciel de géométrie dynamique (IREM)

Bulletin vert (Exercices de-ci, de-là, APMEP)

Quelques exemples de cartes



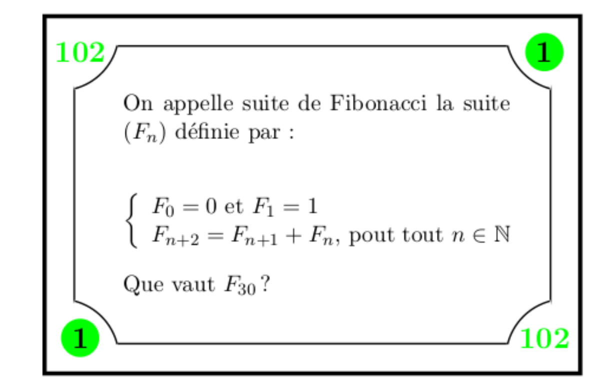
101 — 1

Calculer

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2000}$$

à 10^{-3} près.

1 — 101



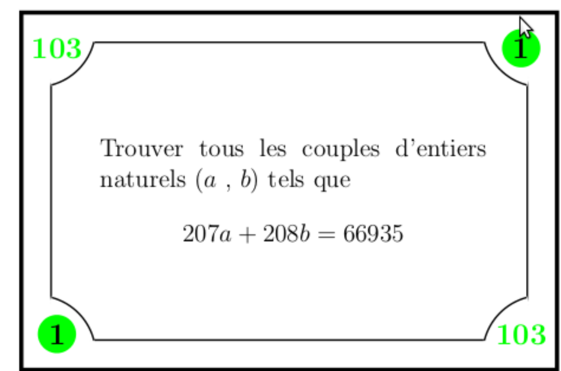
102 — 1

On appelle suite de Fibonacci la suite (F_n) définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ pout tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Que vaut F_{30} ?

1 — 102

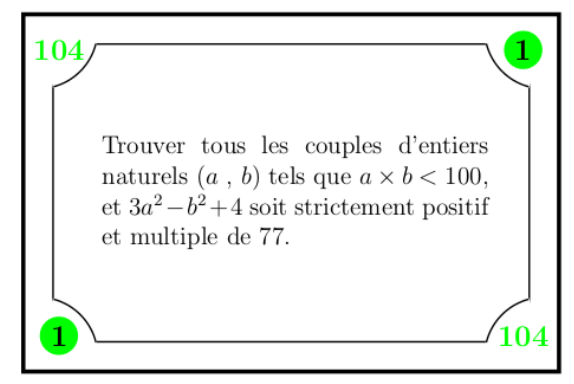


103 — 1

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a\ ,\ b)$ tels que

$$207a + 208b = 66935$$

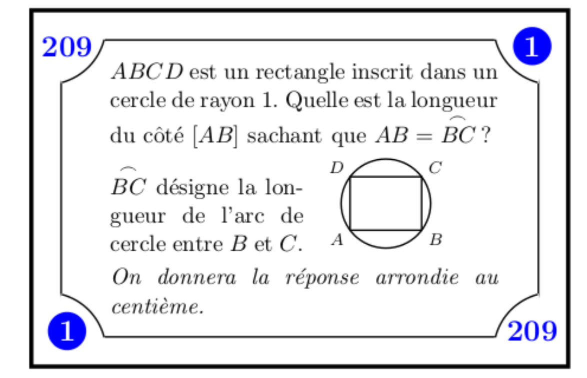
1 — 103



104 — 1

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a\ ,\ b)$ tels que $a \times b < 100$, et $3a^2 - b^2 + 4$ soit strictement positif et multiple de 77.

1 — 104



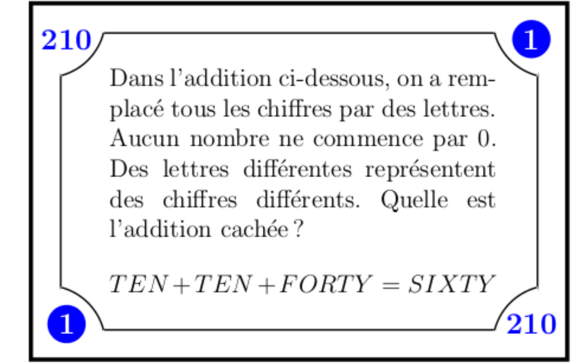
209 — 1

$ABCD$ est un rectangle inscrit dans un cercle de rayon 1. Quelle est la longueur du côté $[AB]$ sachant que $AB = \overset{\frown}{BC}$?

$\overset{\frown}{BC}$ désigne la longueur de l'arc de cercle entre B et C.

On donnera la réponse arrondie au centième.

1 — 209

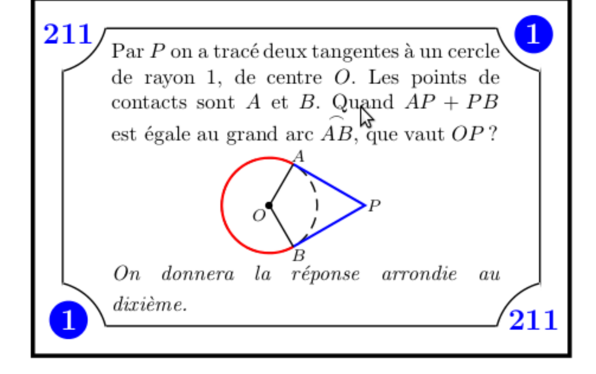


210 — 1

Dans l'addition ci-dessous, on a remplacé tous les chiffres par des lettres. Aucun nombre ne commence par 0. Des lettres différentes représentent des chiffres différents. Quelle est l'addition cachée ?

$$TEN + TEN + FORTY = SIXTY$$

1 — 210

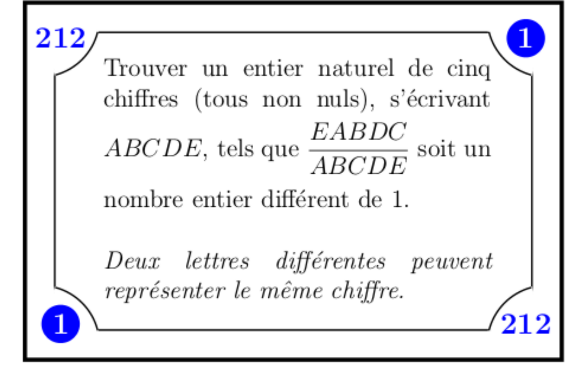


211 — 1

Par P on a tracé deux tangentes à un cercle de rayon 1, de centre O. Les points de contacts sont A et B. Quand $AP + PB$ est égale au grand arc $\overset{\frown}{AB}$, que vaut OP ?

On donnera la réponse arrondie au dixième.

1 — 211



212 — 1

Trouver un entier naturel de cinq chiffres (tous non nuls), s'écrivant $ABCDE$, tels que $\dfrac{EABDC}{ABCDE}$ soit un nombre entier différent de 1.

Deux lettres différentes peuvent représenter le même chiffre.

1 — 212



Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe terminale générale et technologique

Probabilités et statistique

Février 2012

Introduction

Le document ressource pour la partie du programme de la classe terminale « Probabilités et statistique » donne des éléments détaillés permettant aux professeurs de construire leur propre cours. Il ne s'agit pas d'un modèle reproductible tel quel mais d'un support théorique sur les notions introduites pour la première fois dans les programmes du secondaire.

Ces notions sont enseignées dans différents cursus de l'enseignement supérieur mais le point de vue adopté dans le programme de la classe terminale est assez différent.

Les fondements de théorie des probabilités indispensables pour comprendre les notions de statistique inférentielle présentes dans le programme sont développés aussi précisément que possible à ce niveau d'enseignement.

La *loi normale* est introduite en terminale S comme loi-limite d'une suite de variables aléatoires grâce au théorème de Moivre-Laplace. Bien qu'admis, ce théorème se visualise facilement grâce à des animations avec un logiciel de géométrie dynamique ou sur tableur et c'est sous cette forme que la loi normale doit être introduite en terminale ES.

La notion d'*intervalle de fluctuation* d'une variable aléatoire a été introduite en seconde et développée en première dans le cadre de la loi binomiale à l'aide de calculs sur tableur. Elle est enrichie par la notion d'*intervalle de fluctuation asymptotique* d'une variable aléatoire fréquence qui présente l'intérêt de pouvoir se déterminer par un simple calcul.

La notion d'*intervalle de confiance* pour une proportion est introduite grâce à l'intervalle de fluctuation asymptotique.

Tous les nouveaux items sont présentés avec des activités. Celles-ci sont souvent mises en œuvre sur calculatrices ou avec un algorithme. Des exemples d'exercices sont également proposés.

Un complément sur les lois uniforme et exponentielles est proposé, leur approche ayant été modifiée.

L'annexe 1 présente un historique du théorème de Moivre-Laplace en montrant que le concept de fluctuation d'une variable aléatoire autour de son espérance est apparu très tôt avec Jacques Bernoulli et a gagné en précision avec Moivre puis Laplace.

L'annexe 2 donne des compléments sur les lois normales, en particulier sur la fonction de répartition. Cette dernière n'est pas un attendu du programme mais est utilisée par les calculatrices pour les calculs de probabilités sur les lois normales.

L'annexe 3 propose une introduction à la théorie des sondages et donne quelques méthodes couramment utilisées.

L'annexe 4 donne le descriptif des fichiers tableurs, des animations et des algorithmes écrits dans différents langages (Algobox, Scilab, R,...) figurant dans le document. Tous ces fichiers sont téléchargeables. Une aide à la prise en main du logiciel R est également fournie.

L'annexe 5 donne une approche du calcul numérique d'une intégrale par la méthode de Monte-Carlo.

L'annexe 6 fournit des éléments de justification à propos de la notion de différence significative et du critère de disjonction des intervalles de confiance présenté dans le programme de la filière STI2D-STL. Ces éléments n'ont pas à être abordés avec les élèves.

Un document annexe propose une démonstration du théorème de Moivre-Laplace, élaborée de telle sorte que seuls des outils de terminale[1] y sont utilisés. Bien entendu cette démonstration n'est pas au programme mais le théorème de Moivre-Laplace en étant le socle théorique fondamental pour la partie probabilités, il a semblé intéressant d'en faire une proposition de démonstration.

Le théorème de Moivre-Laplace étant un cas particulier d'un théorème général connu sous le nom de théorème-limite central, une approche de ce théorème est proposée à partir de la loi des erreurs.

[1] À l'exception d'un changement de variable (linéaire) incontournable....

Table des matières

I. Variable centrée réduite

A. Comment centrer et réduire

Une variable aléatoire est dite centrée et réduite si son espérance est nulle et si son écart type vaut 1.

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance E(X) = m, de variance V(X) et d'écart type $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$ non nul.

- La variable aléatoire $(X - m)$ a une espérance nulle
- La variable aléatoire $Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ a une espérance nulle et une variance égale à 1, donc un écart type égal à 1.

Attention

L'écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale ne fait pas partie des contenus mentionnés dans le programme des classes de première ES et L. Il convient donc, avant d'aborder le chapitre sur la loi normale en terminale, de l'introduire en lien avec l'écart-type d'une série statistique et d'en faire percevoir les effets dans le cadre d'une activité de simulation.

Si une variable X prend ses valeurs entre 0 et n, $(X - m)$ les prend entre $-m$ et $n - m$ donc $Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ les prend entre $-\dfrac{m}{\sigma}$ et $\dfrac{n - m}{\sigma}$. Si la variable aléatoire X est représentée par un diagramme en bâtons, on obtient la représentation de la variable $(X - m)$ par translation de vecteur $-m\,\vec{i}$ de ce diagramme. Puis on obtient la représentation de la variable aléatoire Z par « réduction » du nouveau diagramme. Les abscisses sur lesquelles sont construits les bâtons sont les valeurs de $\dfrac{X - m}{\sigma}$ et les hauteurs des bâtons sont les mêmes que celles obtenues pour la variable X, cela conduit à une concentration si $\sigma > 1$. Sur le graphique ci-dessous, on a à droite le diagramme en bâton d'une variable X, à gauche en clair le diagramme de $(X - m)$ et en plus foncé celui de Z.

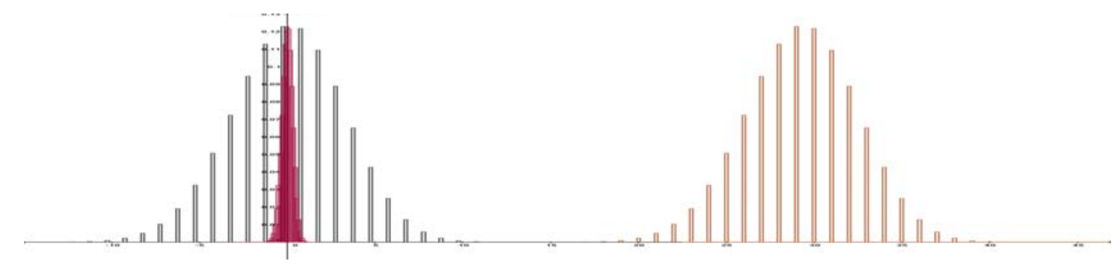


Figure 1 : Effet graphique du centrage et de la réduction sur une variable X suivant une loi $\mathcal{B}$ (45 ; 0,65)

Document associé : centrer et réduire une binomiale.ggb

B. Pourquoi centrer et réduire ?

Lorsqu'on passe de X à Z, on obtient une variable aléatoire dont les paramètres (espérance et variance) ne dépendent plus de ceux de X.

Rappel

Une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut s'interpréter comme un nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes.

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$; on a :

E(X_n) = np, V(X_n) = $np(1 - p)$, et $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$.

La variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ a pour espérance 0 et pour variance 1, indépendantes de n et de p.

La variable aléatoire $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ correspond à la proportion de succès, son espérance est p et sa variance est $\dfrac{p(1-p)}{n}$.

On constate que F_n a une espérance qui ne dépend pas de n et une variance qui diminue quand n augmente c'est-à-dire que les réalisations de F_n « ont tendance à se resserrer » autour de p lorsque n augmente. C'est cette concentration des valeurs les plus probables de F_n qui permettra d'améliorer la prise de décision à partir des observations.

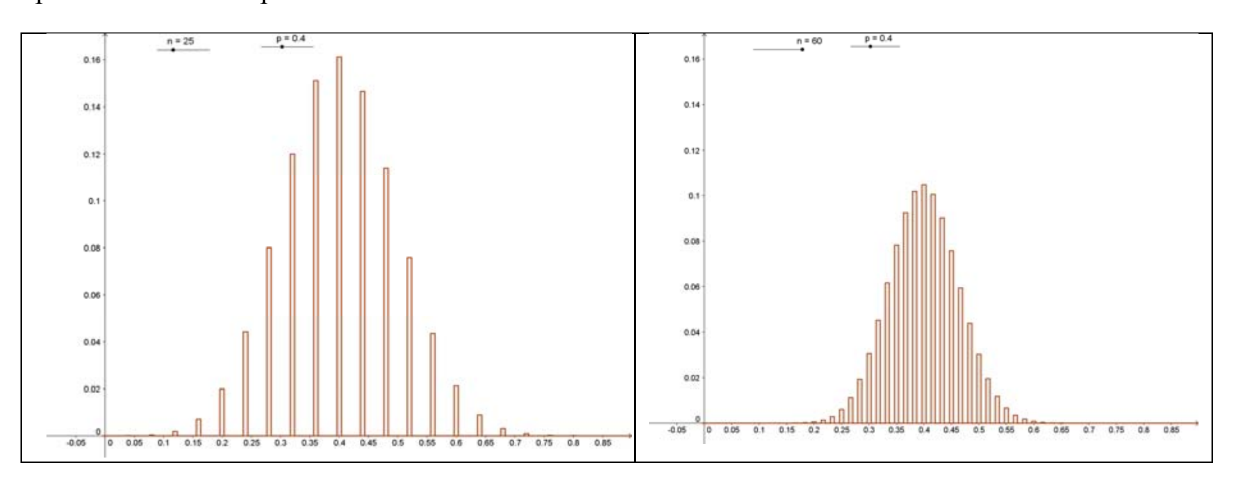


Figure 2 : Diagrammes en bâtons de F_n pour n = 25 et n = 60

Document associé : diagramme en bâtons de Fn.ggb

Sur les graphiques ci-dessus, on a représenté le diagramme en bâtons d'une variable $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ où X_n suit la loi binomiale de paramètres 25 et 0,4 puis 60 et 0,4. Les valeurs prises par F_n sont entre 0 et 1 quel que soit n.

Le paragraphe suivant va permettre de constater que la variable Z_n « tend » vers une variable universelle indépendante de p. La connaissance de la loi de cette variable universelle permet de préciser la fluctuation de $\dfrac{X_n}{n}$ autour de son espérance p.

II. La loi normale centrée réduite

A. Activité : Introduction au théorème de Moivre-Laplace

Dans la représentation de la figure 3, on considère une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Z_n est la variable centrée réduite associée.

On prend deux valeurs $a = -1$ et $b = 2$ et on s'intéresse à $P(-1 \le Z_n \le 2)$.

Pour le cas visualisé ci-dessous, on a pris $n = 100$ et $p = 0,5$.

Donc $P(-1 \le Z_{100} \le 2) = P(45 \le X_{100} \le 60)$.

Les valeurs prises par Z_{100} quand $-1 \le Z_{100} \le 2$ sont de la forme $\dfrac{k-50}{5}$ avec $45 \le k \le 60$.

L'idée est d'associer la loi (discrète) de Z_{100} à des aires de rectangles, comme on le fait pour l'histogramme d'une variable continue.

À chaque valeur de k on fait correspondre un rectangle vertical dont **l'aire** est égale à $\mathrm{P}(X_{100} = k) = \mathrm{P}(Z_{100} = \frac{k-50}{5})$ et dont la base est un segment de l'axe horizontal de longueur $\frac{1}{5}$, centré sur $\frac{k-50}{5}$ ($\frac{1}{5}$ étant l'écart entre deux valeurs consécutives prises par Z). La hauteur de ce rectangle est donc $5\mathrm{P}(X = k)$.

La réunion des rectangles obtenue pour $45 \leq k \leq 60$ a donc pour aire $\mathrm{P}(-1 \leq Z_{100} \leq 2)$.

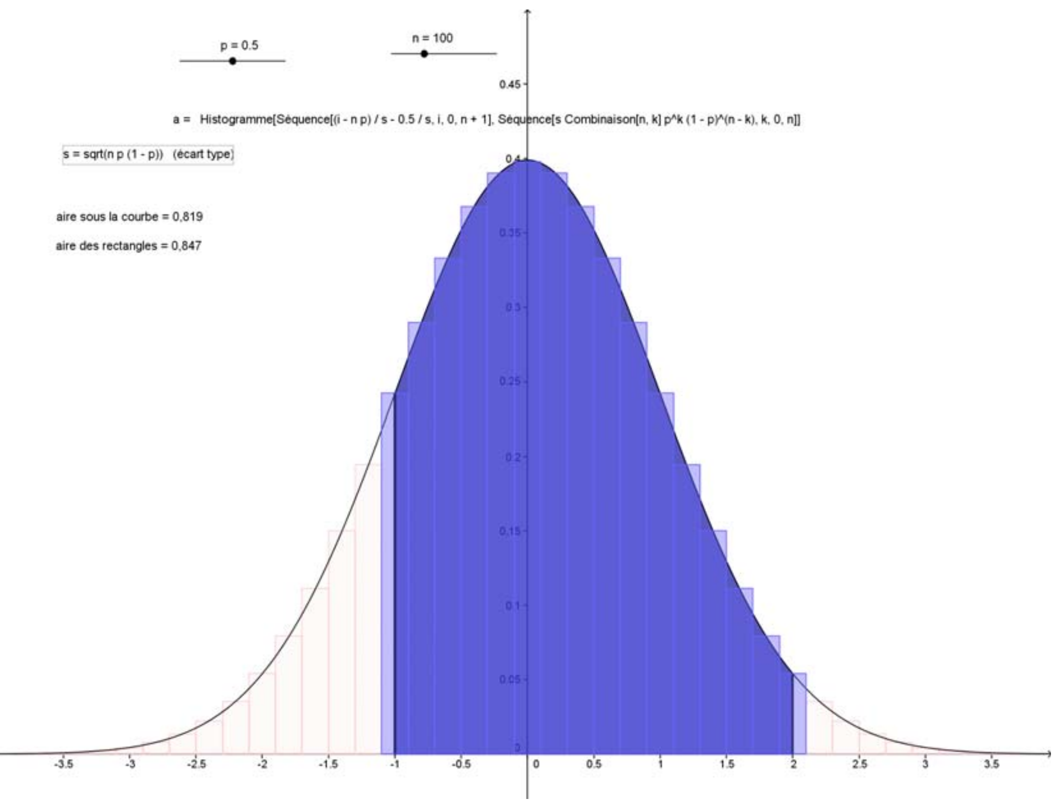


Figure 3 : Visualisation de $\mathrm{P}(a \leq Z_n \leq b)$

Document associé : binomiale et normale.ggb

Les bords supérieurs des rectangles font apparaître une courbe régulière et symétrique délimitant une aire qui est voisine de celle de la réunion des rectangles.

Le mathématicien Abraham de Moivre, protestant français émigré en Angleterre après la révocation de l'édit de Nantes (1685), a découvert que cette courbe est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Le cours de terminale sur l'intégration permet d'écrire que l'aire située sous cette courbe vaut $\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$. Pour comparer l'aire de la réunion des rectangles et celle sous la courbe, on peut remplir le tableau suivant :

k	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$\mathrm{P}(X = k)$	0,048	0,058	0,067	0,073	0,078	0,080	0,078	0,073	0,067	0,058	0,048	0,039	0,030	0,022	0,016	0,010

La somme des aires des rectangles vaut 0,85 à 10^{-2} près et la valeur de $\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$, qu'on peut obtenir avec une calculatrice, est 0,82 à 10^{-2} près.

À partir de l'animation proposée, on constate que :

- Lorsque n devient grand, à p fixé, la largeur des rectangles est de plus en plus petite car elle vaut $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$.
- L'aire correspondant à $\mathrm{P}(Z_n \in [a,b])$ se rapproche de l'aire entre a et b sous une courbe fixe, qui est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exercice (TS)

Soit la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Montrer que la fonction dérivée g' est minimale pour $x = 1$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x + g(x)$ est croissante sur $[0, +\infty[$.
3. En déduire que si $0 \leq a \leq b$ alors $a - b \leq g(b) - g(a) \leq 0$ et que si $a \leq b \leq 0$ alors $0 \leq g(b) - g(a) \leq b - a$.
4. En déduire que pour tous réels a et b on a : $|g(b) - g(a)| \leq |b - a|$.

B. Théorème de Moivre-Laplace

Le résultat suivant est au programme de la classe de terminale S uniquement et il est admis.

Théorème

On suppose que, pour tout entier n, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On pose $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, variable centrée et réduite associée à X_n.

Alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a : $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$.

Voici ce que dit Laplace à propos des travaux de Moivre :

> « Moivre a repris dans son ouvrage [*The doctrine of Chances*] le théorème de Jacques Bernoulli sur la probabilité des résultats déterminés par un grand nombre d'observations[2].
>
> Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des événements qui doivent arriver approche sans cesse de celui de leurs possibilités respectives, il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports soit contenue dans des limites données. »

---

[2] Ce résultat est la loi des grands nombres. En seconde, on a donné une forme simplifiée de la loi des grands nombres, à savoir : la probabilité que la variable fréquence s'écarte de p diminue quand le nombre d'observations augmente.

L'annexe 1 donne des développements sur ce théorème fondamental.

C. La loi normale centrée réduite

Définition

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite[3] notée $\mathcal{N}(0,1)$ si, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x\,.$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est appelée la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Premières propriétés

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- L'aire totale sous la courbe de f est égale à 1, elle représente la probabilité $P(X \in]-\infty,+\infty[)$.
- La fonction f est paire ; sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- L'aire sous la courbe sur $[0,+\infty[$ est égale à $\frac{1}{2}$.
- Pour tout réel u, $P(X \leq -u) = 1 - P(X \leq u)$.

  Sur la figure, où $u > 0$, les aires grisées sont égales en raison de la symétrie de la courbe représentative.

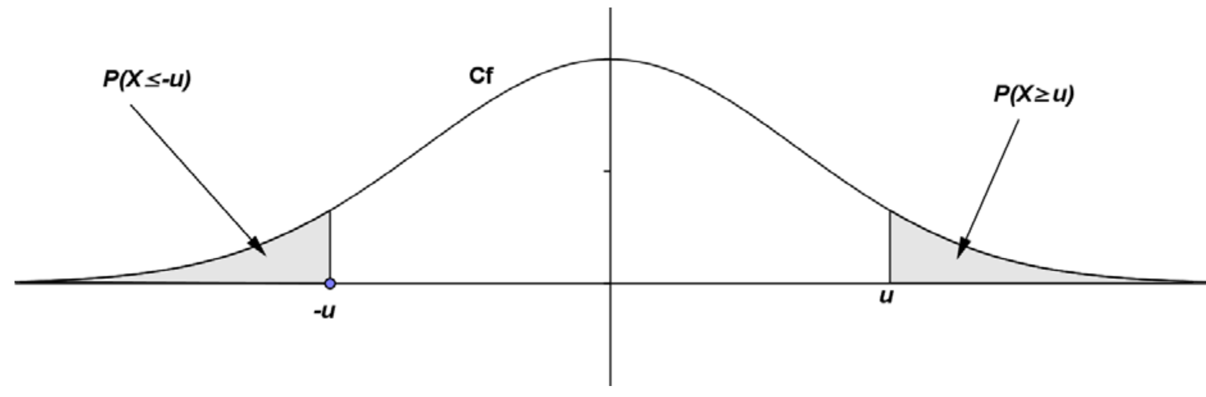


Figure 4: Représentation graphique de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite

Théorème (au programme de terminale S)

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ alors, pour tout réel $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Démonstration (faisant partie des exigibles en terminale S).

Cette démonstration est intéressante car elle permet de réinvestir le cours sur les fonctions et l'intégration.

---

[3] Cette loi est également nommée "loi normale standard", en particulier dans les tableurs courants, mais cette dénomination ne figure pas au programme.

D'après la symétrie de la courbe, on a pour tout réel u positif,

$$\mathrm{P}(-u \leq X \leq u) = 2\mathrm{P}(0 \leq X \leq u) = 2\int_0^u f(x)\mathrm{d}x \ = 2H(u),$$

où H est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. La fonction H est donc continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On a $\lim\limits_{u\to+\infty} H(u) = \frac{1}{2}$ puisque cela correspond à l'aire sous la courbe pour $u \in [0,+\infty[$, c'est-à-dire à $\mathrm{P}(X \geq 0)$.

La fonction $2H$ admet donc le tableau de variations et la courbe représentative ci-dessous :

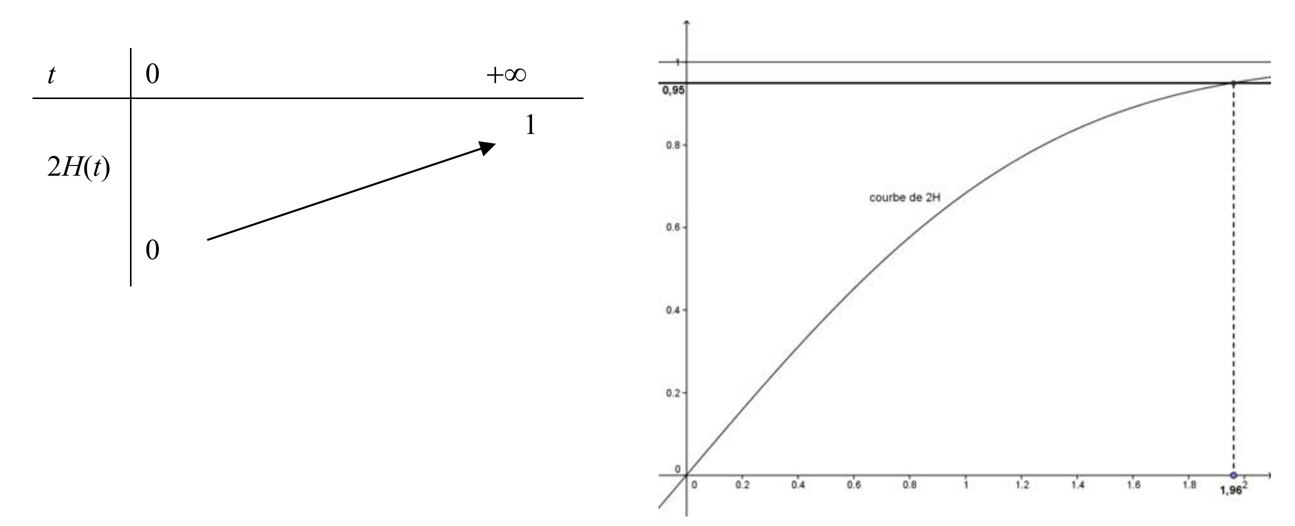
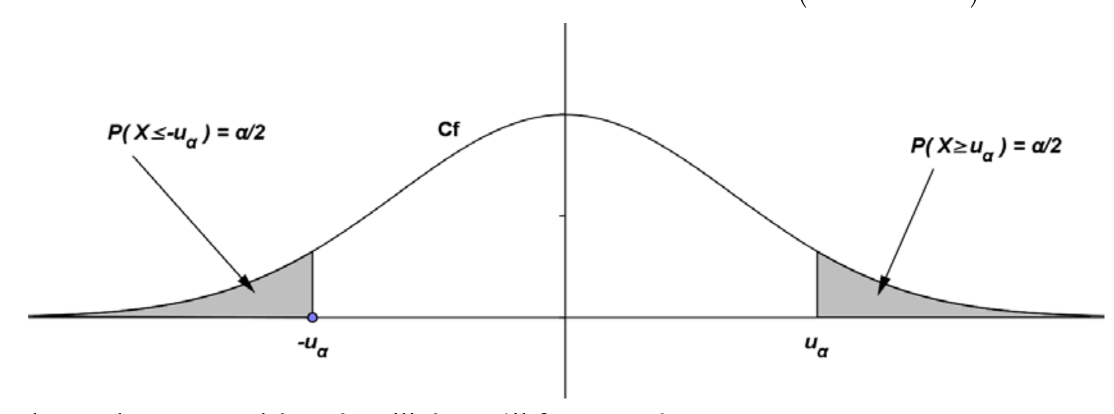


Figure 5 : courbe de la fonction 2*H*

Pour tout réel α compris strictement entre 0 et 1, le réel $(1 - \alpha)$ est également compris strictement entre 0 et 1 et donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel u_α strictement positif tel que $2H(u_\alpha) = 1 - \alpha$ c'est-à-dire tel que $\mathrm{P}\left(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$.



Il y a deux valeurs approchées très utilisées qu'il faut connaître :

$$\boldsymbol{u_{0,05} \approx 1,96 \text{ et } u_{0,01} \approx 2,58 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}}$$

$u_{0,05}$ est le réel pour lequel $\mathrm{P}(-u_{0.05} \leq X \leq u_{0.05}) = 0,95$ et on a donc : $\mathrm{P}(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$ de même, $\mathrm{P}(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$.

Cela donne une idée de la répartition des valeurs de X. Environ 95% des réalisations de X se trouvent entre – 1,96 et 1,96.

2. **Espérance d'une loi normale centrée réduite (uniquement en terminale S)**

Selon la définition donnée dans le programme :

> Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors l'espérance de X est définie par :
>
> $\mathrm{E}(X) = \lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0 t\,f(t)\mathrm{d}t + \lim\limits_{y\to+\infty}\int_0^y t\,f(t)\mathrm{d}t$.

(on fera le lien avec ce qui est vu avec les lois uniformes et exponentielles).

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est nulle. En effet :

$$\int_0^y t\,f(t)\mathrm{d}t = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\right)$$

De même, $\int_x^0 t\,f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-1\right)$

Par passage à la limite, on obtient $\mathrm{E}(X) = 0$.

La variance de X est définie par l'espérance du carré de l'écart entre X et son espérance soit $\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))^2)$ et on admet qu'elle vaut 1.

On peut proposer le calcul de la variance en exercice, selon une méthode analogue à celle utilisée pour le calcul de l'espérance d'une loi exponentielle.

III. Lois normales

A. Généralités

On dispose d'un échantillon de 50 000 tailles (en cm) d'hommes adultes dont voici un résumé statistique et un histogramme[4]:

	Moyenne	Écart type	Nombre	Minimum	Maximum	Médiane	Interquartile
Tailles	175,0	8,0	50 000	145,1	208,5	175,0	10,8

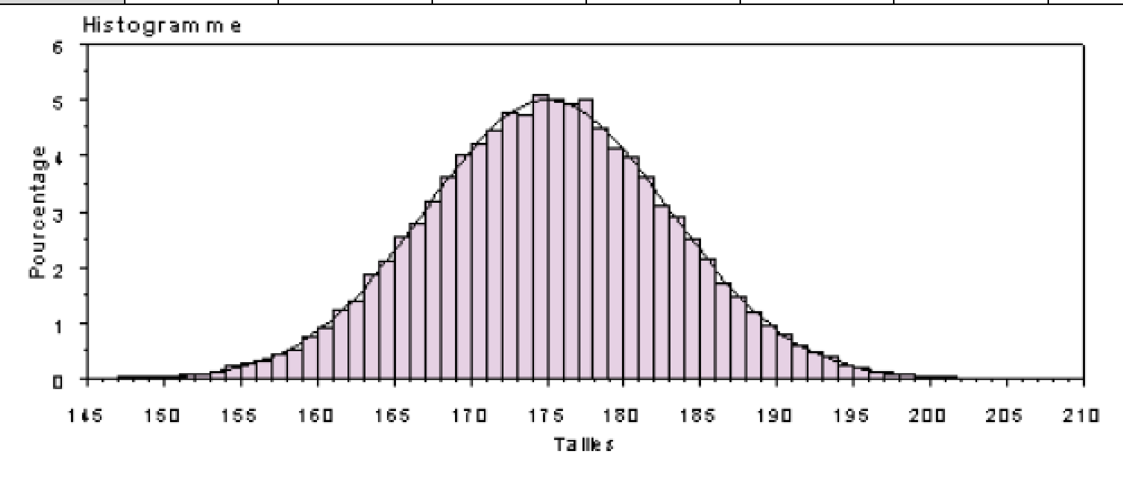


Figure 6 : Répartition des 50000 valeurs de la taille

Si on centre et réduit la variable « taille », l'histogramme obtenu présente une analogie évidente avec la figure 3[5] ; cela motive la définition suivante.

[4] Cet exemple est emprunté au document d'accompagnement publié en 2002.

> Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

L'espérance de X vaut μ et sa variance vaut σ^2. La notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est justifiée à l'annexe 2.

Remarque
Il s'agit d'une loi à densité c'est-à-dire qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels a et b vérifiant $a \leq b$, on a $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$. L'expression de la fonction de densité de X n'est pas au programme.
On peut constater que μ est à la fois l'espérance et la médiane[6] de X.

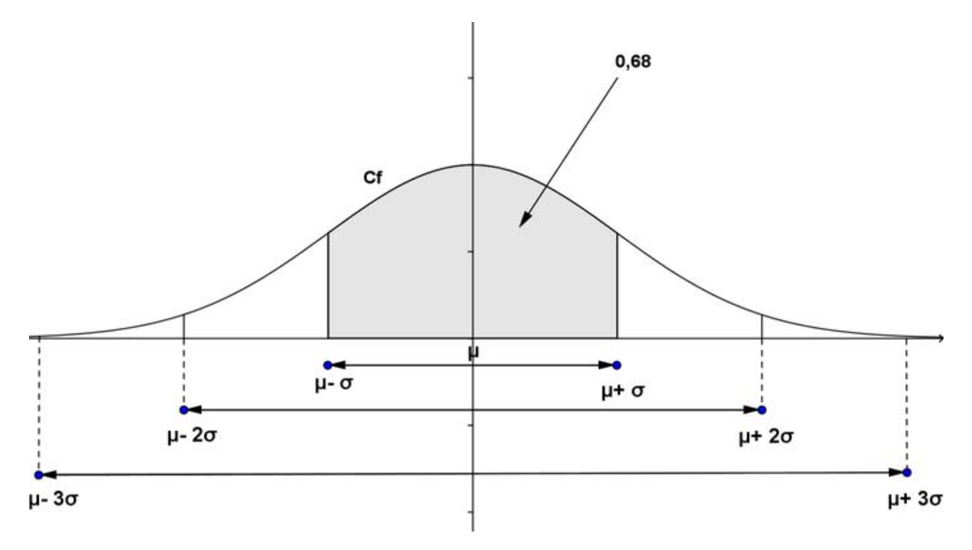
Exemple
La masse en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut être modélisée par une loi normale[7] de moyenne $\mu = 3,3$ et d'écart type $\sigma = 0,5$. La probabilité qu'un nouveau né pèse moins de 2,5 kg à la naissance est donc : $\mathrm{P}(X < 2,5)$. La variable $Z = \dfrac{X-3,3}{0,5}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On a alors : $\mathrm{P}(X < 2,5) = \mathrm{P}(Z < \dfrac{2,5-3,3}{0,5}) = \mathrm{P}(Z < -1,6) = 1 - \mathrm{P}(Z < 1,6) \approx 0,055$.
La probabilité cherchée est donc égale à 0,055 à 10^{-3} près.
On peut aussi obtenir directement la valeur de $\mathrm{P}(X < 2,5)$.
On donne dans le paragraphe B la méthode pour obtenir cette valeur à la calculatrice.

Les intervalles « Un, deux, trois sigmas »
Les résultats suivants sont utilisés dans de nombreux contextes ; ils peuvent être visualisés sur la figure 7 ci-dessous :

$$\mathrm{P}(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0,68 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}$$
$$\mathrm{P}(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0,95 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}$$
$$\mathrm{P}(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0,997 \text{ (à } 10^{-3} \text{ près).}$$

---

[5] Il faut noter qu'il s'agit ici d'un histogramme car la variable « taille » est continue alors que sur la figure 3 les rectangles ne sont pas ceux d'un histogramme car la variable binomiale n'est pas continue.
[6] Un réel m est une médiane d'une variable aléatoire si $\mathrm{P}(X \leq m) = 0,5$
[7] Le poids d'un nouveau né ne prend pas de valeurs négatives mais on peut vérifier que $\mathrm{P}(X < 0)$ est négligeable de même que $\mathrm{P}(X > 5)$.



Représentations graphiques montrant l'importance de la valeur de l'écart type σ

Courbes représentatives des densités de la loi normale $\mathcal{N}(0,1/4)$ en rouge (maximum voisin de 0,8), de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ en bleu et de la loi normale $\mathcal{N}(0,4)$ en vert.

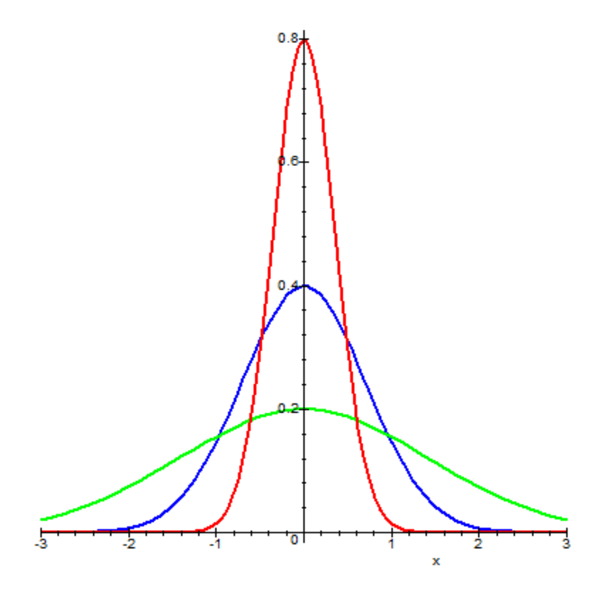


Figure 8: Influence de l'écart type

B. Exemples d'exercices

1. Montrer que si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $-X$ suit la même loi.

2. La sélection chez les vaches laitières de race « Française Frisonne Pis Noir »

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race FFPN peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart-type $\sigma = 400$. La fonction g désigne la fonction de densité de cette loi normale.

1° Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.

a) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.

Solution

En utilisant calculatrices ou logiciels, on trouve : P($X < 5800$) ≈ 0,3085. Certaines calculatrices et logiciels de calcul numérique proposent une fonction dédiée à ce type de calcul (pnorm() dans R, normalFRép chez Texas (normaFrép pour fonction de répartition de la loi normale), menu Ncd chez Casio (Ncd pour Normal cumulative density). Il y a un faux ami : P($X \leq x$) qui est la fonction de répartition, en français est appelé "distribution function" en anglais, alors que notre fonction de distribution pour une variable discrète est classiquement P($X = x$).

Attention !

Les calculatrices ne fournissent pas $\mathrm{P}(X \leq x)$ mais seulement $\mathrm{P}(a \leq X \leq b)$.

Pour le calcul de $\mathrm{P}(X \leq x)$ dans le cas où X suit une loi $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$, la règle pratiquée est donc la suivante :

- Si $x \geq \mu$, on utilise $\mathrm{P}(X \leq x) = 0{,}5 + \mathrm{P}(\mu \leq X \leq x)$
- Si $x \leq \mu$, on utilise $\mathrm{P}(X \leq x) = 0{,}5 - \mathrm{P}(x \leq X \leq \mu)$.

Pour entrer les paramètres, il faut saisir les valeurs de μ et de σ (et non σ^2).

R	TEXAS(83Plus) et +	CASIO(35+) et +
répartition normale pré programmée pnorm(5800, mean = 6000, sd = 400, lower.tail = TRUE) ou pnorm(5800, 6000, 400) [1] 0.3085375 ou Complément pour l'enseignant : intégration numérique de la densité d'une loi normale de paramètres mu sigma. (-Inf signifie moins l'infini et Inf plus l'infini. $value signifie que l'on ne prend que la valeur numérique de l'objet résultat de la fonction integrate. La fonction gauss est la densité d'une loi de Gauss d'espérance mu et d'écart type sygma, g en est un cas particulier) gauss <- function(x, mu = moy, sigma = et){dnorm(x, mu, sigma)} moy <- 6000 ; et <- 400 integrate(gauss, -Inf, 5800)$value [1] 0.3085375	répartition normale pré programmée 0.5 - normalFRép(5800,6000,6000,400) 0.3085375 ou Complément pour l'enseignant : intégration numérique après changement de variable pour se ramener à la loi normale centrée réduite. intégrFonct(1/√(2Π)*e^(- t²/2), t,-5,(5800 - 6000)/400) 0.3085373	répartition normale pré programmée menu stat ► dist ► NORM ► Ncd ► Lower : 5800 ; Upper : 6000 σ : 400 ; μ : 6000. Normal C.D. prob = 0.19147 .5 - .19147 .30853 ou Complément pour l'enseignant : intégration numérique après changement de variable pour se ramener à la loi normale centrée réduite SET UP Integration : Simpson menu RUN ► OPTN ► CALC ► ∫dx(1/√(2Π)*e^(- x²/2), -5, (5800 - 6000)/400) 0.3085372

b) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an.

Solution : P($5900 < X < 6100$) ≈ 0,1974.

c) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres par an.

Solution : P($X > 6250$) ≈ 0,2660.

2° Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître :

a) la production maximale prévisible des 30% de vaches les moins productives du troupeau.

Il s'agit de déterminer la valeur x de X telle que P($X < x$) = 0,30.

Réponse : x ≈ 5790 litres de lait par an.

Certaines calculatrices et logiciels de calcul numérique proposent une fonction dédiée à ce type de calcul (qnorm() dans R pour normal quantile, FracNormale chez Texas pour fractiles de la loi normale, menu InN chez Casio pour loi normale «inverse».

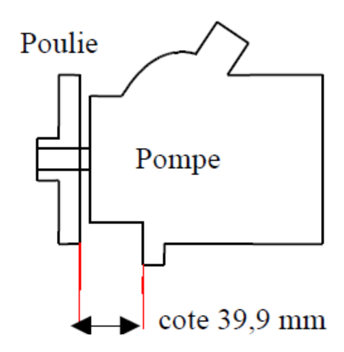
R répartition normale réciproque pré programmée qnorm(.30, 6000, 400) [1] 5790.24	TEXAS(83Plus) et + répartition normale réciproque pré programmée FracNormale(.30,6000,400) 5790.24	CASIO(35+) et + répartition normale réciproque pré programmée menu stat ► dist ► NORM ► InvN ► Area :.3 σ : 400 ; µ : 6000. Inverse Normal x = 5790.2

b) la production minimale prévisible des 20% des vaches les plus productives.

Il s'agit de déterminer la valeur x de X telle que $P(X > x) = 0{,}20$.

Réponse : $x \approx 6336$ litres de lait par an.

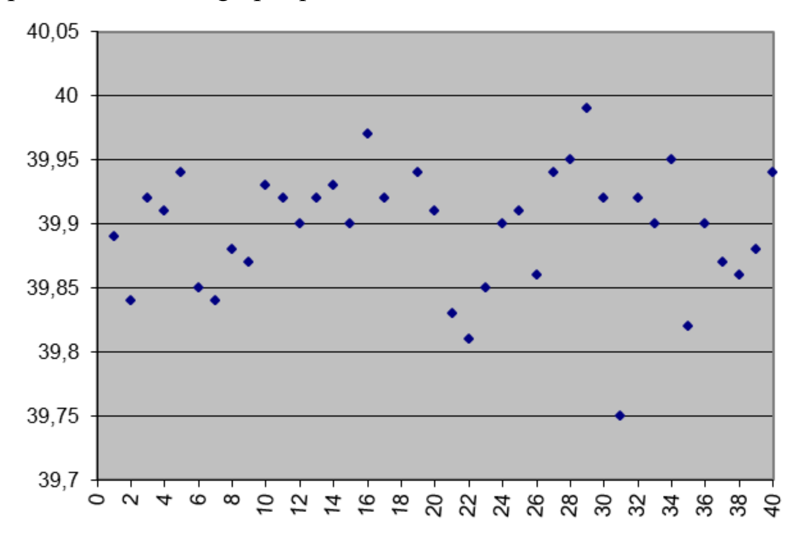
3. *Processus industriel*[8]



Le schéma ci-contre représente une pompe de direction assistée d'automobile. Le processus industriel étudié est une presse d'emmanchement de la poulie sur l'axe de la pompe. Les performances de la presse sont variables, cette variabilité ayant de nombreuses causes possibles : main d'œuvre, matériel, matière première.

Sur le schéma ci-contre est spécifiée par le constructeur une cote de 39,9 mm.

On a mesuré cette cote sur 40 ensembles poulie-pompe issus du processus de fabrication en série. Les variations sont représentées sur le graphique suivant :



1. Ce type de processus industriel induit la modélisation de la variable aléatoire « cote » par une variable suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$[9].

Donner par lecture graphique une valeur estimée[10] de l'espérance μ et de l'écart-type σ à partir de la série des 40 valeurs. (*Réponse* : *environ 39,9 et 0,05*)

---

[8] Cet exemple est emprunté à la brochure IREM n° 112: Enseigner la statistique au lycée.

[9] On peut vérifier la validité d'un tel modèle par des tests de normalité, mais c'est hors de propos ici.

2. L'intervalle de tolérance pour cette cote est de $39{,}9 \pm 0{,}15$.

Donner, à l'aide des 40 mesures effectuées, une valeur approchée de la probabilité que la variable cote soit dans cet intervalle. (*Réponse* : *environ 0,997*).

4. *Masse d'alerte pour cartes de contrôle*

Une coopérative produit du beurre en microplaquettes de 12,5g pour des collectivités et des chaînes hôtelières. Les microplaquettes sont conditionnées dans des boîtes de 40.

La masse des microplaquettes peut être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance $\mu = 12{,}5$ et de variance $\sigma^2 = 0{,}2^2$ et on admet que la variable aléatoire X égale à la masse d'une boîte de 40 microplaquettes suit alors une loi normale d'espérance $\mu = 500$ et de variance $\sigma^2 = 1{,}6$ (les notions relatives à la variance d'une somme de variables ne sont pas au programme, quelques notions sont abordées en annexe 2).

La boîte est jugée conforme si sa masse est comprise entre 496,2 g et 503,8 g (soit environ $500 \pm 3\sigma$).

1. Calculer la probabilité qu'une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme. (*Réponse :* 0,003 *à* 10^{-3} *près)*
2. Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ tels que $P(\mu - h < X < \mu + h) = 0{,}99$. Ces poids d'alerte sont inscrits sur une carte de contrôle et correspondent à une marge de sécurité en lien avec des normes de conformité.

   Calculer les poids d'alerte.

   Solution

   Notons $Z = \dfrac{X-500}{\sqrt{1{,}6}}$. Z suit une loi normale centrée réduite donc nous savons que $P(-2{,}58 < Z < 2{,}58) \approx 0{,}99$. Il ne reste plus, pour trouver $\mu - h$ et $\mu + h$, qu'à résoudre $\dfrac{\mu+h-500}{\sqrt{1{,}6}} = 2{,}58$ et $\dfrac{\mu-h-500}{\sqrt{1{,}6}} = -2{,}58$ ce qui donne $\mu + h \approx 503{,}3$ et $\mu - h \approx 496{,}7$.

Grâce à des échantillons prélevés en sortie de chaine ces masses d'alerte permettent de déceler des anomalies en temps réel.

5. *Réglage d'une machine d'embouteillage dans une coopérative*

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.

La législation impose qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles contenant moins d'un litre.

À quelle valeur de la moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette législation?

Solution

Il s'agit déterminer la valeur de μ telle que $P(X < 100) < 0{,}001$. On détermine d'abord la valeur z (on dit aussi quantile) de la loi normale centrée réduite, telle que $P(Z < z) = 0{,}001$. On trouve (logiciels ou calculettes) $z \approx -3{,}09$. Comme $Z = (X - \mu) / 2$, il ne reste plus, pour trouver μ, qu'à résoudre $-3{,}09 = (100 - \mu) / 2$. On trouve $\mu \approx 106{,}18$.

---

[10] Il existe des méthodes d'estimation par intervalle de confiance de ces paramètres, mais ici il s'agit simplement d'une valeur empirique.

R	TEXAS(83Plus) et +	CASIO(35+) et +
qnorm(p) est la fonction qui permet de trouver t tel que P(T<t)≈p, T étant de loi normale (c'est la répartition normale réciproque pré programmée) qnorm(.001) [1] -3.090232	FracNormale() est la fonction qui permet de trouver t tel que P(T<t)≈p, T étant de loi normale (c'est la répartition normale réciproque pré programmée) FracNormale(.001,0,1) -3.0902323	InvN est le menu qui permet de trouver t tel que P(T<t)≈p T étant de loi normale (c'est la répartition normale réciproque pré programmée) menu stat ► dist ► NORM ► InvN ► Area :.001 σ : 1 ; μ : 0. Inverse Normal x = -3.0902

2° La contenance des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage?

Solution : Avec $\mu \approx 106{,}18$, on obtient $P(X > 110) \approx 0{,}028$.

4° Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1% de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.

a) Quelle est alors la valeur de μ?

Solution

Il s'agit cette fois de déterminer μ tel que $P(X > 110) < 0{,}01$. On trouve $\mu \approx 105{,}34$.

b) Quelle est dans les conditions de la question a) la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre?

Solution

Avec cette valeur de μ , on obtient $P(X < 100) \approx 0{,}0038$, ce qui est plus élevé que dans le cas précédent.

c) Déterminer μ et σ afin qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles de moins d'un litre ET moins de 1% de bouteilles qui débordent.

Solution

On cherche donc à déterminer les valeurs de μ et de σ de sorte que :

$$P(X < 100) < 0{,}001 \quad \text{et} \quad P(X > 110) < 0{,}01.$$

Les deux contraintes sur les probabilités fournissent les deux conditions suivantes.

On détermine d'abord la valeur z_{sup} de la loi normale centrée réduite telle que $P(Z > z_{sup}) = 0{,}01$. On trouve (logiciels ou calculettes) $z_{sup} \approx 2{,}33$.

On détermine ensuite la valeur z_{inf} telle que $P(Z < z_{inf}) = 0{,}001$. On trouve $z_{inf} \approx -3{,}09$.

Les deux contraintes se traduisent donc par les deux inégalités suivantes :

$$\frac{110-\mu}{\sigma} \geq 2{,}33 \qquad \text{et} \qquad \frac{100-\mu}{\sigma} \leq -3{,}09 \ .$$

On obtient donc un domaine de solutions et une discussion pourra être menée quant aux choix pertinents que le directeur de coopérative pourrait faire.

6. *Durée de vie d'un appareil*

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?

2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

Solution

1. On note X la variable durée de vie. Les spécifications se traduisent par :

$P(120 \leq X \leq 200) = 0{,}8$ et $P(X < 120) = 0{,}05$.

En notant toujours $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ la variable centrée réduite, on obtient :

$P(\frac{120 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{200 - \mu}{\sigma}) = 0{,}8$ et $P(Z < \frac{120 - \mu}{\sigma}) = 0{,}05$

En utilisant logiciel ou calculatrice, on obtient : $\mu = 120 + 1{,}65\ \sigma$ et $\mu = 200 - 1{,}04\ \sigma$.

La résolution du système donne : $\mu \approx 169$ et $\sigma^2 \approx 884$.

2. $P\left(200 \leq X \leq 230\right) = P(X \leq 230) - P(X \leq 200) \approx 0{,}13$

IV. Intervalle de fluctuation

A. Cas binomial

Soit X une variable suivant une loi $\mathcal{B}(n, p)$ et α un réel dans l'intervalle]0, 1[.

Dans un cadre général, tout intervalle $[a,b]$ tel que : $P(X \in [a,b]) \geq 1-\alpha$ peut être considéré comme un intervalle de fluctuation de X au seuil $1-\alpha$.

Ainsi l'intervalle $[0,n]$ est un intervalle de fluctuation évident au seuil 1 mais il est de toute évidence sans intérêt.

On peut chercher :

- celui qui a l'amplitude minimale (IF1)
- le plus petit intervalle centré autour de l'espérance np comme dans le théorème de Moivre-Laplace (IF2)
- celui qui symétrise les probabilités que X soit à l'extérieur, comme proposé dans le document ressource de première (IF3)
- Dans le programme de seconde, on donne un intervalle de fluctuation approché au seuil 0,95, valable sous certaines conditions, de la variable fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$: $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ (IF4)

À titre d'exemple voici les intervalles obtenus pour $n = 100$ et $p = 0,3$ au seuil 0,95.

- IF (1) le plus petit : [22, 39] de probabilité 0,9502
- IF (2) centré sur 30 : [21, 39] de probabilité 0,9625
- IF(3) (première) : [21, 39] avec une probabilité inférieure à 0,025 que X soit à gauche et inférieure à 0,025 que X soit à droite de l'intervalle.
- IF(4) (seconde) : [20, 40] de probabilité 0,9710.

On peut vérifier que, pour une même valeur de p, ces différents intervalles sont de plus en plus proches lorsque n augmente.

B. Activité : recherche et utilisation d'un intervalle de fluctuation à l'aide d'un algorithme

Le responsable de la maintenance des machines à sous d'un casino doit vérifier qu'un certain type de machine est bien réglé sur une fréquence de succès de 0,06. Pour cela il veut établir un programme qui lui fournira, en fonction de n (nombre de coups joués) et de p (probabilité de succès), un intervalle de fluctuation, au seuil de 95%, de la fréquence de succès. Cela lui permettra de prendre la décision de régler chaque machine pour laquelle il aura observé, dans l'historique des jeux, une fréquence de succès se situant en dehors de cet intervalle de fluctuation.

1° Voici un exemple d'algorithme en Algobox et sa traduction dans le logiciel **R** permettant de déterminer l'intervalle de fluctuation d'une variable binomiale selon la méthode exposée dans le document ressource de première.

- On cherche le plus petit entier a pour lequel $P(X \leq a)$ est strictement supérieur à 0,025 et le plus petit entier b pour lequel $P(X \leq b)$ est supérieur ou égal à 0,975.
- Étant donné que a devient $a + 1$ en fin de « tant que », il faut faire afficher $a - 1$, et de même pour b.
- Avec Algobox, cet algorithme ne fonctionne que pour $n < 70$. Avec le logiciel **R** il n'y a pas cette limite. Le programme **R** fournit la proposition de décision en fonction de la valeur observée (kobs) du nombre de succès.

2° Lors du contrôle d'une machine, le technicien constate qu'elle a fourni 8 succès sur 65 jeux, soit une fréquence observée de succès d'environ 0,12. L'intervalle de fluctuation de la variable fréquence fourni par l'un des deux programmes précédents est [0,015 ; 0,123]. Bien que la fréquence observée de succès soit de 0,12, la règle de décision n'amène pas à remettre en question le réglage de la machine.

Si le même pourcentage de succès (0,12, kobs = 12) avait été observé sur 100 jeux, l'intervalle de fluctuation aurait été de [0,02 ; 0,11], ce qui aurait conduit à remettre en question le réglage de la machine. Le technicien aurait pris la décision de régler la machine.

Algorithme Algobox :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  Frep EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a PREND_LA_VALEUR 0
  b PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE n
  LIRE p
  Frep PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (Frep<=0.025) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    Frep PREND_LA_VALEUR 0
    POUR i ALLANT_DE 0 A a
      DEBUT_POUR
      Frep PREND_LA_VALEUR Frep+ALGOBOX_LOI_BINOMIALE(n,p,i)
      FIN_POUR
    a PREND_LA_VALEUR a+1
    FIN_TANT_QUE
  TANT_QUE (Frep<0.975) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    Frep PREND_LA_VALEUR 0
    POUR i ALLANT_DE 0 A b
      DEBUT_POUR
      Frep PREND_LA_VALEUR Frep+ALGOBOX_LOI_BINOMIALE(n,p,i)
      FIN_POUR
    b PREND_LA_VALEUR b+1
    FIN_TANT_QUE
  a PREND_LA_VALEUR a-1
  AFFICHER a
  b PREND_LA_VALEUR b-1
  AFFICHER b
FIN_ALGORITHME
```

Fontion R :

```
# IF binomial doc. ressour. 1ère : IF symétrique
(équilibré) en proba
# n est la taille de l'échantillon, p est la
probabilité de succès
# kobs est le nombre de succès observé dans
l'échantillon
# proba est le seuil de probabilité de l'intervalle
de fluctuation
# a est le plus petit entier tel que P(X <= a) >
0,025
# b est le plus petit entier tel que P(X <= b) >=
0,975
IFexact2 = function(n = 65, p = .06, kobs = 8, proba
= .95){
 a <- 0 ; b <- 0
 reparti1 <- pbinom(0:n, n, p, lower.tail = T)
 names(reparti1) <- 0:n
 pinf <- 0
 while(pinf <= (1 - proba) / 2){
   pinf <- pbinom(a, n, p, lower.tail = T)
   a <- a + 1             }
 pinf <- 0
 while(pinf < (1 - (1 - proba) / 2)){
   pinf <- pbinom(b, n, p, lower.tail = T)
   b <- b + 1                 }
 probaab <- sum(dbinom((a - 1):(b - 1), n, p))
 if(kobs >= (a - 1) & kobs <= (b - 1)) {
   hypothese <- "ACCEPTÉE"             } else
{hypothese <-"REFUSÉE"}
#*******Affichage des résultats et des
graphiques*******
 cat("\nL'IF exact des comptages symétrique en proba
est :\n[",
   a - 1,",",b - 1,"] de probabilité :", probaab,
   "\n\nL'IF exact des proportions symétrique en
proba est :\n[",
   (a - 1) / n,",",(b - 1) / n,"]\n\n",
   "Hypothèse p théorique = ", p,
   ": confrontée à f observé =",kobs / n, " : ",
hypothese,"\n")
}

#----------Application et résultats:----
IFexact2(n = 50, p = 1/2, kobs = 19)
IFexact2(n = 65, p = .06, kobs = 8)
L'IF exact des comptages symétrique en proba
est :
[ 1 , 8 ] de probabilité : 0.9668145
L'IF exact des proportions symétrique en proba
est :
[ 0.01538462 , 0.1230769 ]
 Hypothèse p théorique =  0.06 : confrontée à
f observé = 0.1230769  :  ACCEPTÉE
```

Document associé : intervalle de fluctuation première.alg

Le théorème de Moivre-Laplace va permettre de donner un intervalle de fluctuation calculable directement, sous réserve que n soit assez grand. Comme il est obtenu grâce à une convergence, on le qualifie d'intervalle de fluctuation *asymptotique*.

C. Intervalle de fluctuation asymptotique

Théorème

Si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec p dans l'intervalle]0, 1[, alors pour tout réel α dans l'intervalle]0, 1[on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha \text{ , où } I_n \text{ désigne l'intervalle} \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

et u_α désigne l'unique réel tel que $\mathrm{P}(-u_\alpha \le Z \le u_\alpha) = 1 - \alpha$ où Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration (exigible en terminale S**)**

D'après le théorème de Moivre-Laplace, on a $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(-u_\alpha \le Z_n \le u_\alpha) = \mathrm{P}(-u_\alpha \le Z \le u_\alpha)$

où $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Or : $\mathrm{P}(-u_\alpha \le Z_n \le u_\alpha) = \mathrm{P}\left(np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \le X_n \le np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}\right)$

$$= \mathrm{P}\left(p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le \frac{X_n}{n} \le p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right).$$

Application

Quand on sait qu'une suite converge vers une limite L, on peut considérer que pour n assez grand le terme de rang n constitue une approximation de L.

Ici, on inverse les rôles. On connaît la limite, mais pas les valeurs des termes de la suite. On admet donc que, sous certaines conditions, on peut approcher le terme de rang n de la suite $\mathrm{P}\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right)$ par sa limite $1 - \alpha$.

Ces conditions communément admises pour pratiquer l'approximation sont :

$n \ge 30, \quad np \ge 5, \quad n(1-p) \ge 5$.

L'intervalle $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de fluctuation « approché » de la variable fréquence $\frac{X_n}{n}$ au seuil $1 - \alpha$.

La suite de terme général $\mathrm{P}(\frac{X_n}{n} \in I_n)$ n'étant pas monotone, on ne peut pas savoir si la probabilité de l'intervalle est supérieure ou inférieure à la limite $1 - \alpha$ (cf note[11]). Cette situation peut être illustrée à l'aide d'un tableur ou du logiciel **R**. Voici un exemple dans le cas où $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 0{,}05$. Pour les valeurs de n entre 0 et 2000, on calcule la probabilité que la variable $\frac{X_n}{n}$ appartienne à l'intervalle I_n .

[11] Dans la pratique on parle de seuil $1-\alpha$, les écarts par rapport à cette limite étant minimes (voir fig 10).

On peut constater que le nuage de points obtenu a un aspect symétrique autour de la droite d'équation $y = 0{,}95$ et que lorsque n est grand les points se rapprochent de cette droite.

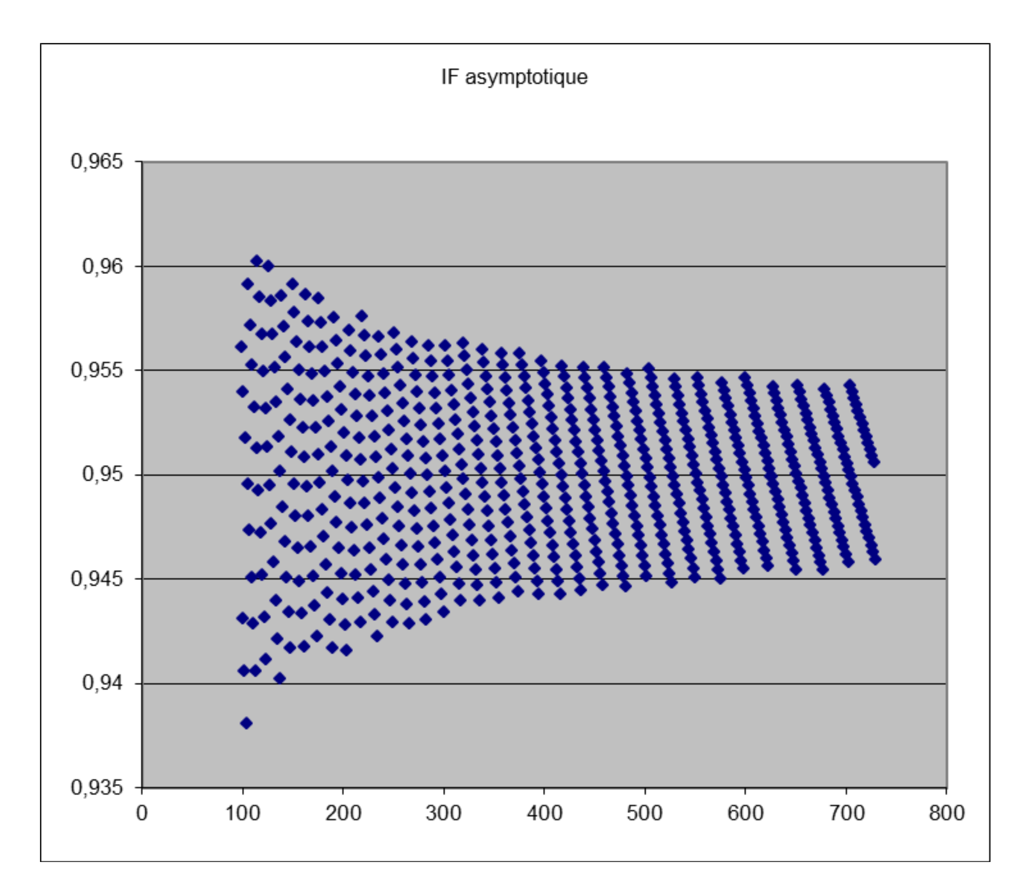


Figure 9: visualisation de la probabilité $\mathrm{P}(\frac{X_n}{n} \in I_n)$

Lien vers : exploration intervalle de fluctuation asymptotique.xls

Définition

> Un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $F_n = \frac{X_n}{n}$ au seuil $1-\alpha$ est un intervalle déterminé à partir de p et de n et qui contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de $1-\alpha$ que n est grand. L'intervalle I_n du théorème précédent est donc un intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil $1-\alpha$.

Seul l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est au programme des classes de terminale autre que la terminale S ; c'est celui qui est mis en œuvre dans l'exemple 1 ci-dessous.

Remarque

Quand $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$, il est courant de faire les calculs impliquant une variable binomiale en la remplaçant par une variable suivant une loi normale de mêmes espérance et variance.

Seul le programme de STI2D-STL mentionne cette pratique, qui ne doit donc pas être mise en œuvre dans les autres filières où tous les calculs de probabilités se font à la calculatrice en utilisant la loi exacte (au programme), quelle qu'elle soit.

Les calculs d'intervalles de fluctuation et d'intervalles de confiance se font avec les formules données dans le programme.

D. Exemples d'utilisation

Dans les exemples qui suivent, les tirages sont effectués sans remise. Toutefois, la taille des échantillons considérés étant faible par rapport à la taille de la population totale, on apparente les tirages à des tirages avec remise, correspondant alors à un schéma de Bernoulli et permettant d'appliquer les résultats théoriques précédents.

1. *Prise de décision*

On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13%.
Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthme et en informe les services sanitaires. Ceux–ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d'asthme.
Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.

La règle de décision prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100. (*solution* : [0,06 ; 0,20])

2) L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?

Solution : la valeur 0,19 est à l'intérieur de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%, On en conclut que la règle de décision choisie ne prévoit pas de réaliser une enquête supplémentaire.

3) Le médecin n'est pas convaincu par cette conclusion et déclare que le nombre de personnes interrogées était insuffisant pour mettre en évidence qu'il y avait plus de jeunes ayant eu des crises d'asthme que dans le reste du département.
Combien faudrait-il prendre de sujets pour qu'une proportion observée de 19% soit en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique ?

Solution : il faut et il suffit que la borne supérieure de l'intervalle asymptotique de fluctuation soit inférieure à 0,19 ce qui équivaut à $0,13+1,96\times\frac{\sqrt{0,13\times 0,87}}{\sqrt{n}}<0,19$, soit $n>120$.

La taille doit donc être de 121 sujets au minimum si on souhaite mettre en évidence une proportion anormalement élevée dans la ville étudiée.

4) Représenter graphiquement la taille de l'échantillon nécessaire en fonction de la valeur *p*sup de la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

Solution

L'expression de *n* en fonction de *p* sup est $n=\frac{1,96^2\times 0,13\times 0,87}{(p\,\text{sup}-0,13)^2}$.

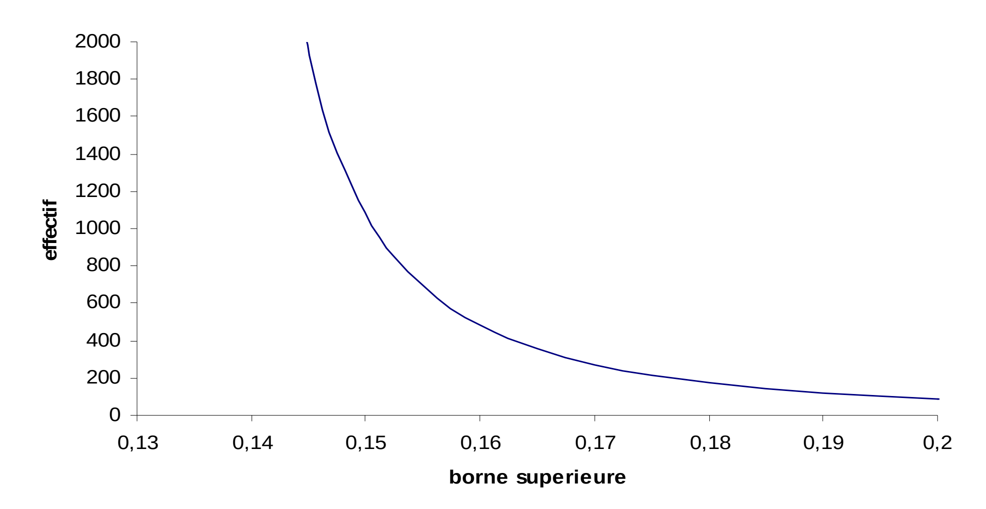


Figure 10 : Représentation de la taille nécessaire en fonction de la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique

2. *Problème de la surréservation (surbooking)*

Une compagnie aérienne possède des A340 (longs courriers) d'une capacité de 300 places.

Cette compagnie a vendu n billets pour le vol 2012.

La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est p et les comportements des acheteurs sont indépendants les uns des autres.

On note X_n la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement.

La compagnie cherche à optimiser le remplissage de l'avion en vendant éventuellement plus de places que la capacité totale de l'avion (surréservation ou surbooking) soit ici $n > 300$.

Comme il y a évidemment un risque que le nombre de passagers munis d'un billet se présentant à l'embarquement excède 300, la compagnie veut maîtriser ce risque.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. On suppose que $0,5 \leq p \leq 0,95$. Écrire l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n de $\frac{X_n}{n}$ au seuil de 0,95.
3. Montrer que si $I_n \subset \left[0, \frac{300}{n}\right]$ alors la probabilité que le nombre de passagers se présentant à l'embarquement excède 300 est proche de 0,05.
4. On cherche à déterminer la valeur de n maximale permettant de satisfaire la condition de l'inclusion $I_n \subset \left[0, \frac{300}{n}\right]$.

   a. Montrer que $I_n \subset \left[0, \frac{300}{n}\right] \Rightarrow pn + 1,96\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)} - 300 \leq 0$.

   b. On pose $f(x) = px + 1,96\sqrt{x}\sqrt{p(1-p)} - 300$.

   Montrer qu'il existe un entier n_0 unique tel que si $n \leq n_0$ alors $f(n) \leq 0$ et si $n > n_0$ alors $f(n) > 0$.

   c. Tracer la courbe représentative de f pour les valeurs $p = 0,85$; $p = 0,9$; $p = 0,95$.

   d. Déterminer à la calculatrice les valeurs de n_0 pour $p = 0,85$; $p = 0,9$; $p = 0,95$.

Solution

1. X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.
2. Comme $n > 300$ et $0,5 \leq p \leq 0,95$ on a $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 :
$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$
3. Si $I_n \subset \left[0, \frac{300}{n}\right]$ alors $\mathrm{P}\left(X_n > 300\right) \leq \mathrm{P}\left(\frac{X_n}{n} \notin I_n\right)$.

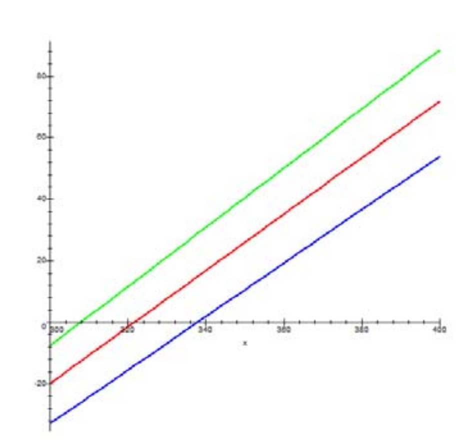
   Comme $\mathrm{P}\left(\frac{X_n}{n} \notin I_n\right) \approx 0,05$ alors on peut dire que $\mathrm{P}\left(X_n > 300\right)$ est proche également de 0,05 voire inférieur (l'événement $(X_n > 300)$ étant inclus dans la partie droite du complémentaire de I_n on pourrait vérifier avec le tableur que sa probabilité est en fait inférieure à 0,05 pour $n \geq 300$ et $0,5 \leq p \leq 0,95$).

4. a. $I_n \subset \left[0, \frac{300}{n}\right] \Rightarrow p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{300}{n} \Rightarrow np + 1,96\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)} - 300 \leq 0$

   b. En posant $y = \sqrt{x}$, on se ramène à une inéquation du second degré que l'on résout pour $x \geq 300$.

   Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ sont donc les réels de l'intervalle $[300, x_0]$ où
$$x_0 = \left(\frac{-1,96\sqrt{p(1-p)} + \sqrt{1200p + 1,96^2 p(1-p)}}{2p} \right)^2.$$
   L'entier n_0 cherché est la partie entière de x_0.

   c. $p = 0,85$ en bleu, $p = 0,9$ en rouge, $p = 0,95$ en vert.



   d. Pour p =0,85 on trouve $n_0 = 337$,
   Pour p = 0,9 on trouve $n_0 = 321$,
   Pour p = 0,95 on trouve $n_0 = 307$.

3. *Echantillon représentatif d'une population pour un sondage*

La première partie de l'activité proposée page 29 peut être traitée dans ce cadre.

En vue de conduire une enquête sur certaines caractéristiques physiologiques d'une population, un échantillon de personnes a été sélectionné et on souhaite en conforter la représentativité.

E. Intervalle de fluctuation simplifie donné en seconde

On reprend les notations du paragraphe C. Dans le cas où $\alpha = 0{,}05$, on a $u_\alpha \approx 1{,}96$.

La fonction $p \mapsto p(1-p)$ admet un maximum pour $p = \frac{1}{2}$ égal à $\frac{1}{4}$.

On peut donc majorer $u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ par $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

On en déduit que l'intervalle $J_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ (approximation de l'intervalle I_n liée à l'approximation de $u_{0,05}$ par 1,96) est inclus dans l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ et donc on a :

$$\mathrm{P}(\frac{X_n}{n} \in J_n) \leq \mathrm{P}(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}})$$

Cette inégalité prouve que l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique à un seuil au moins égal à celui de l'intervalle J_n (proche de 0,95) et justifie le résultat énoncé en seconde sous une forme simplifiée, ne prenant pas en compte le caractère asymptotique.

Compte tenu du caractère asymptotique de l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, il serait inexact d'affirmer que la probabilité que la variable aléatoire $\frac{X_n}{n}$ prenne ses valeurs dans cet intervalle est supérieure à 0,95 pour toute valeur de *n,* même lorsque les conditions usuelles d'approximation sont vérifiées. Ce point a déjà été clairement explicité dans le document ressource de la classe de première. Nous le reprenons ici.

On peut visualiser ci-dessous les valeurs des probabilités $\mathrm{P}(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}})$ suivant les valeurs de p et de n et constater que le résultat énoncé en classe de seconde, s'il n'est pas tout à fait exact, fournit néanmoins en général une probabilité très proche de 0,95, ce qui justifie son utilisation dans la pratique.

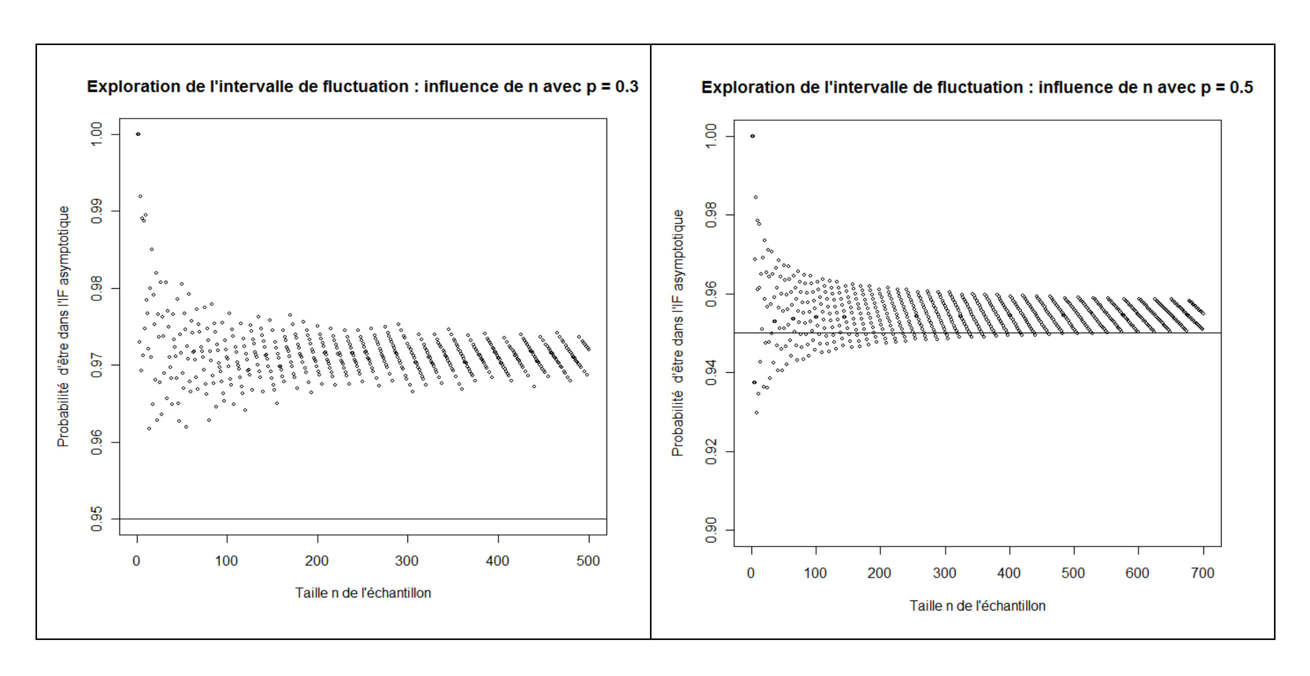


Figure 11 : Visualisation des probabilités de l'intervalle de fluctuation de seconde pour *p* = 0,3 (figure de gauche) et *p* = 0,5 (figure de droite).

Document associé : intervalle de fluctuation seconde.r

On peut constater que :

pour p =0,3 $\quad \mathrm{P}(p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p+\frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 0{,}95$ semble vérifiée pour tout entier n,

pour p =0,5 $\quad \mathrm{P}(p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p+\frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 0{,}95$ semble être vérifiée pour tout entier $n \geq 600$.

Cela conduit au résultat suivant :

Théorème

Si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ alors, pour tout p dans]0, 1[, il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $\mathrm{P}(p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p+\frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 0{,}95$.

◙Démonstration

Pour une variable binomiale X_n de paramètres n et p, le théorème de Moivre-Laplace prouve que, en notant Z_n la variable centrée réduite associée à X_n, la limite de $a_n = \mathrm{P}(-2 \leq Z_n \leq 2)$ est égale à $2P(Z \leq 2)-1$ où Z suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Or on a $L = 2P(Z \leq 2)-1 \geq 0{,}9544$.

Donc, pour $\varepsilon < 0{,}004$, si on considère l'intervalle ouvert $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ contenant L, il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$, on a : $a_n \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ donc $a_n \geq 0{,}95$ puisque $L-\varepsilon \geq 0{,}9504$.

Or $a_n = \mathrm{P}\left(p-\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{X_n}{n} \leq p+\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}\right)$ ce qui donne, en majorant $p(1-p)$ par 1/4, un intervalle de fluctuation plus large donc de probabilité supérieure ou égale à a_n.

Donc pour tout entier $n \geq n_0$, on a : $\mathrm{P}\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$.

Exemple d'activité

Selon la valeur de p, la valeur de n_0 peut varier considérablement.

Il est d'ailleurs difficile de déterminer avec certitude cette valeur de n_0. On peut cependant donner des valeurs de n_0 grâce à un algorithme de calcul.

P	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,4	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,5
n_0	31	30	36	64	56	81	90	120	143	209	271	288	304	399	399	529

On peut remarquer que la plus grande valeur de n_0 est atteinte pour $p = 1/2$. C'est effectivement pour cette valeur que la fluctuation est la plus importante puisque la variance est maximale pour cette valeur de p.

Algorithme Algobox :

Remarque : Cet algorithme ne permet d'obtenir n_0 que pour des valeurs de p entre 0 et 0,39 car Algobox ne calcule pas de valeurs avec la loi binomiale pour des valeurs de n supérieures à 70. Or pour $p \geq 0,4$ la valeur de n_0 est supérieure à 80. Pour le cas général il faut utiliser les logiciels **R** ou Scilab par exemple.

Document associé : recherche du n0.alg

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  Inf EST_DU_TYPE NOMBRE
  Sup EST_DU_TYPE NOMBRE
  Finf EST_DU_TYPE NOMBRE
  Fsup EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  j EST_DU_TYPE NOMBRE
  n0 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  n PREND_LA_VALEUR 69
  Finf PREND_LA_VALEUR 0
  Fsup PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (Fsup-Finf>=0.95) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    Inf PREND_LA_VALEUR floor(n*p-sqrt(n))
    Sup PREND_LA_VALEUR floor(n*p+sqrt(n))
    Finf PREND_LA_VALEUR 0
    Fsup PREND_LA_VALEUR 0
    POUR i ALLANT_DE 0 A Inf
      DEBUT_POUR
      Finf PREND_LA_VALEUR Finf+ALGOBOX_LOI_BINOMIALE(n,p,i)
      FIN_POUR
    POUR j ALLANT_DE 0 A Sup
      DEBUT_POUR
      Fsup PREND_LA_VALEUR Fsup+ALGOBOX_LOI_BINOMIALE(n,p,j)
      FIN_POUR
    n PREND_LA_VALEUR n-1
    FIN_TANT_QUE
  n0 PREND_LA_VALEUR n+2
  AFFICHER n0
FIN_ALGORITHME
```

Programme SCILAB :

Remarque : La ligne 12 enlève 1 à la première valeur de n pour laquelle Fsup – Finf < 0,95. Or, on cherche la plus petite valeur de n_0 à partir de laquelle FSup-Finf$\geq$95 donc on doit faire afficher n+2.

Document associé : recherche du n0.sce

```
1
2  p=input("p=");
3  n=1000;
4
5  Finf=0;
6  Fsup=1;
7  while Fsup-Finf>=0.95
8    inf=floor(n*p-sqrt(n));
9    sup=floor(n*p+sqrt(n));
10   Fsup=cdfbin("PQ",sup,n,p,1-p);
11   Finf=cdfbin("PQ",inf,n,p,1-p);
12   n=n-1;
13 end
14 disp(n+2);
15
```

Exemples d'exercices

1. Les enfants sont dits prématurés lorsque la durée gestationnelle est inférieure ou égale à 259 jours. La proportion de ces naissances est de 6%. Des chercheurs suggèrent que les femmes ayant eu un travail pénible pendant leur grossesse sont plus susceptibles d'avoir un enfant prématuré que les autres. Il est décidé de réaliser une enquête auprès d'un échantillon aléatoire de 400 naissances correspondant à des femmes ayant eu pendant leur grossesse un travail pénible. Les chercheurs décident a priori que si la proportion d'enfants nés prématurés dans cet échantillon est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 alors leur hypothèse sera acceptée. Finalement le nombre d'enfants prématurés est de 50. Quelle est donc la conclusion ?

Solution : Sous l'hypothèse que la proportion de prématurés dans l'échantillon est la même que dans la population générale, on détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.

$$\left[0,06-1,96\times\frac{\sqrt{0,06\times0,94}}{\sqrt{400}};0,06+1,96\times\frac{\sqrt{0,06\times0,94}}{\sqrt{400}}\right]=[0,037;0,083]$$

On calcule la valeur observée de proportion de prématurés dans l'échantillon et on obtient 0,125. Cette valeur n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%, donc avec la règle de décision choisie, on rejette l'hypothèse posée. Les chercheurs concluent donc que la proportion d'enfants prématurés est plus élevée chez les femmes ayant eu un travail pénible pendant leur grossesse.

2. 1) Vérifier que l'intervalle [–2,576 , 1,696] peut être considéré comme un intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une variable X suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ (c'est-à-dire que $P(X \in I) \geq 0{,}95$).

2) Montrer qu'il existe une valeur a minimale telle que l'intervalle $[-a, a]$ soit un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de X. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3) Montrer qu'il existe un unique réel b tel que $P(-2 \leq X \leq -2+b) = 0{,}95$.

Prouver que $b < a+2$ où a est la valeur de la question 2).

Déterminer une valeur approchée de b à 10^{-2} près.

4) Montrer qu'il n'existe aucun réel c tel que $P(-1 \leq X \leq -1+c) = 0{,}95$.

Solution

1. Avec une calculatrice : $P(-2{,}576 \leq X \leq 1{,}696) \approx 0{,}95006 > 0{,}95$

2. $P(-a \leq X \leq a) = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = F(a)$

On étudie la fonction F. Sa dérivée est $F'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$

Donc F est strictement croissante de $[0,+\infty[$ vers $[0,1[$. Il existe donc un réel a unique tel que $F(a) = 0{,}95$.

D'après ce qui a déjà été vu, a vaut environ 1,96.

3. $P(-2 \leq X \leq -2+x) = \int_{-2}^{-2+x} f(t)\mathrm{d}t = H(x)$.

Cette fonction est strictement croissante car sa dérivée est égale à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$.

Comme $H(4) = \int_{-2}^{2} f(t)\mathrm{d}t > F(1{,}96)$, il existe b unique tel que $H(b) = 0{,}95$.

On a $0{,}95 = H(b) = \int_{-2}^{-a} f(t)\mathrm{d}t + 0{,}95 + \int_{a}^{-2+b} f(t)\mathrm{d}t$ donc $\int_{a}^{-2+b} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{-2}^{-a} f(t)\mathrm{d}t < 0$ donc $a > -2+b$.

A l'aide de la calculatrice, en utilisant la fonction qui à x fait correspondre $P(-2 \leq X \leq -2+x)$, on trouve $3{,}92 < b < 3{,}93$.

On peut vérifier que l'intervalle $[-a, a]$ est plus court que l'intervalle $[-2, -2+b]$.

4. $\int_{-1}^{-1+c} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{-1+c} f(t)\mathrm{d}t < \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}$.

Or $\int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t < 0{,}35$ donc $\int_{-1}^{-1+c} f(t)\mathrm{d}t < 0{,}85$ pour tout c.

Remarque

On peut démontrer plus généralement que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% centré en 0 est celui d'amplitude minimale.

V. Intervalle de confiance

A. Introduction

Il est souvent difficile pour des raisons à la fois financières et logistiques de pouvoir recueillir des données sur la population toute entière. Le plus souvent, on se contente de travailler sur un échantillon, c'est à dire une fraction ou sous-ensemble de cette population. Ceci présente bien sûr des avantages en termes de faisabilité et de coût, mais impose des contraintes pour que l'information recueillie au niveau de l'échantillon (estimation) soit la plus proche possible de celle de la population entière (paramètre). La démarche pratique est donc la suivante :

- on sélectionne un échantillon de la population que l'on étudie, on appelle cela l'échantillonnage.
- On vérifie, selon les cas, à partir d'intervalles de fluctuation que l'échantillon ainsi obtenu est « représentatif » de la population pour des critères qui sont connus dans la population.

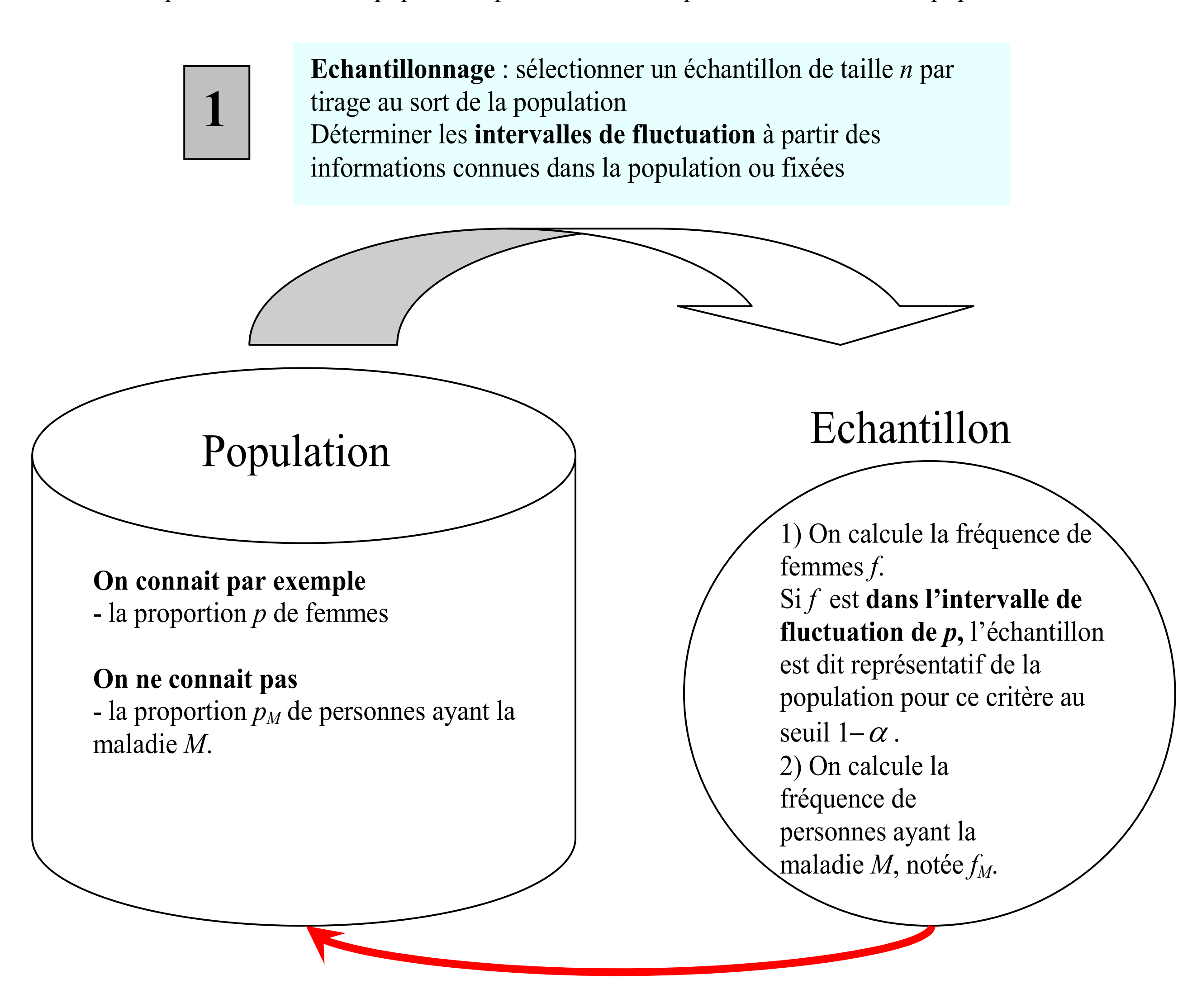


Figure 13 : Principe de l'échantillonnage

La notion d'échantillon représentatif est une question délicate, en particulier lorsqu'elle concerne des personnes dans le cadre d'un sondage. Elle l'est clairement moins lorsqu'il s'agit d'un échantillon de pièces dans une chaine de fabrication. Cette notion d'échantillon représentatif est évoquée ici afin de contextualiser un peu l'activité mais ne constitue en aucun cas un objectif du programme.

Il convient également de souligner que, dans les sondages, les tirages sont pour la plupart effectués sans remise mais peuvent s'apparenter à des tirages avec remise dès que la taille de l'échantillon est petite devant la taille de la population totale, ce qui est le cas dans les sondages classiques.

On peut d'ailleurs observer que dans le cas contraire, l'intérêt de ne questionner qu'un échantillon diminue.

L'activité qui suit propose une situation de sondage simplifiée qui ne correspond pas exactement aux techniques réelles de sondage. Quelques compléments d'informations sur les techniques de sondage et les questions qu'elles soulèvent figurent en annexe 3, à titre informatif.

Activité

On souhaite estimer la prévalence du surpoids dans une ville V, c'est-à-dire la proportion de personnes ayant une masse trop importante par rapport à leur taille. Pour cela 460 personnes ont été sélectionnées de manière aléatoire à partir de la liste des logements connue par la municipalité, c'est-à-dire que le fait d'avoir été sélectionné pour participer à l'étude est uniquement dû au hasard. On admet que cette procédure permet d'assimiler la sélection des personnes interrogées à un schéma de Bernoulli.

Un enquêteur s'est déplacé au sein de chaque logement après avoir convenu d'un rendez-vous afin de recueillir les informations nécessaires à l'enquête.

1° Dans un premier temps, l'enquêteur va s'assurer que l'échantillon est représentatif de la population qu'on étudie sur des informations qu'on peut vérifier et qui sont en lien avec le critère étudié. Dans le cas présent on peut connaître par exemple la proportion d'hommes et de femmes dans la population de la ville, ainsi que la répartition selon l'âge en demandant à la municipalité qui se référera aux informations du recensement. Parallèlement on peut comptabiliser le nombre d'hommes et de femmes dans l'échantillon ainsi que la répartition selon l'âge.

	Homme	Femme	Total
Echantillon	200	260	460

	< 60 ans	> 60 ans	Total
Echantillon	352	108	460

On sait que, dans la population, il y a 46% d'hommes et 20% de personnes de plus de 60 ans.

a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 de la variable aléatoire « proportion de femmes » dans un échantillon aléatoire de taille 460 sélectionné au sein de la population de cette ville.
b) Calculer la proportion de femmes dans l'échantillon et vérifier si cette valeur appartient à l'intervalle de fluctuation.
c) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 de la variable aléatoire « proportion de personnes âgées de plus de 60 ans » dans un échantillon aléatoire de taille 460 sélectionné au sein de la population de cette ville.
d) Calculer la proportion de personnes de plus de 60 ans dans l'échantillon et vérifier si cette valeur appartient à l'intervalle de fluctuation.
e) Si pour chacune des variables, genre et âge, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% contient la valeur de l'échantillon on considère que l'échantillon est représentatif de la population pour cette information. Quelle est donc la conclusion pour le cas étudié ici ?

2° La première étape de ce travail a donc été de sélectionner un échantillon qui soit accepté comme « représentatif » de la population. Ainsi les informations qui seront obtenues à partir de cet échantillon seront généralisables, avec un certain nombre de précautions, à l'ensemble de la population dont il est extrait. Dans le cas de l'étude présentée ici, on souhaite estimer la proportion de personnes en surpoids ; pour cela il est tout d'abord important de définir le surpoids. La définition du surpoids donnée par l'OMS (Organisation Mondiale de la Santé) est la suivante : une personne est considérée en surpoids si son IMC (Indice de masse corporelle) est supérieur à 25. L'IMC se calcule de la manière suivante : masse en kg/(taille en m)².

La proportion de personnes en surpoids dans l'échantillon étudié est de 29,5%. Comme il s'agit d'un calcul réalisé à partir des données d'un échantillon on sait que cette valeur ne correspond pas exactement à la valeur de la prévalence dans la population, car si nous avions pris un autre échantillon nous aurions obtenu une autre valeur. Pour cette raison il est nécessaire de communiquer un intervalle qui sera obtenu à partir des informations observées et pour lequel on puisse dire avec un « niveau de confiance » supérieur à 0,95 qu'il contient la vraie valeur de la prévalence du surpoids dans la ville. Si f est la fréquence observée dans l'échantillon une expression de cet intervalle, qui sera appelé intervalle de confiance, est $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où n est la taille de l'échantillon. Ce résultat, évoqué en classe de seconde, prend tout son sens en terminale et est démontré en terminale S.

Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95%.

Solution :

1° a) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est déterminé par :

$$\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \approx [0{,}49 ; 0{,}59].$$

b) La proportion de femmes dans l'échantillon est égale à 56,5%, cette valeur appartient à l'intervalle de fluctuation calculé ci-dessus.

c) On obtient avec un calcul analogue à celui de la question a) l'intervalle $[0{,}16 ; 0{,}24]$

d) La proportion de plus de 60 ans dans l'échantillon est égale à 23,4%, cette valeur appartient à l'intervalle de fluctuation calculée ci-dessus.

e) On considère que l'échantillon observé est représentatif de la population pour les deux critères retenus (genre et âge).

La représentativité sur deux critères ne signifie évidemment pas la représentativité sur tous les critères et dans tous les cas, il est peu vraisemblable qu'un échantillon de 460 sujets soit représentatif pour tous les critères. Les résultats obtenus sur un échantillon ne peuvent pas remplacer les résultats exacts d'un recensement. Cependant la vérification précédente sur des critères importants permet de considérer que l'échantillon retenu est structuré comme la population étudiée, au regard de certains critères.

2° L'intervalle de confiance calculé au niveau de confiance de 95% est donc :

$$\left[0{,}295-\frac{1}{\sqrt{460}} ; 0{,}295+\frac{1}{\sqrt{460}}\right] \approx [0{,}25 ; 0{,}34]$$

Cet intervalle fournit une estimation par intervalle de la prévalence du surpoids dans la ville étudiée.

B. Principe général de l'intervalle de confiance

Étant donné un paramètre p, ici une proportion inconnue, d'une population, la procédure d'estimation consiste à utiliser les informations recueillies dans un échantillon sélectionné de manière aléatoire pour obtenir une valeur de la variable aléatoire fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$ destinée à fournir une estimation de p. Mais on sait que cette estimation va varier d'un échantillon à l'autre, de par la **fluctuation d'échantillonnage,** autour de p. Il est donc nécessaire d'apprécier l'incertitude en fournissant une estimation par intervalle, appelé **intervalle de confiance de *p***. Cet intervalle est obtenu en fonction d'un coefficient lié au niveau de confiance que l'on accorde à cette estimation.

Lorsque $n \geq 30$ et $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, la formule $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ fournit un intervalle de fluctuation de $F_n = \frac{X_n}{n}$ au seuil 0,95.

Supposons que p soit inconnu . On peut approcher p par la proportion f obtenue par les données de l'échantillon et déterminer un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95.

Selon le théorème du paragraphe IV-C, on sait que, pour n suffisamment grand, on a :

$$\mathrm{P}\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95 .$$

Comme $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$ équivaut à $F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$, on peut également écrire $\mathrm{P}\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$, ce qui peut se traduire en disant que :

l'intervalle aléatoire $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ a une probabilité au moins égale à 0,95 de contenir p.

À partir de l'intervalle aléatoire $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ on obtient, en effectuant le tirage d'un échantillon, une *réalisation* de cet intervalle qui fournit alors un intervalle numérique de la forme $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Si l'on fait un très grand nombre de tirages, on sait que théoriquement on devrait[12] avoir pour au plus 5% d'entre eux des intervalles ne contenant pas la proportion inconnue p.

C. Définition

Un intervalle de confiance pour une proportion p à un niveau de confiance $1-\alpha$ est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\alpha$. Cet intervalle aléatoire est déterminé à partir de la variable aléatoire $F_n = \frac{X_n}{n}$ qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence.

Le cas particulier où $1-\alpha = 0{,}95$ est le seul au programme.

[12] Il s'agit toujours d'un nombre fini de réalisations et il peut y avoir plus de 5% d'entre elles qui ne contiennent pas p.

***Remarque* 1**

En réalisant le tirage d'un échantillon, on obtient un intervalle de confiance de la forme $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ de la proportion inconnue p à un niveau de confiance de 0,95.

Ainsi, à chaque tirage d'un échantillon, on obtient un intervalle de confiance différent.

***Remarque* 2**

Un intervalle de confiance étant un intervalle numérique, il est incorrect de conclure la détermination d'un intervalle de confiance par une phrase du type « p a une probabilité de 0,95 d'être entre $f-\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $f+\frac{1}{\sqrt{n}}$ » car il n'y a plus d'aléatoire à ce stade. Il est en revanche convenable d'écrire :

« L'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de la proportion inconnue p au niveau de confiance 0,95 ».

D. Intervalle de fluctuation ou intervalle de confiance : lequel utiliser ?

Règle générale

On utilise un intervalle de fluctuation lorsque la proportion p dans la population est **connue ou si l'on fait une hypothèse sur sa valeur.**

On utilise un intervalle de confiance lorsque l'on veut estimer une proportion **inconnue** dans une population.

***Exemple* 1**

Test de conformité d'une proportion : on veut déterminer si la proportion observée dans un échantillon est conforme à une valeur de référence connue dans la population.

Sous l'hypothèse que l'échantillon est issu d'un tirage aléatoire correspondant à un schéma de Bernoulli (tirage avec remise ou s'y apparentant), la variable fréquence F_n appartient à un intervalle de fluctuation avec une probabilité déterminée.

En fonction de l'appartenance ou non de la fréquence observée à cet intervalle, on peut prendre une *décision* concernant la conformité de l'échantillon.

Si les conditions d'utilisation sont réunies, on détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique, sinon on a recours à un intervalle de fluctuation calculé avec la loi binomiale.

***Exemple* 2**

Estimation d'une proportion inconnue p grâce à un échantillon aléatoire

On se place dans le cas où l'échantillon comporte au moins 30 éléments afin de pouvoir utiliser l'intervalle de confiance au programme.

Si la fréquence observée f est telle que $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$, on considère qu'on peut conclure qu'un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 est $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Le tableau suivant récapitule ce qui est au programme de chaque classe du lycée.

	Intervalle de fluctuation ***p connue***	**Intervalle de confiance** ***p inconnue***
SECONDE	$n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$, seuil 95% $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$	Sensibilisation
PREMIÈRE	Avec la loi binomiale	
TERMINALE	$n \geq 30$ et $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ Asymptotique au seuil $1-\alpha$ $I_n = \left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$	Au niveau de confiance 95% $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

En terminale autre que S, $\alpha = 0,05$ donc $u_\alpha = 1,96$.

E. Autre intervalle de confiance

Il existe d'autres manières de déterminer un intervalle de confiance d'une proportion.
Dans les commentaires du programme, il est signalé que dans d'autres champs disciplinaires on utilise l'intervalle $\left[f-1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}, f+1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$.

La justification de cet intervalle est hors programme.

Exemple

Pour un niveau de confiance de 0,95, on a $u_\alpha \approx 1,96$. Si sur un échantillon de taille 100 on observe une valeur de la fréquence égale à 0,44, l'intervalle de confiance de p au niveau 0,95 obtenu avec la formule précédente est [0,343 ; 0,537].

L'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ donne [0,34 ; 0,54].

F. Étude de la longueur de l'intervalle de fluctuation et conséquence pour l'intervalle de confiance

L'intervalle de fluctuation asymptotique $I_n = \left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ a pour longueur $2u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$. Donc pour α et n fixés, la longueur de I_n varie comme $\sqrt{p(1-p)}$. Elle est donc maximale quand $p = \frac{1}{2}$ et d'autant plus faible que p est proche de 0 ou de 1.

Quelques valeurs de la longueur $2u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ pour $n = 1000$:

	$p = 0,1$	$p = 0,3$	$p = 0,4$	$p = 0,5$
$\alpha = 0,05$	0,037	0,057	0,061	0,062
$\alpha = 0,01$	0,049	0,075	0,08	0,082

Conséquence pour l'intervalle de confiance

Si on cherche à estimer par intervalle, au niveau de confiance 0,95, une valeur de p dont on sait qu'elle est plutôt proche de 0,5 (cas du second tour de l'élection présidentielle), on a un intervalle de confiance, appelé dans ce cas fourchette de sondage, d'amplitude proche de 0,06.

Si on cherche à estimer une valeur de p sans doute inférieure à 0,1 (cas des petits candidats du premier tour), on a une fourchette d'amplitude proche de 0,04.

On constate sur le tableau précédent que, n étant fixé, l'augmentation du niveau de confiance augmente simultanément la longueur de l'intervalle de confiance, ce qui est un résultat général facile à justifier (et à concevoir).

G. Détermination de la taille minimale de l'échantillon pour avoir une précision donnée

On étudie d'abord la taille minimale de l'échantillon pour avoir une longueur donnée a de l'intervalle de fluctuation pour un seuil ou un niveau de confiance fixé.

1) Avec l'intervalle asymptotique de seconde (donc $\alpha = 0{,}05$ et pour tout p)

On cherche n tel que. $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq a$ ce qui équivaut à $n \geq \frac{4}{a^2}$.

Quelques valeurs :

Valeur de a	0,06	0,04	0,02	0,01
Valeur de n	1112	2500	10000	40000

Conséquence pour la taille de l'échantillon nécessaire pour obtenir une amplitude de l'intervalle de confiance fixée

On a : $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(\frac{X_n}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq \frac{X_n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$

L'amplitude de l'intervalle de fluctuation est évidemment la même que celle de l'intervalle de confiance.

Donc, avec un niveau de confiance de 0,95, pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,06, il faut un échantillon de taille 1112 au moins.

2) Avec l'intervalle asymptotique $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

On cherche n tel que $2u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq a$ ce qui équivaut à $n \geq \frac{4u_\alpha^2 p(1-p)}{a^2}$.

Donnons quelques valeurs :
Pour $p = 0{,}5$

Valeur de a	0,06	0,04	0,02	0,01
Valeur de n si $\alpha = 0{,}05$	1067	2401	9604	38416
Valeur de n si $\alpha = 0{,}01$	1849	4161	16641	66664

Pour $p = 0{,}1$

Valeur de a	0,06	0,04	0,02	0,01
Valeur de n si $\alpha = 0{,}05$	385	865	3458	13830
Valeur de n si $\alpha = 0{,}01$	666	1498	5991	23964

H. Applications

1. Exemple de détermination d'un intervalle de confiance

Prenons un cas très classique : un sondage politique précédant le premier tour d'une élection présidentielle.
Le 18 avril 2002, l'institut IPSOS[13] effectue un sondage dans la population en âge de voter.
On constitue un échantillon de 1000 personnes (inscrites sur les listes électorales) que l'on suppose choisies ici de manière aléatoire. Ce n'est pas le cas en pratique (voir plus loin le paragraphe « sondages ») mais le principe reste le même que dans cet exemple.
Les résultats partiels en sont les suivants :
Sur les 1000 personnes
135 ont déclaré vouloir voter pour Jean-Marie Le Pen
195 ont déclaré vouloir voter pour Jacques Chirac
170 ont déclaré vouloir voter pour Lionel Jospin.
On peut déterminer trois intervalles de confiance au niveau de confiance de 95%[14] :
Jean-Marie Le Pen [0,135–0,032 ; 0,135+0,032] = [0,103 ; 0,167]
Jacques Chirac [0,195–0,032 ; 0,195+0,032]=[0,163 ; 0,227]
Lionel Jospin [0,170–0,032 ; 0,170+0,032]=[0,138 ; 0,202].
Donc la valeur unique en pourcentage donnée par l'institut est entachée d'une imprécision de +/–3 points. En examinant les trois intervalles trouvés, on peut a posteriori dire que le vrai résultat (16,9%,19,9%,16,2%) est compatible avec ceux-ci pour Jacques Chirac et Lionel Jospin car leurs résultats sont dans les intervalles correspondants. En revanche, le résultat de Jean-Marie Le Pen est légèrement supérieur à la borne supérieure de son intervalle de confiance (mais l'institut CSA lui donnait 14%, ce qui donne un intervalle [0,108 ; 0,172] qui contient son score réel).

2. Simulations

Le graphique ci-dessous donne 100 intervalles de confiance simulés au niveau de confiance 0,95 obtenus à partir de 100 échantillons de 50 individus extraits de la même population.

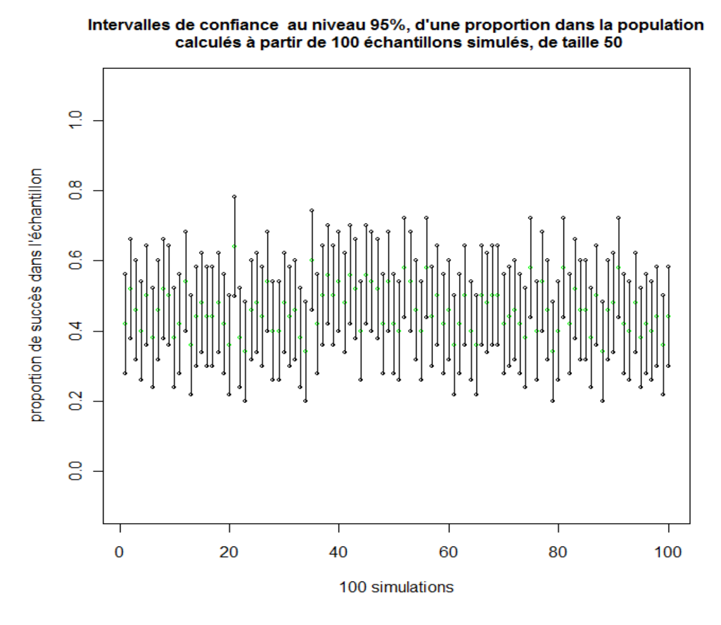


Figure 14

Document associé : intervalles de confiance simulés.r

[13] On peut consulter le site www.ipsos.fr/faq pour des détails sur les méthodes utilisées par cet institut.
[14] Pour chaque candidat, on applique la méthode précédente pour déterminer un intervalle de confiance de la proportion d'électeurs lui étant favorables.

On peut constater sur la figure 14 une fluctuation importante des bornes des intervalles de confiance numériques obtenus à chaque simulation.
Remarque : Les échantillons étant de taille 50, il y a exactement 51 valeurs possibles de la fréquence ce qui explique que l'on retrouve plusieurs fois les mêmes intervalles de confiance dès qu'on fait plus de 51 simulations.
La même simulation (figure 15) avec 100 intervalles de confiance simulés au seuil 0,95 obtenus à partir de 100 échantillons de 1000 individus extraits de la même population (la proportion inconnue est choisie aléatoirement à chaque série de 100 échantillons) fait apparaître une moindre fluctuation des bornes des intervalles.

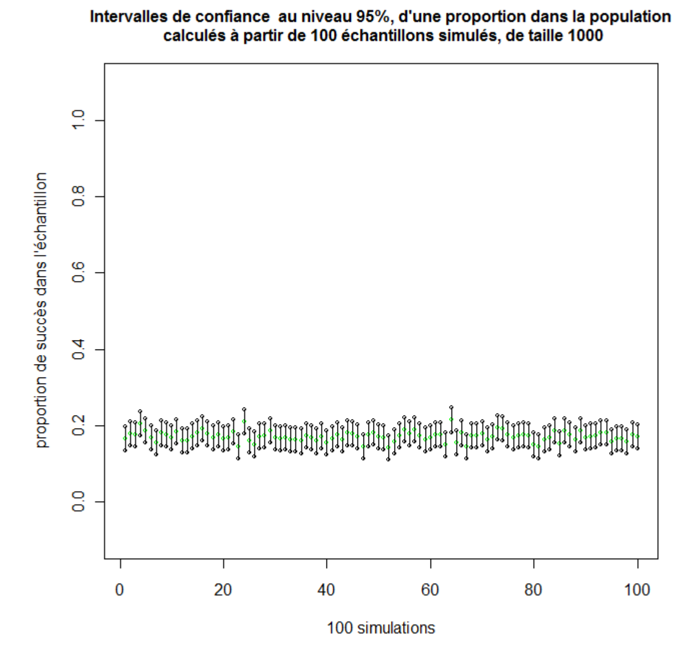
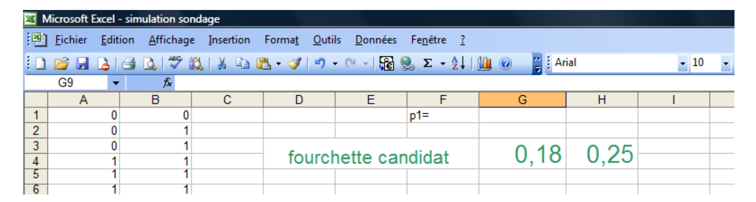


Figure 15

- Simulation simple d'un échantillon avec p inconnue.

Il s'agit de simuler des tirages d'échantillons dans une population où une proportion p est inconnue pour déterminer des intervalles de confiance de p au niveau de confiance 0,95.
On cache donc la valeur de p (qui peut être choisie au hasard) qui permet de faire ces simulations et on fait afficher les intervalles de confiance trouvés.

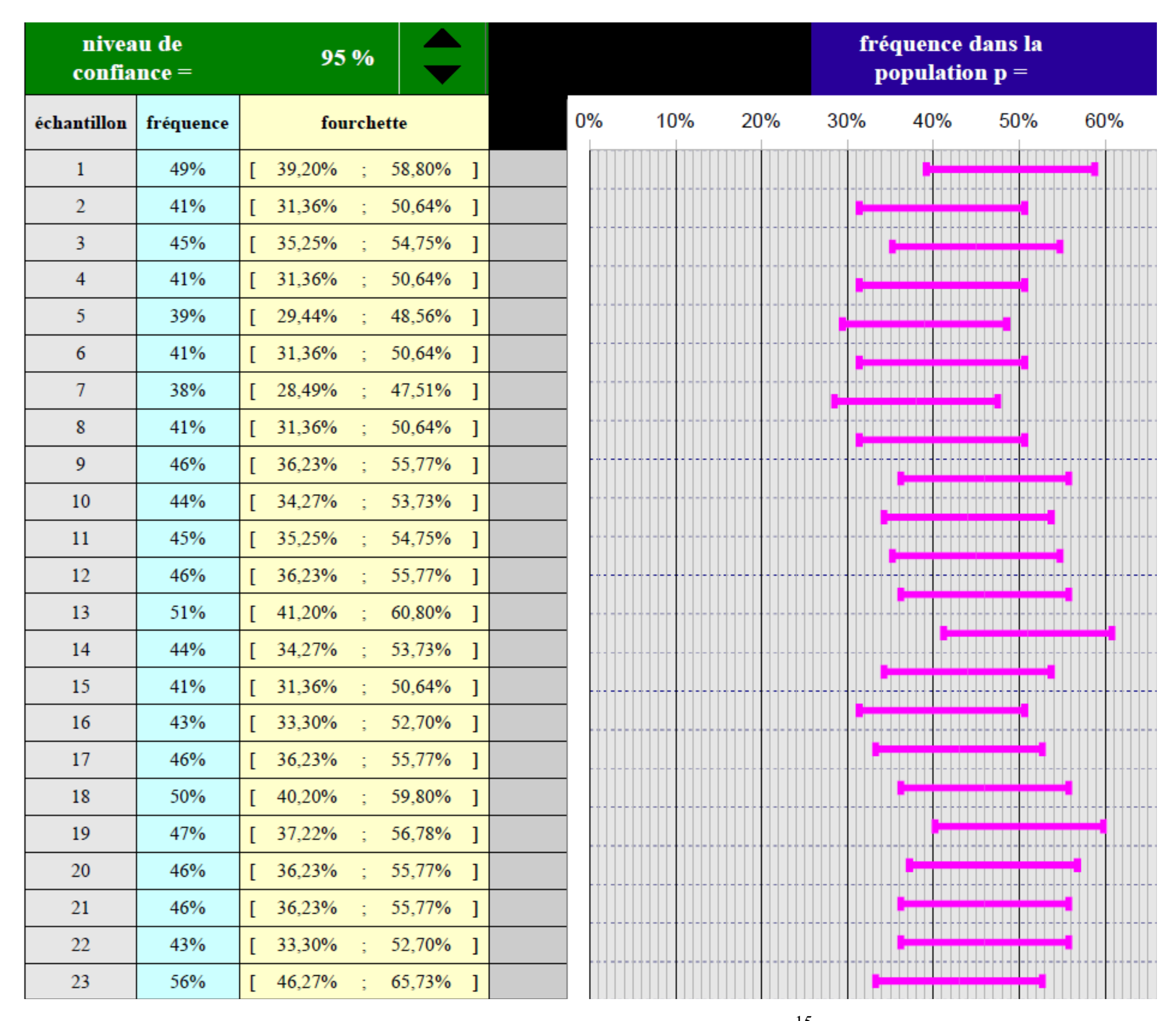


Document associé : simulation sondage.xls

La cellule G1 contient alea() ou un nombre masqué choisi entre 0 et 1.
Les cellules G3 et H3 contiennent les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance.
L'appui sur F9 relance la simulation avec une nouvelle valeur de p.

- Simulation de plusieurs échantillons avec la même valeur de p inconnue.

On peut simuler sur tableur pour une proportion inconnue fixée un grand nombre de calculs d'intervalles de confiance à un niveau de confiance que l'on peut choisir.



niveau de confiance = 95 %

fréquence dans la population p =

échantillon	fréquence	fourchette
1	49%	[39,20% ; 58,80%]
2	41%	[31,36% ; 50,64%]
3	45%	[35,25% ; 54,75%]
4	41%	[31,36% ; 50,64%]
5	39%	[29,44% ; 48,56%]
6	41%	[31,36% ; 50,64%]
7	38%	[28,49% ; 47,51%]
8	41%	[31,36% ; 50,64%]
9	46%	[36,23% ; 55,77%]
10	44%	[34,27% ; 53,73%]
11	45%	[35,25% ; 54,75%]
12	46%	[36,23% ; 55,77%]
13	51%	[41,20% ; 60,80%]
14	44%	[34,27% ; 53,73%]
15	41%	[31,36% ; 50,64%]
16	43%	[33,30% ; 52,70%]
17	46%	[36,23% ; 55,77%]
18	50%	[40,20% ; 59,80%]
19	47%	[37,22% ; 56,78%]
20	46%	[36,23% ; 55,77%]
21	46%	[36,23% ; 55,77%]
22	43%	[33,30% ; 52,70%]
23	56%	[46,27% ; 65,73%]

Document associé : intervalles de confiance simulés-peignes.ods[15]

Exemples d'exercices

1. *Diagnostic de la jaunisse*

Un test de diagnostic rapide effectué sur des sujets ictériques (coloration jaune de la peau, des muqueuses -couche de cellules de protection recouvrant les organes creux en contact avec l'extérieur- et du blanc de l'œil –sclérotique-) doit permettre d'estimer si l'ictère est d'origine virale ou non, sans avoir besoin de faire des analyses longues et compliquées. Cependant il est important de pouvoir s'assurer que ce test est de bonne qualité c'est-à-dire qu'il doit pouvoir indiquer correctement si l'ictère est viral ou non. Il doit être capable d'identifier correctement le type d'ictère : il est positif chez les sujets dont l'ictère est viral et négatif sinon.

Une étude est effectuée sur 100 personnes ayant un ictère viral et 100 personnes ayant un ictère d'origine non virale.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous

	Hépatite virale	Ictère d'origine non virale
Test positif	85	20
Test négatif	15	80

[15] Auteur du fichier : Stéphane Keller, LEGTA Louis Pasteur

a) Déterminer la proportion de sujets ayant un test positif parmi ceux ayant un ictère viral.

b) Déterminer un intervalle de confiance à 95% de la proportion de tests positifs lorsque l'ictère est viral. Cette proportion est appelée sensibilité du test diagnostic, c'est-à-dire la probabilité qu'une personne ayant un ictère viral réagisse au test. Un test diagnostic sera d'autant meilleur que la sensibilité est importante. (*réponse* : [0,75 ; 0,95]).

c) Déterminer la proportion de sujets ayant un test négatif parmi celles ayant un ictère non viral.

d) Déterminer un intervalle de confiance à 95% de la proportion de tests négatifs lorsque l'ictère est non viral. Cette proportion est appelée spécificité du test diagnostic, c'est-à-dire la probabilité qu'une personne ayant un ictère non viral ne réagisse pas au test. Un test diagnostic sera d'autant meilleur que la spécificité est importante.(*réponse* : [0,7 ; 0,9]).

2. *Dépistage de la bronchiolite*

Dans le but d'évaluer la prise en charge de la bronchiolite du nourrisson dans un hôpital de la région Aquitaine, une étude rétrospective a été mise en place.

1) Il est recommandé de coucher l'enfant de manière très inclinée (couchage en proclive) dans le cadre de la prise en charge de la bronchiolite. On évalue cette pratique à partir d'un échantillon de 134 dossiers. 106 des enfants ont été couchés en proclive.

   Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion d'enfants dont le couchage respecte la recommandation.

   Solution

$$\left[\frac{106}{134}-\frac{1}{\sqrt{134}};\frac{106}{134}+\frac{1}{\sqrt{134}}\right]\approx[0,70\,;0,88]$$

2) Une étude plus fine permet de comparer les pratiques entre les différents services ayant admis des enfants (cf. tableau 1).

   Tableau 1 : Répartition des cas suivant le type de services et le respect de la recommandation de couchage en proclive ; évaluation de la prise en charge de la bronchiolite en Aquitaine, une année donnée.

Couchage proclive	***En service des urgences***	***En service hospitalier***	***Total***
Oui	45	52	97
Non	29	8	37
Total	74	60	134

   a. Déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95% de la proportion de couchage en proclive pour chaque type de service.
   Solution
   En service des urgences

$$\left[\frac{45}{74}-\frac{1}{\sqrt{74}};\frac{45}{74}+\frac{1}{\sqrt{74}}\right]=[0,492\,;0,724]$$

   En service hospitalier

$$\left[\frac{52}{60}-\frac{1}{\sqrt{60}};\frac{52}{60}+\frac{1}{\sqrt{60}}\right]=[0,738\,;0,996].$$

   b. (AP) Peut-on conclure selon vous au seuil de 95% que la pratique de couchage n'est pas identique selon le service ?

   Les deux intervalles de confiance n'ont pas d'intersection commune, on en conclut que les pratiques diffèrent entre les deux services.

Il s'agit là d'une règle assez répandue, même s'il en existe d'autres plus précises.

3 *Comparaison du taux de germination de semences de tomates de l'année avec celles de l'année précédente.*

Un maraîcher achète un lot de semences de tomates pour produire ses plants de tomate. Il lui reste des semences de l'année passée, dont il doit contrôler le taux de germination pour pouvoir les utiliser avec les autres. En effet, des taux de germination trop différents provoquent des trous dans les plates bandes de production, ce qui génère un coût de manutention plus élevé (il faut enlever les pots non germés avant de les conditionner). Il faut donc comparer les taux de germination des semences des deux années.

Une stratégie (il en existe d'autres, hors programme, mais qui peuvent faire l'objet d'une recherche) consiste à calculer et à comparer les intervalles de confiance des taux de germination (qui sont des proportions) des plants de l'année et de l'année précédente. Si les deux intervalles ne se recoupent pas, on peut conclure à une différence de taux de germination entre les semences des deux origines[16]. Il faudra alors les semer séparément.

Pour faire cette comparaison, le maraîcher prélève, aléatoirement dans les semences de l'année, un échantillon de 200 graines qu'il met à germer. Il constate que 185 graines germent.

Il prélève ensuite, aléatoirement dans les semences de l'année précédente, un échantillon de 200 graines qu'il met à germer. Il constate que 150 graines germent.

1. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, du taux de germination p_a du lot de semences de l'année.

Solution

$IC_{95\%}= [185/200 - 1/\sqrt{200} ; 185/200 + 1/\sqrt{200}] \approx [0,925 - 0,071 ; 0,925 + 0,071]$

$\approx [0,85;0,99]$

2. Déterminer (par la même méthode qu'à la question a)) un intervalle de confiance au niveau 95%, du taux de germination p_b du lot de semences de l'année précédente.

3. Conclure.

Solution

Les deux intervalles sont disjoints, on peut donc conclure à une différence entre les taux de germination p_a et p_b au niveau de confiance 0,95.

Il est intéressant de noter que, sans connaître p_a et p_b, on dispose d'une méthode pour décider au niveau de confiance 95% que, si les intervalles de confiance sont disjoints, alors p_a et p_b sont différents.

Il existe d'autres méthodes d'estimation, mais quelle que soit la méthode utilisée, si elle est issue d'un échantillonnage aléatoire, la décision sera toujours entachée d'un risque d'erreur. Les méthodes utilisées assurent seulement la maîtrise de certains risques de se tromper.

---

[16] L'étude de cette problématique est suggérée en AP.

VI. Compléments sur les lois uniforme et exponentielle

A. Loi uniforme

Le nouveau programme propose de définir la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ quelconque.

Après avoir défini la loi uniforme sur $[0,1]$ à partir, par exemple, du choix au hasard d'un réel entre 0 et 1, on peut définir la loi uniforme sur $[a,b]$ en remarquant que pour que l'aire sous la courbe soit égale à 1, il faut et il suffit que la valeur de la constante soit $\frac{1}{b-a}$.

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ si sa densité est la fonction f définie sur $[a,b]$ par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

Espérance d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a,b]$

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[a,b]$ est donnée par :

$$\mathrm{E}(X) = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}.$$

On peut observer que la définition de l'espérance par la formule $\mathrm{E}(X) = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$ prolonge celle de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

En effet, le terme $f(x)\mathrm{d}x$ peut s'interpréter comme l'aire d'un rectangle de côtés $\mathrm{d}x$ et $f(x)$, fournissant en quelque sorte la probabilité que la variable X prenne la valeur x. Dans ces conditions, l'intégrale $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$ correspond à une « somme » de produits $x \times f(x)\mathrm{d}x$.

La figure 1 ci-dessous présente la situation dans le cas où $a = 0$ et $b = 1$.

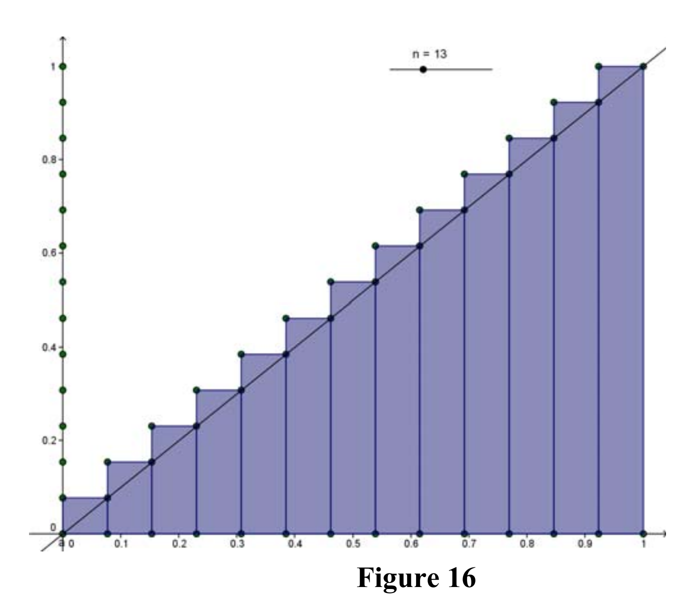


Figure 16

Document associé : espérance d'une variable uniforme.ggb

On a représenté les rectangles de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur $\frac{k}{n}$, avec k entier variant de 1 à n.

La somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n}$ des aires de ces rectangles peut s'interpréter comme l'espérance d'une variable discrète équirépartie prenant les n valeurs $\frac{k}{n}$, pour k variant de 1 à n.

Elle vaut $\frac{n(n+1)}{2n^2}$ et a pour limite $\frac{1}{2}$.

Quand n tend vers l'infini, la somme des aires des rectangles tend vers l'aire située sous la droite d'équation $y = x$. On retrouve ainsi l'égalité $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Exemples d'exercices

1. A partir de 7 heures le matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, représentée par le nombre de minutes après 7h, est la variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle [0, 30].

1) Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus ?
2) Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?

2. Partie A

Olivier vient tous les matins entre 7h et 7h 45 chez Karine prendre un café.

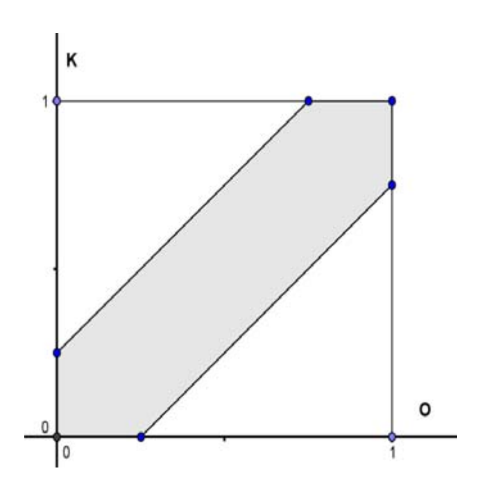
1) Sachant qu'Olivier ne vient jamais en dehors de la plage horaire indiquée et qu'il peut arriver à tout instant avec les mêmes chances, quelle densité peut-on attribuer à la variable aléatoire « heure d'arrivée d'Olivier » ?
2) Calculer la probabilité qu'Olivier sonne chez Karine :
   - Après 7h30
   - Avant 7h10
   - Entre 7h20 et 7h22
   - A 7h30 exactement.

2. Partie B

Olivier et Karine décident de se retrouver au café de l'Hôtel de Ville entre 7h et 8h. Les instants d'arrivée d'Olivier et Karine sont assimilés à des variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]$. Chacun attend un quart d'heure mais jamais au-delà de 8h. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

Éléments de solution

Pour la partie B, si on note O la variable aléatoire « instant d'arrivée d'Olivier » et K celle de Karine. La probabilité cherchée est $\mathrm{P}(|O-K| \leq \frac{1}{4})$; en utilisant une représentation graphique, cette probabilité est l'aire de la zone grisée ci-dessous, ensemble des points de coordonnées (x, y) du carré tels que $|x-y| \leq 0{,}25$. (On trouve $\frac{7}{16}$).



B. Lois exponentielles

Une variable aléatoire à densité X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Pour tout intervalle $\langle c,d \rangle$ [17], on obtient : $P(X \in \langle c,d \rangle) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

En particulier, on obtient $P(X \le a) = 1 - e^{-\lambda a}$.

L'espérance de X est la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\, dt$, on obtient $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Pour effectuer le calcul de cette intégrale, on peut :

- chercher une primitive de la fonction $t \mapsto \lambda t e^{-\lambda t}$ sous la forme $(at+b)e^{-\lambda t}$ et déterminer ensuite a et b
- calculer la dérivée de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t) = -te^{-\lambda t}$ et en utilisant le fait que $\int_0^x g'(t)dt = g(x)$, obtenir la valeur de l'intégrale $\int_0^x t\lambda e^{-\lambda t} dt$
- Expliquer éventuellement sur cet exemple le principe de l'intégration par parties, bien qu'il ne soit plus dans les capacités exigibles du programme.

On démontre qu'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que, pour tous réels t et h positifs, $P_{X \ge t}(X \ge t+h) = P(X \ge h)$.

La réciproque de cette propriété n'est pas au programme.

[17] Cette notation désigne ici tous les types intervalles d'extrémités c et d où $c \le d$.

Annexe 1 Introduction au théorème de Moivre-Laplace

L'objet de cette annexe 1 est de situer le théorème de Moivre-Laplace dans une perspective historique. Celle-ci permet de montrer l'évolution de la pensée probabiliste depuis Jacques BERNOULLI jusqu'à Pierre-Simon de LAPLACE qui donnera la preuve complète de ce théorème avec la rigueur possible à son époque.

La motivation commune à Bernoulli, Moivre et Laplace est de déterminer le plus finement possible la *fluctuation*[18] des valeurs prises par une variable aléatoire suivant une loi binomiale autour de son *espérance*. Il s'agissait ensuite d'utiliser *l'intervalle de fluctuation* obtenu pour *estimer* une probabilité inconnue, ce qui est la problématique moderne de *l'intervalle de confiance.*

Les énoncés des théorèmes sont donnés avec la formulation actuelle.

A. La loi des grands nombres de Jacques Bernoulli

Théorème de Bernoulli

On considère une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On pose $F_n = \frac{X_n}{n}$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $\mathrm{P}\left(\left|F_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

Ce théorème est invoqué pour justifier l'approche fréquentiste de la notion de probabilité.

En effet, ce résultat liant fréquence et probabilité permet de donner une justification aux axiomes de la théorie générale (dite de Kolmogorov) par analogie avec les propriétés vues en statistiques.

La démonstration originale de Bernoulli, donnée dans son ouvrage *Ars conjectandi* publié à Bâle en 1713, fait appel avec beaucoup d'ingéniosité à la formule du binôme et aux propriétés des nombres $\binom{n}{k}$. Bernoulli est parfaitement conscient de la portée de son théorème comme le montre cet extrait de son ouvrage[19] :

« Mais pour que cela ne soit pas compris autrement qu'il ne convient, il faut bien noter ce qui suit ; je voudrais que le rapport entre les nombres de cas, que nous entreprenons de déterminer expérimentalement, ne fût pas pris de façon nette et sans partage (car ainsi c'est tout le contraire qui arriverait et il deviendrait d'autant moins probable de découvrir le vrai rapport qu'on ferait de plus nombreuses observations), mais je voudrais que le rapport fût admis avec une certaine latitude, c'est-à-dire compris entre une paire de limites, pouvant être prises aussi rapprochées qu'on voudra. »

On voit que le concept d'intervalle de confiance déduit d'un intervalle de fluctuation est déjà présent dans l'œuvre de Bernoulli.

Le théorème de Bernoulli est généralisé au dix-neuvième siècle par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, après que les notions d'espérance et de variance auront été dégagées.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit (Ω , P) un univers probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω possédant une variance V(X). On note E(X) son espérance. Alors pour tout ε > 0 on a :

[18] Les termes en italiques n'étaient pas utilisés par les mathématiciens de cette époque.
[19] Jacques Bernoulli , Ars Conjectandi, traduction de Robert Meunier, Irem de Rouen, 1987.

$$\mathbf{P}\left(\left|X-\mathbf{E}(X)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Cette inégalité est intéressante pour donner tout son sens à la notion de *variance* dans un cadre plus général que celui du théorème de Bernoulli. D'après cette inégalité il apparaît clairement que plus la variance est petite, plus les fluctuations de X autour de son espérance sont faibles.

Remarque

Fondamentale du point de vue théorique, cette inégalité est insuffisante du point de vue des applications numériques car l'information sur la probabilité que F_n appartienne à l'intervalle de fluctuation $\left[p-\varepsilon, p+\varepsilon\right]$ est peu précise.

Exemple

$p=0,5 \quad \varepsilon=0,1 \quad n=100$ donnent un majorant de $\mathrm{P}(|F_n-p|\geq 0,1)$ égal à 0,25.

Or on sait que $\mathrm{P}\left(F_n\in\left[0,5-\frac{1}{\sqrt{100}};0,5+\frac{1}{\sqrt{100}}\right]\right)$ est voisin de 0,95 c'est-à-dire que $\mathrm{P}(|F_n-p|\geq 0,1)$ est voisin de 0,05.

C'est la recherche d'une meilleure précision qui a motivé le travail de Moivre puis de Laplace.

B. La démarche d'Abraham de Moivre

Abraham de Moivre est un protestant français, qui s'est exilé en Angleterre après la révocation en 1685 de l'Édit de Nantes. Il y rencontre James Stirling qui lui communique une précision importante sur la formule dite de *Stirling*, en réalité déjà présente dans les travaux de Moivre.

Dans son ouvrage *The Doctrine of chances* (1718), il met le calcul infinitésimal au service des probabilités. Cet ouvrage a été récemment traduit par les auteurs d'un document sur le théorème de Moivre-Laplace[20].

Le but d'A. de Moivre est d'évaluer $\mathrm{P}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{n}\leq X_n\leq\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)$ où X_n suit une loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Il trouve 0,682688 comme valeur approchée en considérant n « infini ».

Or la limite de cette probabilité existe et vaut 0,682689492 environ.

De Moivre cherche ensuite à évaluer $\mathrm{P}\left(\frac{n}{2}-\sqrt{n}\leq X_n\leq\frac{n}{2}+\sqrt{n}\right)$. Il lui faut alors affiner sa technique et il utilise l'intégrale (au sens d'une aire) de la fonction $x\mapsto e^{-\frac{2x^2}{n}}$ apparue lors de l'évaluation de la somme des probabilités $\mathrm{P}(X_n=k)$ quand $\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{n}\leq k\leq\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

Il parvient à la valeur approchée 0,95428 que l'on retrouvera plus loin.

La méthode de Moivre est un peu difficile à suivre, mais elle est esquissée dans la partie C avec une rédaction moderne.

En généralisant sans démonstration les résultats précédents au cas d'une loi $\mathcal{B}(n, p)$, il donne les éléments pour déterminer la probabilité d'un intervalle de fluctuation.

Il est intéressant de voir comment Moivre exploite son résultat.

En l'utilisant dans le sens direct, il en déduit que les fluctuations dues au hasard sont très limitées :

[20] *La loi des grands nombres, le théorème de De Moivre-Laplace,* D.Lanier, D.Trotoux,. http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/pdf/LoidesGrandsNombres.pdf

« bien que le Hasard produise des Irrégularités, cependant les Rapports de Probabilités seront infiniment grands, et que avec l'avancement du Temps, ces Irrégularités n'auront aucune proportion avec le retour de l'Ordre qui résulte naturellement du DESSEIN ORIGINEL. »

En sens inverse, il retrouve le concept d'intervalle de confiance déjà esquissé par Bernoulli :

« *inversement*, si à partir d'Observations innombrables, nous trouvons que le Rapport des Evénements converge vers une quantité déterminée, comme le Rapport de P à Q ; alors nous concluons que ce Rapport exprime la Loi déterminée suivant laquelle l'Evénement se produit. »

Et enfin comme souvent à cette époque, il déduit de ce résultat mathématique une conviction religieuse :

« Et ainsi, si nous ne nous aveuglons pas nous-mêmes avec de la poussière métaphysique, nous seront conduits, d'une manière rapide et évidente, à la reconnaissance du grand CREATEUR et MAITRE de toutes choses ; *Lui-même toute sagesse, toute puissance* et *bonté*. »

C. Une approche du résultat de Moivre

On peut assez facilement comprendre comment apparaît la fameuse fonction dont la courbe a une forme de « cloche ». On a juste besoin de la formule dite « de Stirling ».

Prenons le cas où $p=\frac{1}{2}$ et donc $\mathrm{P}(X_n=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout entier k compris entre 0 et n.

On pose $Z_n=\dfrac{X_n-\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}$ et on cherche le comportement de $\mathrm{P}\left(Z_n=x\right)$ quand n est grand, x étant fixé.

On a : $\mathrm{P}(Z_n=x)=P(X_n=\frac{1}{2}x\sqrt{n}+\frac{n}{2})$.

Comme X_n ne prend que des valeurs entières, $k=\frac{1}{2}x\sqrt{n}+\frac{n}{2}$ doit être entier.

On **fixe** x entier et on s'intéresse à la suite extraite de la suite $\left(\mathrm{P}\left(Z_n=x\right)\right)$ correspondant aux entiers n de la forme $n=(2m)^2$. On a alors $k=\frac{1}{2}x2m+2m^2=xm+2m^2$ qui est bien entier pour tout entier m.

On a $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et quand $m\to+\infty$ on a $k\to+\infty$ et $n-k\to+\infty$.

D'après la formule de Stirling, quand n est grand, $n!$ est équivalent à $n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}$ ce qui signifie que le quotient de $\dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}}$ a pour limite 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

n, k et $n-k$ étant grands, on peut considérer que :

$$\mathrm{P}(Z_n=x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x\sqrt{n}+n+1}{2}}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{-x\sqrt{n}+n+1}{2}}}\frac{1}{2^n}$$

$$\sim \frac{2}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\frac{\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x\sqrt{n}}{2}}}{\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x\sqrt{n}}{2}}}$$

Or : $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x\sqrt{n}}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x\sqrt{n}}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\frac{x^2}{2}}$

d'où finalement l'équivalent suivant :

$$\mathrm{P}(Z_n = x) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

valable pour x entier et n carré pair.

Remarque 1
Dans le cas de la suite extraite, on peut constater que $\mathrm{P}(Z_n = x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il reste à justifier que le résultat est valable pour tout x et pour la suite complète.

Remarque 2
Deux valeurs consécutives de Z_n sont distantes de $\frac{2}{\sqrt{n}}$ donc sur un intervalle de cette longueur ne se trouve qu'une valeur prise par Z_n. Si on pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, l'équivalent trouvé peut s'écrire $f(x)\Delta x$ et donc s'interpréter géométriquement comme l'aire d'un « petit » rectangle de base Δx et de longueur $f(x)$. Cela illustre la notion de densité.

Remarque 3
Numériquement pour $n = 100$ et $x = 1$, on obtient $k = 55$.
$\mathrm{P}(Z_{100} = 1) \approx 0,04847$ et l'équivalent vaut environ 0,04839.

Remarque 4
L'aide apportée à Moivre par Stirling est la valeur de la constante égale à $\sqrt{2\pi}$ dans l'équivalent de n !.

D. Le théorème de Moivre-Laplace

Pierre-Simon de Laplace a été le premier à écrire un ouvrage exposant l'état des connaissances dans le domaine des probabilités. Il s'agit de *la théorie analytique des probabilités*[21] (1812). Dans ce texte, Laplace expose d'abord une série de résultats d'analyse (fonctions génératrices, transformée de Laplace...) qui lui permettent de démontrer des résultats de probabilités, et en particulier le théorème de Moivre-Laplace.

Laplace a des idées très précises sur les probabilités. Contrairement à Moivre, il ne cherche pas à prouver l'existence d'un *Grand créateur*, mais il cherche à approcher au mieux les lois qui régissent le monde dans lequel nous vivons. Il développe une vision très déterministe :

[21] Texte intégral disponible à l'adresse
http://books.google.fr/books?id=6MRLAAAAMAAJ&printsec=frontcover&dq=Th%E9orie+analytique+des+probabilit%E9s+Laplace#v=onepage&q&f=false

« Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse , embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux. »

Ce n'est qu'au cours du vingtième siècle que cette vision déterministe sera remise en cause, en particulier par la physique quantique.

Concernant le théorème de Bernoulli, voici ce qu'il écrit :

« Ce théorème indiqué par le bon sens était difficile à démontrer par l'Analyse. Aussi l'illustre géomètre Jacques Bernoulli, qui s'en est occupé le premier, attachait-il une grande importance à la démonstration qu'il en a donnée. Le calcul des fonctions génératrices appliqué à cet objet, non seulement démontre avec fiabilité ce théorème, mais de plus il donne la probabilité que le rapport des événements observés ne s'écarte que dans certaines limites du vrai rapport de leurs possibilités respectives. »

« Moivre a repris dans son ouvrage [The Doctrine of Chances] *le théorème de Bernoulli sur la probabilité des résultats déterminés par un grand nombre d'observations. Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des événements qui doivent arriver approche sans cesse de leurs possibilités respectives, il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports est contenues dans des limites données. »*

E. Convergence en loi

Ce paragraphe peut être réservé à une seconde lecture, son contenu dépassant nettement le niveau de la classe terminale.

Définition

Soient une suite de variables aléatoires réelles (X_n) et une variable aléatoire réelle X.

On note F_X (respectivement F_{X_n}) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$ (respectivement $F_{X_n}(x) = \mathrm{P}(X_n \leq x)$) appelée fonction de répartition de X (respectivement de X_n).

La suite (X_n) converge en loi vers X si, pour tout réel x où F_X est continue, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

La convergence en loi n'est pas la convergence des nombres $X_n(\omega)$ vers $X(\omega)$ mais la « convergence » des lois, et plus précisément la convergence simple, aux points de continuité de F_X, de la suite de fonctions F_{X_n} vers la fonction F_X. L'expression « la suite (X_n) » converge est donc un abus de langage, mais il est universellement pratiqué. En fait, si la suite (X_n) converge en loi vers X, alors elle converge en loi vers n'importe quelle variable aléatoire ayant la même loi que X.

Cas particulier

Dans le cas où toutes les variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, la convergence en loi s'exprime par :

$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}(X_n = k) = \mathrm{P}(X = k)$.

Exemple

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) suivant une loi binomiale B $(n, 1/n)$.

On démontre que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}(X_n = k) = \lim\limits_{n \to +\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = e^{-1} \frac{1}{k!}$.

La loi limite est appelée loi de Poisson[22] de paramètre 1.

Comme pour la loi normale centrée réduite, cette loi est apparue comme loi limite.

Elle a ensuite été utilisée comme modèle dans divers domaines ; elle est appelée également loi des événements rares.

Annexe 2 Compléments sur les lois normales

A. Loi normale centrée réduite

Théorème

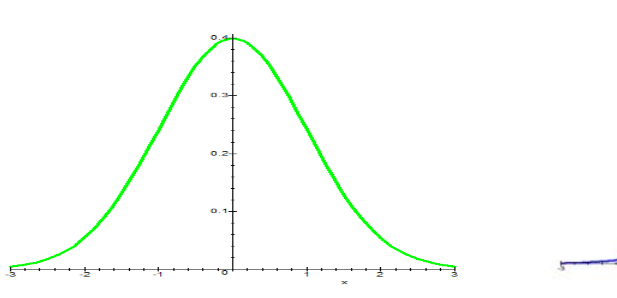
L'aire située entre la courbe représentative de la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ et l'axe des abscisses est égale à 1.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité est la fonction $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

On note Φ sa fonction de répartition c'est-à-dire la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x)=\mathrm{P}(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Représentations graphiques :



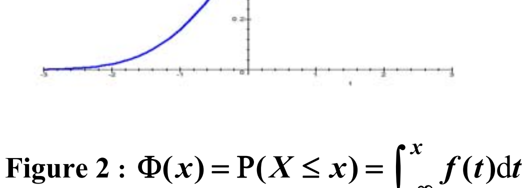


Figure 1 : $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ **Figure 2 : $\Phi(x)=\mathrm{P}(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$**

Remarque : Il faut noter que la fonction f n'a pas de primitive « explicite », c'est à dire qu'il est impossible de l'exprimer algébriquement avec les fonctions usuelles (polynômes, exponentielle, logarithme...). Pour cette raison, il a été établi des tables numériques (comme les tables de logarithmes). Avec les calculatrices, ces tables ont aujourd'hui perdu leur intérêt.

Quelques propriétés

P1. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

Visible graphiquement sur la figure 4 on peut aussi démontrer cette formule par changement de variable.

[22] Siméon-Denis Poisson (1781-1840) *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*

On en déduit que $\Phi(0) = P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Une variable suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ a donc 0 pour médiane.

P2. $\Phi' = f$.

Il suffit d'écrire $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ pour constater que Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est *f*.

P3. Φ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans]0,1[.

La stricte croissance et la continuité sont immédiates.

Les limites aux bornes sont 0 et 1[23] et elles ne sont pas atteintes du fait que Φ est strictement croissante.

B. Lois normales

Une variable aléatoire *X* suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Propriété de stabilité par addition et multiplication par un réel

Cette propriété est bien sûr hors programme en terminale puisque la somme de variables aléatoires n'y est pas abordée, ni la notion de variables indépendantes. Elle est cependant d'une très grande importance et justifie en particulier la notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Propriété

> **Si *X* suit une loi $\mathcal{N}(a,b^2)$ et que *Y* suit une loi $\mathcal{N}(c,d^2)$ et qu'elles sont indépendantes, alors leur somme $X + Y$ suit également une loi normale de paramètres $a + c$ et $b^2 + d^2$.**

C'est cette propriété qui justifie la notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, à savoir que les variances s'additionnent (si les variables sont indépendantes) mais pas les écarts types.

Annexe 3 Approche simplifiée de la théorie des sondages

Dans la plupart des situations il est impossible d'interroger ou de recueillir des informations sur l'ensemble de la population ; pour cette raison on se contente le plus souvent d'un échantillon. Un échantillon correspond à un sous-ensemble de la population qui intéresse le responsable de l'étude.

Pour que les informations recueillies auprès de l'échantillon puissent permettre d'estimer des caractéristiques de la population il est important d'être rigoureux et d'utiliser des méthodes d'échantillonnage appropriées. Ces différentes méthodes sont présentées succinctement ci-dessous.

A. Qualités d'un échantillon permettant de répondre à une question posée

L'observation d'un échantillon ne permet pas de décrire avec certitude une population mais seulement d'estimer par intervalles de confiance les valeurs de certaines caractéristiques que l'on souhaite connaître dans cette population.

[23] En utilisant la définition d'une intégrale généralisée convergente.

« Voir invoquer la « représentativité » dans un rapport d'enquête pour justifier de la qualité d'un sondage peut presque à coup sûr laisser soupçonner que l'étude a été réalisée dans une méconnaissance totale de la théorie de l'échantillonnage. Le concept de représentativité est aujourd'hui à ce point galvaudé qu'il est désormais porteur de nombreuses ambivalences. Cette notion, d'ordre essentiellement intuitif, est non seulement sommaire mais encore fausse et, à bien des égards, invalidée par la théorie … »[24]

La première chose à préciser c'est qu'avec un échantillon on ne peut pas être représentatif de l'ensemble de la population sur toutes les caractéristiques, il est donc important de définir les caractéristiques qui intéressent les responsables de l'enquête.

Pour un statisticien, l'échantillon sera dit représentatif si on peut correctement estimer les paramètres d'intérêt de la population à partir de l'échantillon. Dans le cas contraire on parlera de biais d'échantillonnage. Pour pouvoir correctement estimer les paramètres, le statisticien n'a pas nécessairement besoin que l'échantillon soit une reproduction miniature de la population, par contre il a besoin que tous les profils de la population importants pour l'objectif de l'enquête soient représentés dans l'échantillon. Cela signifie donc que le plan d'échantillonnage utilisé dépendra de l'objectif de l'étude même si la population est la même.

La représentativité d'un échantillon nécessite que la procédure d'échantillonnage permette la constitution d'un sous-groupe recouvrant les caractéristiques qui peuvent influencer la valeur des paramètres que l'on veut estimer. La non-représentativité d'un échantillon peut par exemple être due à la sélection dans une base de sondage ne couvrant pas correctement la population.

Par exemple, supposons qu'on souhaite réaliser une enquête de prévalence d'une maladie A dans la population générale et qu'on sélectionne un échantillon à partir de la liste téléphonique (l'enquête devant se dérouler par appel téléphonique). Dans ce cas l'échantillon ne couvre pas correctement la population il y a un biais d'échantillonnage car les personnes qui répondront à l'enquête auront un téléphone et seront présentes à leur domicile, pour cette raison toutes les personnes qui seront hospitalisées à la date de l'enquête ne seront pas interrogées. Si les personnes atteintes de la maladie étudiée sont plus susceptibles de se rendre à l'hôpital, on risque de sous-estimer la prévalence de la maladie ou proportion de malades, en réalisant un échantillon comme proposé ci-dessus.

Dans tous les cas de figures on souhaite enquêter sur un nombre suffisant de sujets afin de pouvoir estimer correctement le paramètre de la population.

En principe la taille de l'échantillon est indépendante de la taille de la population que l'on veut étudier. Il faut interroger autant de personnes pour estimer avec la même précision le résultat de l'élection présidentielle en France, que l'élection du maire de Bordeaux.

La taille est en revanche fonction de la marge d'erreur (amplitude de l'intervalle de confiance) que l'on accepte de prendre et qui résulte inéluctablement du fait que l'estimation est issue d'un échantillon.

Un sondage peut être effectué de multiples façons que l'on regroupe en deux grandes familles : les sondages aléatoires, dits aussi probabilistes, et les sondages non aléatoires, dits aussi empiriques ou informels.

B. Echantillonnage non-probabiliste ou non aléatoire

Pour ce type de sondage la sélection des individus n'obéit plus au hasard mais est définie selon des critères de faisabilité, de ressemblance à la population et de critères subjectifs dépendant du choix des enquêteurs.

Les types de sondage satisfaisant aux critères de faisabilité ou de simplicité sont par exemple les échantillons de sujets volontaires (par exemple les enquêtes publiques préalables à la déclaration

[24] Y. Tillé (2001), Théorie des sondages : Échantillonnage et estimation en populations finies : cours et exercices, 284 pages, Paris, Dunod

d'utilité publique : les personnes qui le souhaitent prennent connaissance du projet et consignent leurs observations sur un registre d'enquête ouvert en mairie) ou les échantillons de convenance (par exemple on effectuera une enquête auprès de toutes les personnes qui viennent à la poste centrale de la ville V le mardi 4 septembre 2012).

Les types de sondage satisfaisant aux critères de ressemblance à la population sont appelés échantillonnage par choix raisonné. La méthode des quotas, qui est la méthode la plus utilisée parmi les sondages non aléatoires et dans les sondages d'opinion, fait partie de cette catégorie de sondage. Les enquêteurs doivent inclure un nombre donné d'individus présentant telle ou telle caractéristique dans des proportions voisines de celles de la population. Du moment que le quota est respecté, le mode de sélection des individus est laissé au libre choix de l'enquêteur. La méthode des quotas consiste à construire un échantillon qui soit une maquette, un modèle réduit de la population étudiée, en conservant les mêmes proportions. La plupart des sondages politiques effectués en France utilisent cette méthode.

La date cruciale pour l'histoire de l'échantillonnage est le mardi 3 novembre 1936, jour de la publication des résultats de l'élection présidentielle aux États-Unis. Le journal « Literary Digest » avait réalisé des sondages pré-électoraux, comme à leur habitude, par consultation individuelle d'électeurs (appelés « votes de paille » à cette époque). Cette méthode ne fait appel à aucune notion de représentativité, mais est réalisée sur un nombre important d'électeurs et jusqu'en 1936 elle donne des résultats tout à fait satisfaisants. Ce journal comme bien d'autres prédit alors l'élection de Lanton, mais finalement F.D. Roosevelt est élu. Seuls trois sondages l'avaient donné gagnant, tous réalisés par une méthode empirique appelée la méthode des quotas. Ce fut le début des grandes structures de sondages telles que la société de sondage Gallup aux Etats-Unis.

C. Echantillonnage probabiliste

Dans un plan d'échantillonnage aléatoire, tous les individus de la population ont une probabilité connue et non nulle d'être sélectionnés pour faire partie de l'échantillon. La sélection des individus constituant l'échantillon s'effectue par un plan d'échantillonnage à un ou plusieurs degrés et à chaque degré une procédure de tirage au sort est spécifiée ; il peut s'agir d'une procédure de sondage aléatoire simple, ou systématique, ou d'une procédure stratifiée, avec sélection équiprobable ou à probabilité proportionnelle à la taille. Logiquement seuls les sondages aléatoires permettent de fournir des estimations avec une précision donnée, c'est- à -dire avec un intervalle de confiance.

Les sélections aléatoires à partir d'une liste d'individus peuvent s'effectuer de différentes façons. Prenons l'exemple d'une enquête que l'inspection académique souhaiterait réaliser auprès des élèves des lycées d'un département afin d'étudier les difficultés scolaires rencontrées par ceux-ci. Il est impossible d'interroger la totalité des élèves et le souhait est de pouvoir obtenir des informations sur un échantillon représentatif de 500 élèves. Pour cette dernière raison il est décidé de sélectionner aléatoirement les élèves, mais plusieurs méthodes peuvent être proposées.

1) si la liste de tous les élèves est accessible de manière électronique on peut sélectionner 500 élèves dans la liste en utilisant par exemple un tableur, il y a plusieurs méthodes pour cela :
   a. créer pour chaque élève un nombre aléatoire suivant une loi uniforme, puis choisir de trier la liste en fonction de ce nombre aléatoire créé, cela revient à mélanger de façon aléatoire la liste. On sélectionne finalement les 500 premiers noms qui sont dans la liste triée. Cette méthode permet de réaliser une sélection simple sans remise.
   b. Numéroter tous les élèves de la liste, puis utiliser la fonction aléatoire du tableur pour sélectionner uniquement 500 nombres, les élèves correspondant à ces nombres seront sélectionnés. En appliquant cette méthode un nombre peut être sélectionné plusieurs fois. Cela revient donc à réaliser un échantillon avec remise.
   c. On peut aussi utiliser la méthode de sélection systématique, c'est-à-dire que si le nombre d'élèves est égale à N on tire au sort un nombre, noté d, entre 1 et N puis on

sélectionne de manière régulière sur la liste le $d + \frac{N}{500}$ énième élèves, si ce nombre dépasse le rang du dernier élève on reprend la liste au début.

Les trois méthodes présentées ci-dessus sont des sélections que l'on peut considérer équiprobables car chaque sujet a la même probabilité d'être sélectionné.

2) On peut souhaiter effectuer une enquête en face à face, c'est-à-dire qu'un enquêteur doit se déplacer pour interroger l'élève, il est donc important d'essayer de gérer le nombre de déplacements. Dans les méthodes proposées précédemment rien n'est contrôlé et l'enquêteur peut devoir traverser le département pour interroger un et un seul élève. Afin d'améliorer cela on peut décider de sélectionner un certain nombre d'établissements et de sélectionner un certain nombre d'élèves dans chaque établissement. On parlera alors de sondage à plusieurs degrés. Dans ce cas la sélection n'est pas toujours équiprobable.

   Exemple : supposons que 10 des 70 lycées soient sélectionnés et dans chaque lycée sélectionné on sélectionne 30 élèves. Dans ce cas la probabilité que l'élève A soit sélectionné est environ égale à 10/70 * 30/(nb d'élèves du lycée d'appartenance de l'élève A) , on remarque que cette probabilité dépend de la taille du lycée et donc non équiprobable.

3) On peut vouloir construire un échantillon représentant les lycées généraux et professionnels. Dans ce cas et afin de forcer cette représentativité, on commence par partager en deux paquets la liste : liste des lycées professionnels et liste des lycées généraux et on effectue un échantillon dans chacune des deux listes. On parle alors de sondage stratifié.

Annexe 4 Utilisation des Tice

A. Tableau des fichiers du document ressource Probabilités et Statistique du programme de Terminale.

Les textes en italique ou en italique vert concernent des fichiers non référencés de certaines figures du document principal ou des fichiers d'activités complémentaires n'apparaissant pas dans le document principal.

DOCU-MENTS DE SYNTHÈSE	FICHIERS	FONCTIONS, PARAMÈTRES D'ANIMATION OU DE FONCTION ET DESCRIPTION n (10 ; 60 ; 1 ; curs) signifie que l'on peut faire varier le paramètre n de 10 à 60 avec des pas de 1, à l'aide d'un curseur. curs peut être remplacé par bouton (à cliquer).
Annexe 4	***InitiationR1.r***	*Démarrage rapide en R : installation et quelques exemples commentés, bibliographie.*
VI Figure 16	**espérance d'une variable uniforme.ggb**	**Animation GeoGebra** illustrant l'aire de **n (0 ; 40 ; curs)** rectangles de base **1/n**, de hauteur **k/n** avec **1 ≤ k ≤ n**. Convergence de la somme de l'aire de tous les rectangles vers l'aire sous la droite **y = x**.
I Figure 1	**centrer et réduire une binomiale.ggb**	**Animation GeoGebra:** superposition des diagrammes en barre de X v.a. binomiale de paramètres **n (10 ; 60 ; 1 ; curs)** et **p (0 ; 1 ; 0,01 ; curs),** de X – n×p, variable centrée et de Z = (X – n×p) / racine(n × p × (1 – p)), variable centrée et réduite.
I Figure 2	**diagramme en bâtons de Fn.ggb**	**Animation GeoGebra :** diagramme en bâton de la variable fréquence Fn = (Xn - p) / √(p×(1 – p) / n), pour **n (10 ; 60 ; 1 ; curs) et p (0 ; 1 ; 0,01 ; curs).**

DOCU-MENTS DE SYNTHÈSE	FICHIERS	FONCTIONS, PARAMÈTRES D'ANIMATION OU DE FONCTION ET DESCRIPTION n (10 ; 60 ; 1 ; curs) signifie que l'on peut faire varier le paramètre n de 10 à 60 avec des pas de 1, à l'aide d'un curseur. curs peut être remplacé par bouton (à cliquer).
II Figure 3	**binomiale et normale.ggb**	**Animation GeoGebra:** illustration du théorème de Moivre-Laplace : convergence de la suite de variables centrées réduites Zn, avec **n (10 ; 300 ; 1 ; curs)** et **p (0 ; 1 ; 0,01 ; curs)** vers la loi normale centrée réduite.
III Figure 7	***visualisation probas normales.ggb***	***Animation GeoGebra :*** *illustration des calculs de probabilité (calcul intégral d'aires) P(a < x < b), avec les lois normales de moyenne* ***m (0 ; 5 ; 0,1 ; curs)*** *et d'écart type* ***σ (0 ; 5 ; 0,1 ; curs)****, avec* ***a (-5 ; 5 ; 0,1 ; curs)*** *et* ***b (-5 ; 5 ; 0,1 ; curs)****.* *On peut donc faire la représentation graphique de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.* *Et visualiser les probabilités des intervalles mu ± sigma (m ± σ), mu ± 2sigma (m ± 2σ), mu ± 3sigma (m ± 3σ).*
III Figure 6	*TaillesHommes.r*	***tailleshommes(n = 50000, mu = 175, sigma = 8)*** ***Fonction en R : Simulation*** *d'un échantillon (une série statistique) de n (50 000) tailles d'hommes tirés d'une distribution normale de moyenne* ***mu*** *et d'écart type* ***sigma****. L'histogramme est tracé, quelques paramètres de la série sont calculés. On obtient d'autres séries que celle illustrée dans le document. n, mu et sigma sont des paramètres que l'on peut changer à volonté.*
III Figure 8	***influence de mu et sigma.ggb***	***Animation GeoGebra :*** *Influence de la moyenne et de l'écart type sur la forme de la courbe représentative de la densité de la loi normale de moyenne* ***m (0 ; 7 ; 0,1 ; curs)*** *et d'écart type* ***σ (0,3 ; 3 ; 0,1 ; curs)****.*
IV-B	**intervalle de fluctuation première.alg**	**Algorithme-programme Algobox** de calcul des deux bornes de l'intervalle de fluctuation binomial exact, selon une méthode du document ressource de 1ère. : Queues symétriques (équilibrées) en probabilité **n** est la taille de l'échantillon, **p** est la probabilité de succès, **a** et **b** sont les deux bornes de l'IF. **Attention :** limité à n<70
IVB	**intervalle de fluctuation première.r**	**IFexact2(n = 65, p = .06, kobs = 8, proba = .95)** **Fonction en R :** IF binomial exact, selon une méthode du document ressource de 1ère : Queues symétriques (équilibrées) en probabilité **n** est la taille de l'échantillon, **p** est la probabilité de succès, **kobs** est le nombre de succès observé dans l'échantillon **proba** est le seuil de l'intervalle de fluctuation. **a** est le plus petit entier tel que P(X <= a) > 0,025 ; **b** est le plus petit entier tel que P(X <= b) >= 0,975 Une conclusion est proposée quant à l'hypothèse testée.
IV-B *AutresAlgoDuDoc.pdf*	***IF_BinomialExact1.r***	***IFexact1(n = 65, p = .06, kobs = 8, proba = .95)*** ***Fonction en R :*** *IF binomial exact, selon une méthode du document ressource de 1ère : Queues symétriques (équilibrées) en probabilité* ***n*** *est la taille de l'échantillon,* ***p*** *est la probabilité de succès,* ***kobs*** *est le nombre de succès observé dans l'échantillon* ***proba*** *est le seuil de confiance de l'intervalle de fluctuation.* ***a*** *est le plus grand entier tel que P(X < a) ≤ 0,025 ;* ***b*** *est le plus petit entier tel que P(X > b) ≤ 0,025* *Une conclusion est proposée quant à l'hypothèse testée.*
IV C	**exploration de l'intervalle de fluctuation asymptotique.r**	**pIFasy2_1(n = 400, p= .5, proba = .95)** **Fonction en R** : illustration de l'évolution de la probabilité binomiale de l'intervalle de fluctuation asymptotique **IF2 : (p ± u_{proba}×racine(p×(1 – p) / n))** en fonction de **n** et **p**. **n** est la taille de l'échantillon, **p** est la probabilité de succès, **proba** est la valeur seuil de la probabilité de l'IF.

DOCU-MENTS DE SYNTHÈSE	FICHIERS	FONCTIONS, PARAMÈTRES D'ANIMATION OU DE FONCTION ET DESCRIPTION n (10 ; 60 ; 1 ; curs) signifie que l'on peut faire varier le paramètre n de 10 à 60 avec des pas de 1, à l'aide d'un curseur. curs peut être remplacé par bouton (à cliquer).
IV C **Figure 9**	**exploration intervalle de fluctuation asymptotique.ods**	**Feuille de calcul tableur** permettant une visualisation des probabilités des intervalles de fluctuation asymptotiques de seconde et de terminale**.** **p** est la probabilité de succès. Pour celui de seconde, on peut conjecturer l'existence du seuil n_0 du paragraphe V-C-7.
IV C **Figure 11**	**intervalle de fluctuation seconde.r**	**pIFasy1_1(n = 700, p = .5, proba = .95)** **Fonction en R** : illustration de l'évolution de la probabilité binomiale de l'intervalle de fluctuation asymptotique **IF1 : (p ± 1 / racine(n))** en fonction de **n** et **p**. **n** est la taille de l'échantillon, **p** est la probabilité de succès, **proba** est la valeur seuil de la probabilité de l'IF.
IV E	**recherche du n0.alg**	**Algorithme-programme Algobox** de recherche, pour un **p** donné, de la plus petite valeur **n0** de **n** telle que la probabilité exacte que X appartienne à l'**IF1 (p ± 1 / racine(n))** soit au moins égale à 0,95. Valeurs de **n** au plus égales à 70, application numérique restreinte.
IV E	**recherche du n0.sce**	**Programme Scilab** de recherche, pour un **p** donné, la plus petite valeur **n0** de **n** telle que la probabilité exacte que X appartienne à l'**IF1 (p ± 1/racine(n))** soit au moins égale à 0,95.
AutresAlgoDuDoc.pdf	***nIFasy1_1.r***	***nIFasy1_1(nsup = 1000, probinf = .95)*** ***Fonction en R :*** *Pour les valeurs de* ***p*** *de 0,05 à 0,95, de 0,01 en 0,01, recherche la plus petite valeur n0 de* ***n*** *telle que la probabilité exacte que X appartienne à l'****IF1 (p 1 / racine(n))*** *soit au moins égale à probinf. Tableau des valeurs de n0 et graphique de n0 en fonction de p.*
V **Figures 14 et 15**	**intervalles de confiance simulés.r**	**simICdoc(n = 50, nbsim = 100, nbclass = 20)** **Fonction en R : Simulations** d'un peigne d'IC au niveau de confiance nominal de 0,95. nbclass est le nombre de classes de l'histogramme. La proportion de **p** dans la population est générée aléatoirement dans]0 ; 1[. Elle est affichée dans la console **R**.
	SimulICPropSimpl.r	***simIC(n = 50, nbsim = 100, nbclass = 20, moustache = 1.5)*** ***Fonction de R : Simulation*** *d'un peigne d'IC. nbclass est le nombre de classes de l'histogramme, moustache détermine la longueur des moustaches des boites. La proportion de p dans la population est générée aléatoirement dans]0 ; 1[. Le peigne est suivi de l'histogramme et de la boite à moustache de la distribution* ***simulée.***
V	**simulation sondage.xls**	**Simulation tableur** d'un intervalle de confiance d'une proportion **p** inconnue, calculé à partir d'un échantillon de taille 1000. **F9** pour refaire une autre simulation. On peut dévoiler ***p*** en mettant une couleur de police visible.
V	**intervalles de confiance simulés-peignes.ods**	**Simulation tableur** d'un peigne de **100** intervalles de confiance gaussiens d'une proportion **p (0% ; 100% ; 1% ; boutons)** au niveau de confiance c **(0% ; 100% ; 1% ; boutons)**. Pour chacun des **100** échantillons simulés, la feuille affiche f observé, l'intervalle de confiance (fourchette), VRAI si l'IC contient **p**, FAUX sinon, le pourcentage d'IC contenant **p**, et la représentation graphique de l'IC, en barre horizontale. On peut cacher ou faire afficher **p**. F9 pour lancer une nouvelle simulation de **100** échantillon de taille **n = 100**.
VI C **Figure 17**	***monte carlo.alg***	*Calcul approché par la méthode du « rejet » de l'intégrale de 0 à 1 de F1(x) (à saisir). Le nombre n de tirages est saisi en entrée.* *Graphique indiquant la surface atteinte par les tirages.*
VI C	***monte Carlo bis.alg***	*Calcul approché par la méthode de l'espérance de l'intégrale de 0 à 1 de F1(x) . Le nombre n de tirages est saisi en entrée.*
	commandes R.pdf	*Liste de commandes R.*
	Carte de référence R.pdf	*Fonctions vitales, outils de programmation sous R.*

B. Prise en main rapide du logiciel R

QUELQUES EXEMPLES COMMENTÉS POUR DÉMARRER AVEC R
PROBABILITÉS, SIMULATIONS ET EXPLORATION DES SÉRIES SIMULÉES

I - INSTALLATION – MISE EN ROUTE

1° Installation

● **R** est un logiciel libre et gratuit téléchargeable à http://cran.univ-lyon1.fr, (site miroir) le site parent étant www.r-project.org. Il est multiplateforme, c'est à dire qu'il existe des versions qui tournent sous **linux, mac et windows**.

● Il existe quelques ouvrages et un grand nombre de sites en français, d'IUT, d'universités, d'organismes de recherche et d'écoles d'ingénieurs, traitant de l'utilisation de **R** (voir bibliographie).

● L'installation se fait très rapidement et simplement à partir du fichier exécutable téléchargé. Ce "package" de base est complet et permet d'effectuer tous les traitements statistiques courants (description, analyse exploratoire des données, probabilités, simulation, tests statistiques).

● L'utilisation de **R** peut se faire en ligne de commande, l'installation de base y suffit. On peut aussi utiliser certaines fonctionnalités de **R** sous forme classique de menus cliquables en français, il faut alors installer le package **"Rcmdr"**. Les commandes **R** correspondant à chaque menu sont affichées, ce qui facilite une première prise en main. La rédaction et la lecture des lignes de commande **R** sont grandement facilitées par l'utilisation d'un éditeur spécifique, **"Tinn-R"** (téléchargeable à http://sourceforge.net/projects/tinn-r) qui identifie toutes les commandes **R** et leurs paramètres et les colorie de façon différenciée pour en faciliter l'identification et l'utilisation.

● Dans les fichiers mis à disposition, figurent deux "Reference card" (**"Rrefcard2.pdf" et "ShortRefCard.pdf"**) qui contiennent les principales commandes **R** classées par thème.

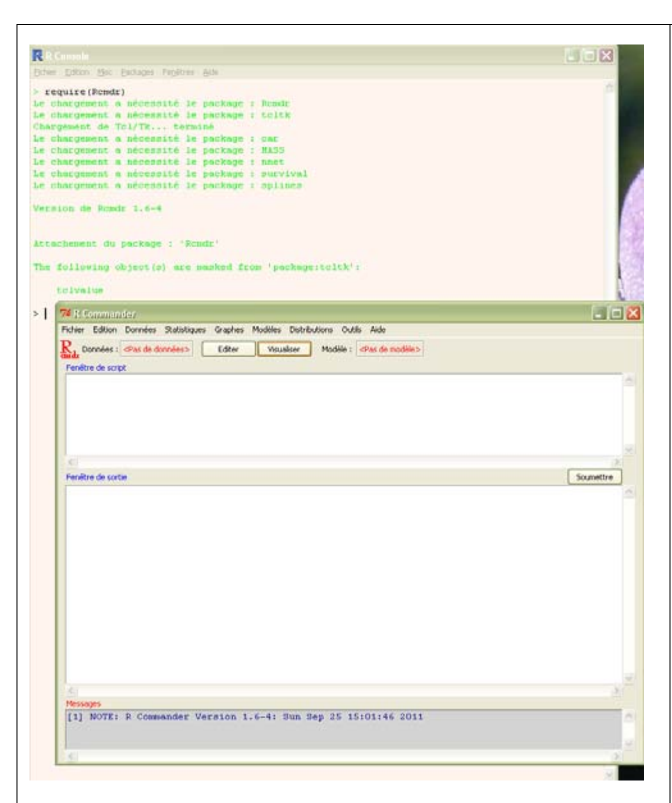
● La communauté des utilisateurs de **R** développent, pour les besoins des structures dans lesquelles ils travaillent ou des recherches engagées, des "packages" "agréés" par une "R-core-team", qu'ils mettent à disposition sur les sites et qui peuvent s'installer automatiquement. Il en existe plusieurs centaines. Deux sont mentionnés dans certains fichiers annexés au document ressource, qui sont **"lattice"** (graphismes avancés) et **"Hmisc"** (présentation avancée de résumés numériques). De même il existe un package (et un ouvrage en français) dédiés à l'analyse des données à la française, **"FactoMineR"**, développé par trois enseignants chercheurs de l'AgroCampus de Rennes.

2° Utilisation de l'interface avec menus à cliquer en français : "Rcmdr"

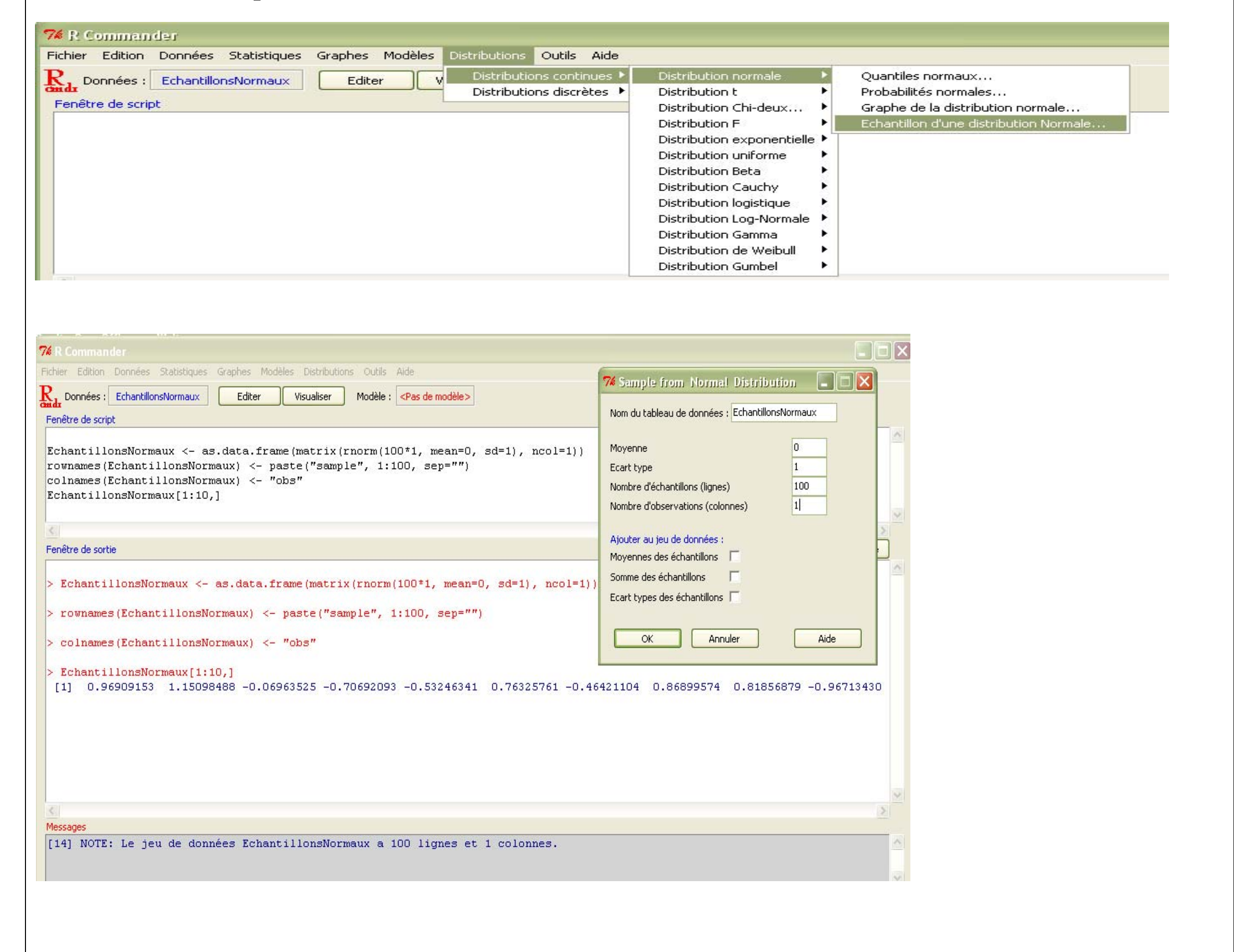
● On peut utiliser **R** en mode **menus à cliquer** en français. Le code de chaque commande sollicitée par les menus apparaît dans la "Fenêtre de script" est exécutée dans la "Fenêtre de sortie", qui affiche aussi les résultats. Cet affichage des commandes correspondant aux menus cliqués permet l'apprentissage progressif des codes des commandes **R**. C'est aussi un bon outil pour initier les élèves.

Il faut pour cela installer le package **Rcmdr :** Après avoir lancé **R** (RGui) et être connecté à internet, c'est automatique via le menu "Package – Installer le package"). Pour l'exécuter il faut cliquer le menu Package – Charger le package" ou taper **require(Rcmdr)** dans la console **R**.

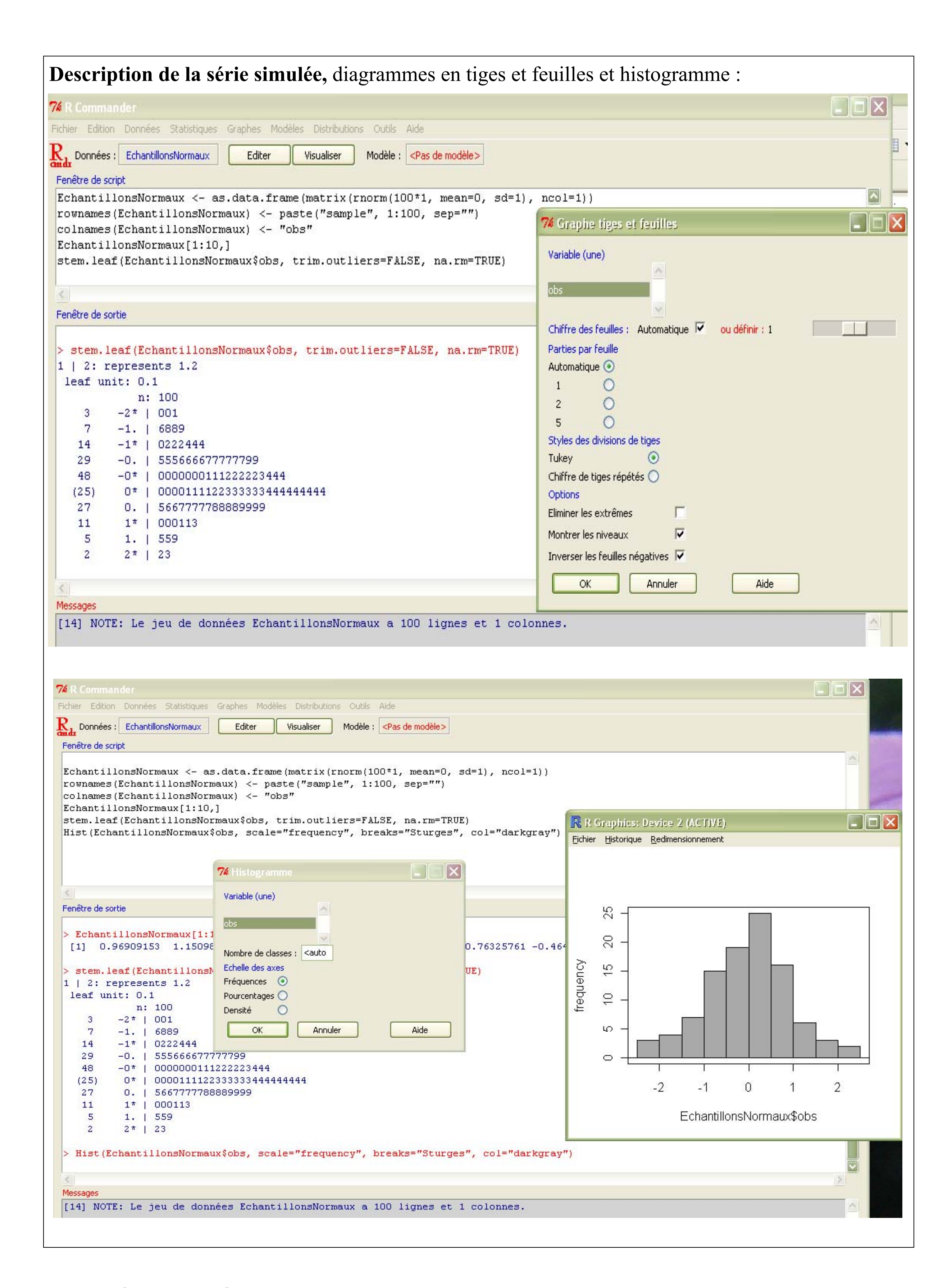
Voici un exemple simple de simulation d'une série de nombres tirés d'une loi normale centrée réduite, que l'on décrit ensuite par un tiges et feuille et un histogramme.

	Chargement et exécution de Rcmdr L'interface des menus à cliquer en français est lancée.

Utilisation directe : simulation de 100 nombres distribués selon la loi normale centré réduite et on fait afficher les 10 premières valeurs de la série simulée "EchantillonsNormaux".



Description de la série simulée, diagrammes en tiges et feuilles et histogramme :



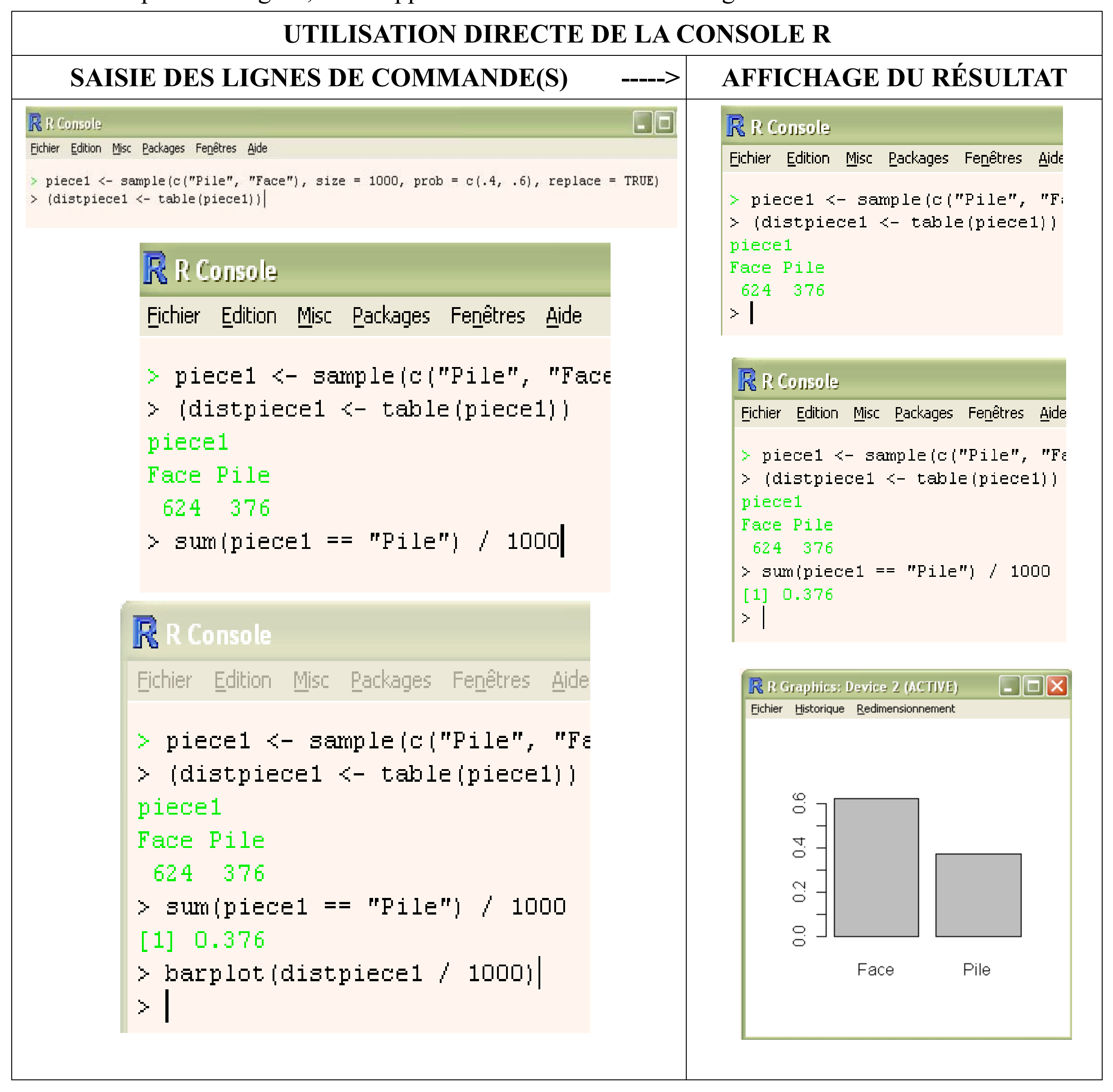
3° Création et exécution des lignes de commandes

► Pour enchaîner les traitements ou programmer des fonctions **R**, il faut passer par les lignes de commande. On peut le faire directement dans la "console **R**", mais il est plus facile d'utiliser l'éditeur **Tinn-R** car il permet de saisir, d'enregistrer et d'utiliser les lignes de code que l'on

crée pour un traitement ou une fonction.

► On peut saisir et exécuter directement les lignes de commandes dans la console **R (R Console)**.

Pour accéder à la console **R**, il faut cliquer sur l'icône **R** créée lors de l'installation. Un fenêtre **RGui** (**G**raphic **u**ser **i**nterface) s'ouvre, qui contient, par défaut la console **R**, dans laquelle s'écrivent et s'exécutent les commandes et les fonctions **R**. La console **R** s'utilisera de préférence lorsque chaque ligne de commande est exécutée au fur et à mesure du traitement prévu. On exécute une ligne de commande en appuyant sur la touche entrée (valider). Une ligne peut comporter plusieurs commande séparées par des **";"**. Une commande peut s'écrire sur plusieurs lignes, des + apparaissent alors en début de ligne.



► Lignes de commandes saisies dans **Tinn-R** et exécutées dans la console **R**.

Lorsque l'on veut faire des traitement par lots (exécuter plusieurs lignes de commandes groupées) ou programmer des fonctions, l'utilisation de l'éditeur **Tinn-R** facilitera grandement l'écriture, la vérification et l'exécution des procédures ainsi créées.

La procédure classique consiste à suivre les étapes suivantes :

a Écriture du code dans **Tinn-R**.

Tinn-R - [E:\HubW\CoursMath\CoursProba\Simulation\InitiationR1.r*]

File Project Edit Format Marks Insert Search Options Tools R View Window Web Help

R complex | Français (France)

InitiationR1.r*

```
#********LIGNES DE COMMANDE pile ou face pas forcément équiprobable **********
piece1 <- sample(c("Pile", "Face"), size = 1000, prob = c(.4, .6), replace = TRUE)
(distpiece1 <- table(piece1))
sum(piece1 == "Pile") / 1000
barplot(distpiece1 / 1000)
```

b Lancer la console **R** (Rgui pour Graphic User Interface) à partir des menus **Tinn-R**.

Tinn-R - [E:\HubW\CoursMath\CoursProba\Simulation\InitiationR1.r*]

File Project Edit Format Marks Insert Search Options Tools R View Window Web Help

Start/close and connections: Rterm (start) / Rgui (start) / Server (connections and tests)

Rterm

Customize

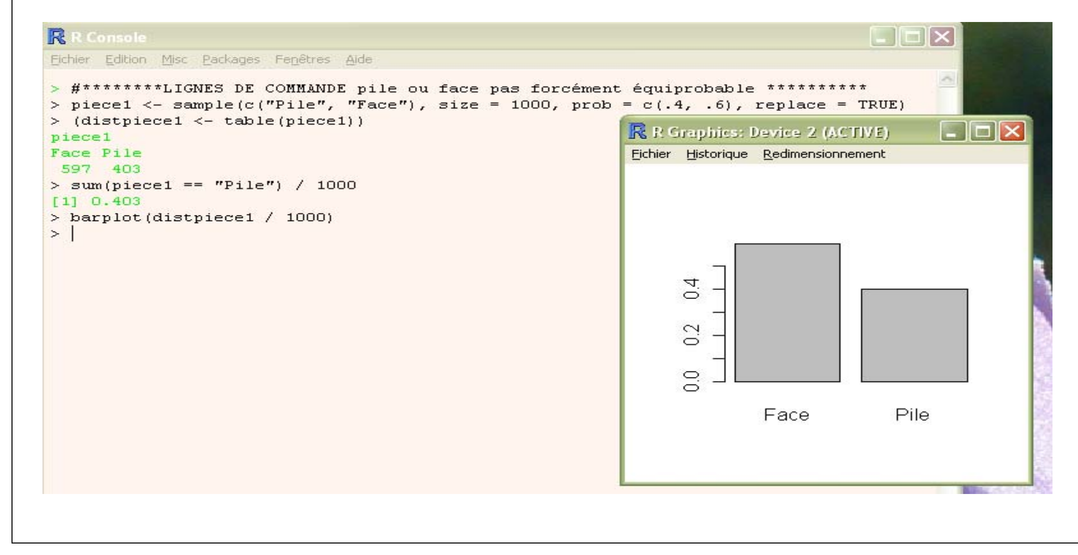
Configure

Send

Editor: current line to top

Control

c Copier coller les lignes de commande de **Tinn-R** dans la console **R**. Les lignes de commandes sont exécutées automatiquement et les résultats affichés, dans la console pour les résultats numériques, dans une ou plusieurs fenêtres graphiques, pour les graphiques.



3° Utilisation de fichiers contenant les lignes de commande ou les fonctions à exécuter

Pour utiliser les exemples fournis dans des fichiers, plusieurs cas peuvent se présenter.

► S'il s'agit de lignes de commandes fournies **dans le texte d'un fichier texte**, il suffit alors de sélectionner les lignes concernées et de les copier-coller dans la console **R** où elles seront automatiquement exécutées (sauf peut-être la dernière qu'il faudra valider) et les résultats seront affichés. Si on veut les modifier pour les adapter il faut soit les modifier dans le traitement de

texte ou bien passer par **Tinn-R**.
Par contre si c'est un fichier du type pdf il risque d'y avoir des problèmes causés par le fait que les fins de ligne sont transformés en fin de paragraphe. Il vaut mieux donc éviter, au moins dans la période d'apprentissage.
Il peut arriver, rarement, que la console **R** interprète mal certains caractères du traitement de texte, ayant un aspect visuel "normal". L'erreur est alors difficilement décelable, sauf en passant par **Tinn-R**.

► S'il s'agit de **lignes de commandes constituant une fonction**, fournies **dans le texte d'un fichier texte**, on procède comme précédemment en prenant bien soin de s'assurer que la dernière ligne a bien été validée (dans le cas contraire un + apparaît en début de ligne). La fonction vient d'être introduite en mémoire. Pour l'utiliser il suffit de saisir son **nom**, suivi sans espace de ().
Ce **nom** figure obligatoirement en début du code. Dans ce cas, ce sont les valeurs des paramètre par défaut, indiquées dans la première ligne du code de la fonction, qui seront prises en compte. Pour utiliser d'autres valeurs, il suffit de les indiquer à l'intérieur des (). Exemple : **pileface()** réalise 2000 simulations du jet de deux pièces équilibrées (cf. le **II**). Pour en réaliser 6000, je saisis **pileface(6000)** ou **pileface(nbsim = 6000)**.

► Une bonne solution consiste à disposer des fichiers texte au format **Tinn-R** (extension **.r**) contenant les lignes de codes voulues. Un fichier **Tinn-R** est un simple fichier texte basique. Il peut contenir les lignes de code de une ou plusieurs procédures, les lignes de code de une ou plusieurs fonctions ou un mélange de lignes de procédures et de ligne de fonctions, comme par exemple dans le fichier **"InitiationR1.r"** qui contient les lignes de code des procédures et les lignes de codes des fonctions présentées dans les tableaux du **II**.
Il suffit alors de copier-coller les lignes de code que l'on veut exécuter.

► Une autre solution pertinente lorsqu'il s'agit d'utiliser une fonction, consiste à la faire lire et charger directement depuis le fichier source sur le disque dur. Prenons l'exemple de la fonction **IFexact1()**, dont les lignes de code sont dans le fichier **IF_BinomialExact1.r**. Il peut d'abord indiquer à **R** le dossier par défaut dans lequel se trouve le fichier à charger, en utilisant le menu « Fichier–Changer le répertoire courant ». Puis taper dans la console **R**, la commande **source("IF_BinomialExact1.r")**. Pour exécuter la fonction, il suffit ensuite de taper **Ifexact1()** ou, par exemple, **IFexact1(n = 150, p = .2, kobs = 25, proba = .95)**.

II - QUELQUES EXEMPLES SIMPLES COMMENTÉS

Convention typographique : Les lignes en orange contiennent les lignes de commande **R**. *Les lignes en italique vert* sont des parties de réponses de **R** (à ne pas coller dans la console). Les textes en **turquoise** ou **bleu clair** contiennent le code des fonctions **R**. **Les # commentaires sont en noir**, précédés de #. Les **mots en rouge sombre** sont les mots réservés aux commandes et fonctions internes de **R**.

`#**LIGNES DE COMMANDE pile ou face pas forcément équiprobable **`
`piece1 <- sample(c("Pile", "Face"), size = 1000,`
`   prob = c(.4, .6), replace = TRUE)`
`(distpiece1 <- table(piece1))`
`barplot(distpiece1 / 1000)`
`sum(piece1 == "Pile") / 1000`
	<- est la commande d'affectation. C() créé un vecteur (au sens informatique). sample tire size(1000) fois avec remise dans l'ensemble {"Pile", "Face"}, avec une probabilité de 0,4 pour "Pile" et de 0,6 pour "Face". Les n(1000) résultats obtenus sont mis dans le vecteur piece1. table(piece1) effectue le tri à plat (tableau des effectifs) de la série obtenue.
	barplot effectue le diagramme en barre.
	sum(piece1 == "Pile") compte le nombre de "Pile".

`#**LIGNES DE COMMANDE pile ou face avec 2 pièces différentes **`
`piece1 <- sample(c("Pile", "Face"), size = 1000,`
`   prob = c(.4, .6), replace = T)`
`piece2 <- sample(c("Pile", "Face"), size = 1000,`
`   prob = c(.5, .5), replace = T)`
`deuxpieces <- paste(piece1,piece2, sep = "")`
`table(deuxpieces)`
`barplot(table(deuxpieces) / 1000)`
	La pièce 1 est déséquilibrée, la pièce 2 non.
	
	paste réuni deux à deux chacun des 1000 résultats de piece1 et piece2, par exemple PileFace ...

``
#**FONCTION jet simultané de 2 pièces identiques équilibrées**
pileface <- function(nbsim = 2000){
 resultats <- rep(NA, 3)
 names(resultats) <- c("deuxpils", "deuxfaces", "autre")
 for(i in 1:nbsim){
 pieceA <- sample(c("Pile", "Face"), 1)
 pieceB <- sample(c("Pile", "Face"), 1)
 if(pieceA == "Pile" & pieceB == "Pile") {
         resultats[1] <- resultats[1] + 1} else {
          if(pieceA == "Face" & pieceB == "Face") {
                 resultats[2] <- resultats[2] + 1} else {
                  resultats[3] <- resultats[3] + 1   }
                                        }
                 }
 print(resultats)
 print(resultats / nbsim)
 barplot(resultats / nbsim)
}
``
	Fonction effectuant nbsim (2000) lancers de deux pièces.
	Paramètres et valeurs par défaut,début du corps de fonction
	Initialisation d'un "vecteur" à 3 composantes
	nommer les 3 composantes du vecteur
	début de la boucle des nbsim lancers
	pieceA équilibrée
	pieceB équilibrée
	comptage des "Pile Pile"
	comptage des "Face Face"
	comptage des autres résultats.
	Fin des tests et
	des boucles
	Affichage des résultats.
	
	Fin du corps de fonction.

``` #Le problème historique du grand duc de Toscane (Somme de 3 dés) #****LIGNES DE COMMANDE Simulation GrandDuc**** de1 <- sample(c(1:6), 1000, replace = TRUE) (distde1 <- table(de1)) barplot(distde1 / 1000) de2 <- sample(c(1:6), 1000, replace = T) (distde2 <- table(de2)) dev.new() barplot(distde2 / 1000) de3 <- sample(c(1:6), 1000, replace = T) (distde3 <- table(de3)) dev.new() barplot(distde3 / 1000) de <- de1 + de2 + de3 (distde <- table(de)) dev.new() barplot(distde / 1000) nbneuf <- sum(de == 9) nbdix <- sum(de == 10) cat("Fréquence des neuf =", nbneuf / 1000, "\n") cat("Fréquence des dix =", nbdix / 1000, "\n") barplot(distde, xlab = "Somme des numéros des 3 faces", ylab = "Effectifs simulés", main = paste("Diagramme en barre de 1000 simulations\n du jet de 3 dés équilibrés")) ```	1000 jets d'un dé équilibré, la série des 1000 résultats est mise dans le vecteur de1 tableau des effectifs de la série obtenus diagramme en barres ouvre une nouvelle fenêtre graphique même chose avec un autre dé équilibré, la série des 1000 résultats est mise dans le vecteur de2 même chose avec un autre dé équilibré, la série des 1000 résultats est mise dans le vecteur de3 somme, composante à composante des 3 vecteurs, les 1000 résultats sont mis dans le vecteur de. Tableau des effectifs de la série de, diagramme en barres comptage du nombre de neuf et du nombre de 10. affichage des résultats.

``
#****FONCTION simulation Grand Duc********
simgrandduc <- function(nbsim=1000){
 de1 <- sample(c(1:6), nbsim, replace = TRUE)
 de2 <- sample(c(1:6), nbsim, replace = TRUE)
 de3 <- sample(c(1:6), nbsim, replace = TRUE)
 de <- de1 + de2 + de3
 distde <- table(de)
 print(distde)
 barplot(distde / nbsim)
}
``
	La fonction effectue nbsim lancers de 3 dés. On additionne les résultats obtenus
	
	tableau des effectifs des 1000 sommes obtenues et leur diagramme en barres.

``
#**LIGNES DE COMMANDE probabilité Grand Duc********
#**Somme des valeurs des faces obtenues en jetant 3 dés**
#***Calculer avec le modèle mathématique "exact"****
#****Construire l'univers correspondant à cette expérience***
serieS3de <- array(data = NA, dim = c(6, 6, 6))
 for(i in 1:6){
   for(j in 1:6){
     for(k in 1:6){
        serieS3de[i, j, k] <- i + j + k
                 }
               }
           }
 serieS3de
 (distS3de <- table(serieS3de))
 nbneuf <- sum(serieS3de == 9)
 nbdix <- sum(serieS3de == 10)
 cat("Probabilité de neuf =",nbneuf / 216,"\n")
 cat("Probabilité de dix =",nbdix / 216,"\n")
 dev.new()
 barplot(distS3de)
 graphics.off()
``
	Initialisation d'un tableau de dimension3
	
	boucles imbriquées pour parcourir tous les triplets possibles et générer l'univers des résultats possibles : les 216 valeurs obtenues sont mises dans le vecteur serieS3de.
	
	Tableau des effectifs
	
	Comptage du nombre de 9 et de10
	calcul de la probabilité.

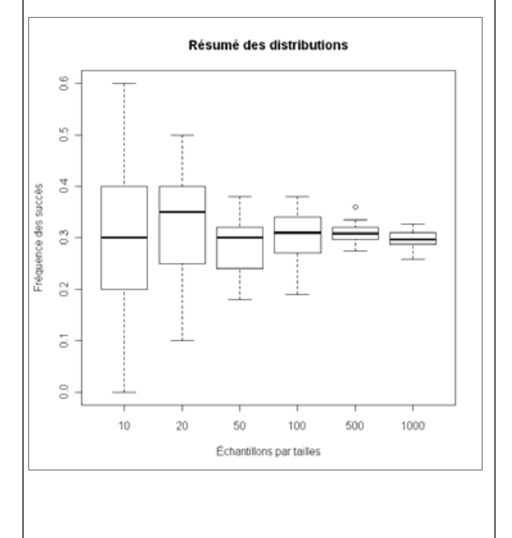
<pre>#**Fonction probabilité Grand Duc********
probgranduc <- function(){
serieS3de <- array(data = NA, dim = c(6, 6, 6))
 for(i in 1:6){
   for(j in 1:6){
     for(k in 1:6){
        serieS3de[i, j, k] <- i + j + k
                  }
                }
            }
 serieS3de
 distS3de <- table(serieS3de)
 nbneuf <- sum(serieS3de == 9)
 nbdix <- sum(serieS3de == 10)
 cat("Probabilité de neuf =",nbneuf / 216,"\n")
 cat("Probabilité de dix =",nbdix / 216,"\n")
 print(distS3de)
 barplot(distS3de / 216)
}</pre>
	Même chose sous la forme d'une fonction.

<pre>######LIGNES DE COMMANDES-- CALCULS DE PROBABILITÉS ##########
#-------------- Loi binomiale ---------------
# Calcul de P(A <= X <= B), X étant une v.a. de distribution 	
# binomiale 	
# de paramètres n=100 et p=0,52. 	
# Les exemples choisis peuvent servir de base à une réflexion 	
# sur les différentes façons de déterminer un intervalle de 	
# fluctuation, à partir 	
# de l'exemple 1 (Monsieur Z du document d'inspection). 	
# P(42<=X<=62): 	
sum(dbinom(42:62, 100, .52))
# P(43<=X<=62): 	
sum(dbinom(43:62, 100, .52))
# P(42<=X<=61): 	
sum(dbinom(42:61, 100, .52))
# P(X<=41) ; P(X<=42) ; P(X<=43): 	
pbinom(41:43, 100, .52)
#----- Combinaisons et loi hypergéométrique --------
# Calcul de P(X=3) ; x=3 ; X de loi hypergéométrique de 	
paramètres
# m = 3, n = 5, k = 4, 	
(proba <- choose(3, 3) * choose(5, 4-3) / choose(3+5, 4))
# Pour vérification : 	
(proba <- dhyper(x = 3, m = 3, n = 5, k = 4))</pre>
	42:62 génère la suite des entiers de 42 à 62
	dbinom génère un vecteur des probabilités binomiales de P(X=42) à P(X=62). sum en fait la somme
	
	choose calcule les combinaisons
	
	dhyper calcule les probabilités hypergéométriques.

```
# **LIGNES DE COMMANDES ****** SIMULATIONS NUMÉRIQUES *****
# Illustration graphique de la loi des grands nombres :
# Lorsque n augmente, on observe les suites de distributions
# Les fréquences tendent vers une valeur limite : la probabilité
# Les écarts à cette valeur limite sont de plus en plus faibles
#
nechant <- rep(c(10, 20, 50, 100, 500, 1000),
               c(20, 20, 20, 20, 20, 20))
simfreqar <- c(rbinom(20, 10, .3)/10,
             rbinom(20, 20, .3)/20, rbinom(20, 50, .3)/50,
             rbinom(20, 100, .3)/100, rbinom(20, 500, .3)/500,
             rbinom(20, 1000, .3)/1000)
dev.off()
plot(nechant, simfreqar, xaxp = c(0, 1000, 10),
  main = "Distributions des fréquences des succès")
dev.new()
plot(as.factor(nechant), simfreqar,
  xlab = "Échantillons par tailles",
  ylab = "Fréquence des succès",
  main = "Résumé des distributions")
```

Pour s'entrainer : Réaliser cette simulation sous forme d'une fonction paramétrable...

On génère les tailles d'échantillons comme suit :
20 répétitions du nombre 10, 20 répétitions du nombre 20, ….., 20 répétitions du nombre 1000, mise dans nechant qui constitueront les abscisses des points à tracer.
20 nombres au hasard sont tirés dans une distribution binomiale(10, 0,3), 20 nombres au hasard sont tirés dans une distribution binomiale(20, 0,3), …, 20 nombres au hasard sont tirés dans une distribution binomiale(1000, 0,3), Les fréquences sont calculées en même temps.
Nuage de points des fréquences en fonction des tailles d'échantillons.
Résumé des séries de 20 valeurs (binomiales) sous formes de boites à moustaches.



Annexe 5 Méthode de Monte-Carlo [25]

La méthode de Monte-Carlo est une méthode probabiliste permettant le calcul approché d'intégrales (simples ou multiples) de fonctions quelle que soit leur régularité. C'est cette propriété qui explique son intérêt par rapport aux méthodes déterministes classiques.

Pour simplifier cette présentation, on suppose que l'on cherche à calculer $p = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ pour une fonction continue sur [0,1] à valeurs dans [0,1].

A. Méthode dite du « rejet »

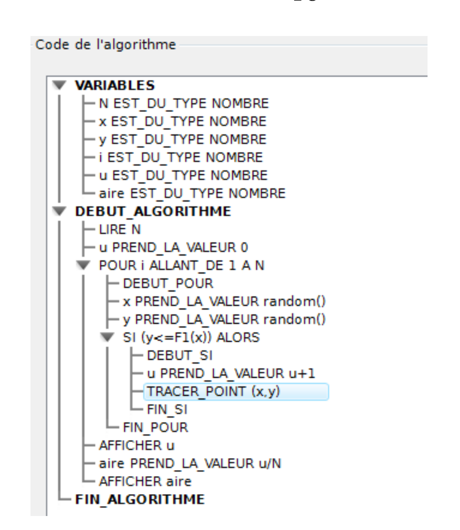
Comme p est donc l'aire du domaine $D = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 \,/\, y \leq f(x)\right\}$, une première méthode possible est de tirer aléatoirement un grand nombre de points du carré $[0,1]^2$ et de faire le quotient entre le nombre de points situés dans le domaine D et le nombre total de points.

Exemple

On peut voir sur la figure 17 ci-dessous le résultat graphique dans le cas de la fonction $f(x) = \frac{2}{3}(x^3 - x^2 + 1)$.

Avec $N = 10000$ points, une exécution de l'algorithme donne une valeur approchée de $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ égale à 0,6056.

La valeur exacte est $\frac{11}{18} \approx 0,6111$.



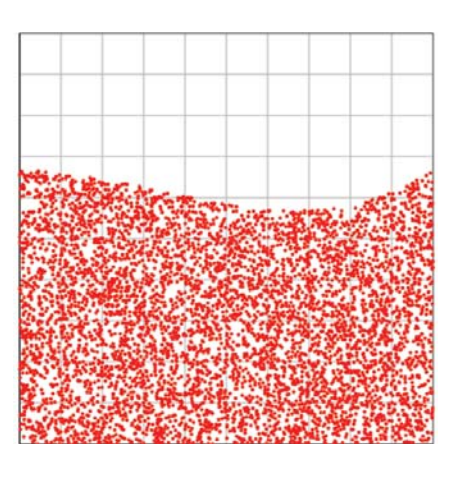
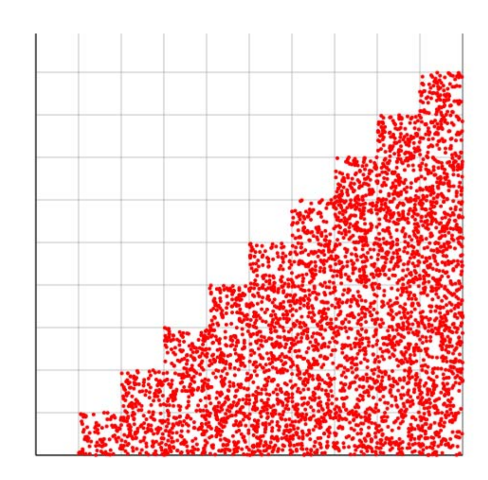


Figure 17 : tirage de 10000 points de $[0,1]^2$

[25] Ce paragraphe peut être réservé à une seconde lecture : son contenu n'est pas au programme mais peut être traité dans le cadre de l'accompagnement personnalisé en TS.



Voici ce que donne l'algorithme pour la fonction $f(x) = Ent(10x)/10$ où Ent désigne la partie entière.

On voit que la méthode fonctionne même avec des fonctions présentant des discontinuités. C'est son avantage sur les méthodes de calcul approché classiques (trapèzes, Simpson,...).

Document associé : monte carlo.alg

Justification

On considère deux variables indépendantes X et Y suivant la loi uniforme sur [0,1].

On admet que $\mathrm{P}(Y \leq f(X)) = p$. L'exemple ci-dessous permet de vérifier cette propriété sur un cas particulier.

Si on considère $(X_1, Y_1), \ldots\ldots, (X_n, Y_n)$ n couples de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur [0,1], on a $\mathrm{P}(Y_k \leq f(X_k)) = p$ pour tout $k \in \{1,..,n\}$.

Si S_n représente le nombre de couples (X_k, Y_k) tels que $Y_k \leq f(X_k)$, alors S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p. La loi des grands nombres[26] permet d'affirmer que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers p c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \to 0$ quand n tend vers l'infini.

Si on génère avec un ordinateur un grand nombre de couples aléatoires (X_k, Y_k), la proportion f de ces couples pour lesquels $Y_k \leq f(X_k)$ fournit donc une valeur approchée de p.

De plus si $n \geq 30$ et $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$ alors l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau 0,95.

Avec $n = 10000$ on obtient une précision de 0,01 avec une confiance de 0,95.

Exemple

On prend ici la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et on pose $Z = f(X) - Y = X^2 - Y$ où les deux variables indépendantes X et Y suivent la loi uniforme sur [0,1].

On a $p = \mathrm{P}(Y \leq X^2) = \mathrm{P}(Z \geq 0)$.

On admet que la densité de Z est la fonction g définie sur [-1,1] par $\begin{cases} g(x) = \sqrt{x+1} & si \quad x \in [-1,0] \\ g(x) = 1 - \sqrt{x} & si \quad x \in [0,1] \end{cases}$

Alors $\mathrm{P}(Z \geq 0) = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

[26] Voir annexe 1.

B. Méthode de l'espérance

On admet le résultat suivant :

Si X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur [0,1] et si f est une fonction continue sur [0,1] alors la variable aléatoire $Y = f(X)$ possède une espérance égale à $p = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.[27]

L'exemple ci-dessous donne une approche de ce résultat.

Si on considère n variables indépendantes $X_1,\ldots\ldots,X_n$ suivant une loi uniforme sur [0,1], alors la variable $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}{n}$ converge en probabilité vers p.

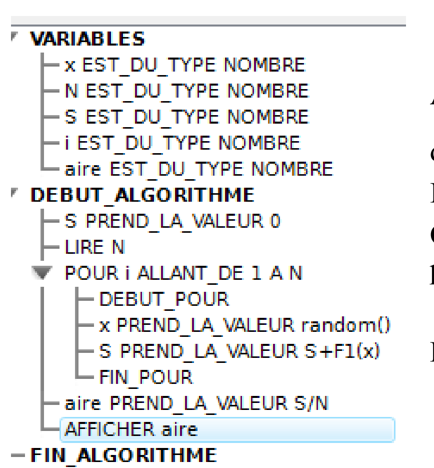
Exemple

On prend ici la fonction f définie par $f(x) = -\ln(1-x)$ pour $x \in [0,1[$ et on pose $Y = f(X) = -\ln(1-X)$ où X suit une loi uniforme sur [0,1].

On a $\mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}\left(X \leq 1-\mathrm{e}^{-x}\right) = 1-\mathrm{e}^{-x}$ pour $x \in [0,+\infty[$.

Donc Y suit une loi exponentielle de paramètre 1. On sait alors que $\mathrm{E}(Y) = 1$.

Le calcul de l'intégrale $\int_0^1 -\ln(1-x)\mathrm{d}x$ est un exercice classique d'analyse.


```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  aire EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  S PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE N
  POUR i ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR random()
    S PREND_LA_VALEUR S+F1(x)
    FIN_POUR
  aire PREND_LA_VALEUR S/N
  AFFICHER aire
FIN_ALGORITHME
```

Avec N=10000 et la fonction $f(x) = \dfrac{2}{3}(x^3 - x^2 + 1)$, une exécution de l'algorithme donne une valeur approchée de 0,6101.

Il peut être intéressant de comparer l'efficacité des deux méthodes.

On peut constater que la méthode de l'espérance est en général un peu plus précise.

Document associé : monte Carlo bis.alg

Remarque

La méthode de Monte-Carlo est couramment utilisée pour calculer des aires ou des volumes. Elle est plus aisée à mettre en œuvre que des méthodes déterministes.

[27] C'est un cas particulier d'un théorème de probabilité connu sous le nom de « théorème du transfert ».

Annexe 6 Comparaison de deux frequences et difference significative

A. Une situation tres fréquente en sciences experimentales et en economie

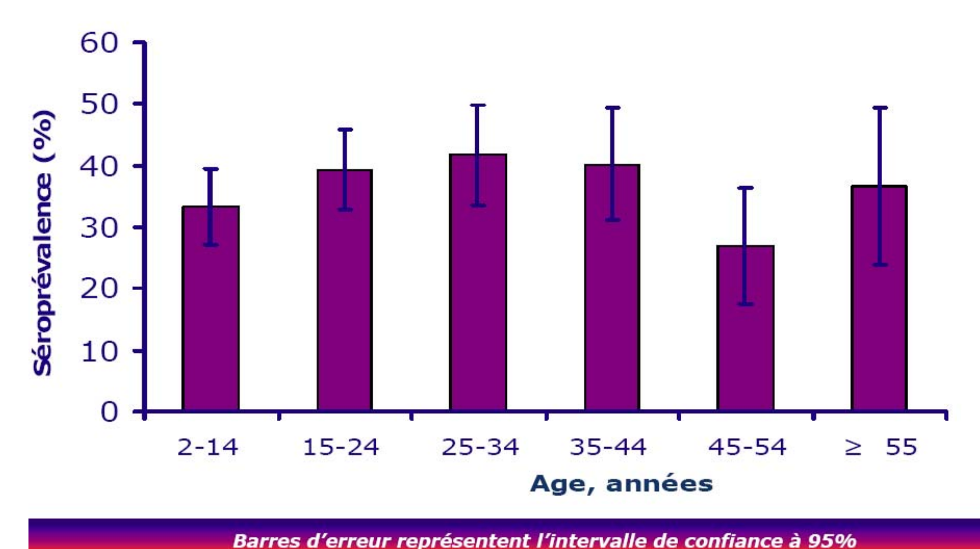
Une situation très fréquente dans les démarches expérimentales est d'avoir à comparer deux séries de mesures, ou deux fréquences, pour étudier par exemple l'influence d'un facteur. On peut alors utiliser un test de comparaison (mais il s'agit alors d'une « boîte noire » dont on ne peut que difficilement justifier le fonctionnement au niveau des classes de terminales) ou, ce qui est souvent pratiqué dans les autres disciplines, comparer deux intervalles de confiance ou « barres d'erreurs ».

Exemple 1 : erreurs de mesure
Un document traitant de « l'estimation des incertitudes sur les erreurs de mesure » (Université de Strasbourg – Sciences physiques) indique qu'on peut « comparer des valeurs de façon très simple, par comparaison des segments d'incertitude » (il s'agit généralement d'intervalles de confiance à 95 %). « Les segments doivent avoir une partie commune ; dans le cas contraire, soit l'incertitude est trop faible (mauvaise évaluation de l'erreur), soit il y a un résultat erroné. Cette méthode est intéressante pour une comparaison globale de résultats expérimentaux, provenant par exemple d'expériences différentes. »

Exemple 2 : prévalence du chikungunya à Mayotte







Deux intervalles de confiance non disjoints : pas de différence significative.

Le paragraphe qui suit, bien que s'appuyant sur un certain nombre de résultats admis, a pour objectifs de donner des éléments de justification du critère retenu en terminale STI2D-STL pour juger d'une différence significative de deux proportions.

B. Comparaison de deux frequences

On souhaite comparer les proportions p_1 et p_2 d'un même caractère, dans deux populations distinctes, à partir de l'observation des fréquences f_1 et f_2 observées sur un échantillon de chacune des deux populations. La question posée est de savoir si la différence $f_1 - f_2$ est significative.

On suppose que les proportions des deux populations sont les mêmes : $p_1 = p_2$.
Sous cette hypothèse d'égalité des proportions des deux populations, la variable aléatoire $F_1 - F_2$, qui à chaque paire d'échantillons de taille n_1 et n_2, respectivement issus de chacune des deux populations, associe la différence $f_1 - f_2$ des fréquences observées, suit approximativement pour n_1 et n_2 assez grands, la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{f_1(1-f_1)}{n_1} + \frac{f_2(1-f_2)}{n_2})$.

Remarque
L'espérance de la variable $F_1 - F_2$ égale à la différence $p_1 - p_2$ est nulle compte tenu de l'hypothèse. La variance de la variable $F_1 - F_2$ est égale à la somme des variances car les variances s'ajoutent si l'on suppose les variables F_1 et F_2 indépendantes.

Dans ces conditions, on peut déterminer l'intervalle de fluctuation de la variable $F_1 - F_2$ au seuil de 5%, d'où :

$$P\left(-1{,}96\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1} + \frac{f_2(1-f_2)}{n_2}} \leq F_1 - F_2 \leq 1{,}96\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1} + \frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}\right) = 0{,}95.$$

On conclut en disant que l'observation d'une différence $f_1 - f_2$, obtenue à partir des fréquences observées, vérifiant $|f_1 - f_2| > 1{,}96\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1} + \frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}$ remet en question l'hypothèse $p_1 = p_2$ puisque avec l'hypothèse $p_1 = p_2$ cette situation n'a que 5% de chances de se produire.

C. Intersection de deux intervalles de confiance

Conformément aux notions présentées en classe de terminale, on peut déterminer à partir de l'observation f_1, un intervalle de confiance pour la proportion p_1 au niveau de confiance de 95% :

$$\left[f_1 - 1{,}96\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1}}, f_1 + 1{,}96\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1}}\right].$$

De même, on peut déterminer, à partir de l'observation f_2, un intervalle de confiance pour la proportion p_2 au niveau de confiance de 95 % :

$$\left[f_2 - 1{,}96\sqrt{\frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}, f_2 + 1{,}96\sqrt{\frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}\right].$$

On peut alors décider qu'il existe une « différence significative » entre f_1 et f_2 lorsque les intervalles de confiance précédents sont disjoints, c'est-à-dire lorsque :

$$|f_1 - f_2| > 1{,}96\left(\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1}} + \sqrt{\frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}\right).$$

Si l'on compare ce critère de « différence significative » au précédent, on constate qu'il est plus « sévère » puisque :

$$\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1}} + \sqrt{\frac{f_2(1-f_2)}{n_2}} \geq \sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1} + \frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}.$$



Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe de première
générale et technologique

Analyse

mars 2012

Table des matières

Introduction

L'enseignement de l'analyse en classe de première constitue un enjeu d'importance pour la formation mathématique des élèves. L'objectif est de doter ces derniers d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets.

Les outils classiques, comme les fonctions, la dérivation et les suites, prennent vie tout au long de la classe de première. Les grandes problématiques du programme, éclairées par quelques scénarios pédagogiques développés tout au long de ce document ressource, sont :

P1 : Comment prendre en compte les acquis des élèves ?

P2 : Comment intégrer les outils-logiciels aux pratiques de classe ?

P3 : Comment travailler par compétences au lycée ?

P4 : Comment utiliser des évaluations diagnostiques ?

P5 : Comment différencier l'enseignement?

P6 : Comment favoriser la diversité de l'activité mathématique des élèves ?

P7 : Comment faire vivre l'algorithmique, la logique et le raisonnement ?

P8 : Comment aider les élèves à analyser leurs erreurs ? (ou à les rendre autonomes, critiques face à leurs résultats ?)

P9 : Comment varier les évaluations (diagnostiques, formatives, sommatives) ou comment différencier les évaluations ?

Une équipe d'enseignants propose dans ce document ressource des pistes, des perspectives, des activités qui relient les contenus et les capacités énoncés dans le programme de première à la classe.

1. Second degré

En classe de seconde, les élèves ont abordé les fonctions polynômes de degré 2. Ils en connaissent les variations (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes représentatives. Ces résultats ont pu, selon le choix du professeur, être partiellement ou totalement admis.

Les situations sur le second degré en classe de première doivent donc prendre appui sur ces acquis de la classe de seconde. Les exemples de scénarios pédagogiques suivants proposent des activités autour de ce thème.

Extrait du programme de première S :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Second degré Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	• Utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.	On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de seconde. La mise sous forme canonique n'est pas un attendu du programme. ◇ Des activités algorithmiques sont réalisées dans ce cadre.

Un exemple d'activité sur le second degré

Problématiques développées : P1, P2, P3, P6, P8 et P9.
Activité expérimentée en série S, transférable en ES/L.
Place dans la progression : en début d'année scolaire.

Objectifs pédagogiques	Approfondir la notion de second degré. Former les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. Évaluer individuellement les acquis des élèves.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'écrit.
Connaissances	La parabole. Calculs d'aires.
Logiciels	*GeoGebra*. *Xcas*. Calculatrice.
Modalités de gestion de classe	Travail en groupes. Activité en autonomie.

Afin d'en préserver la cohérence globale, la séquence pédagogique qui suit est présentée telle qu'elle a été testée et dans son ensemble. Il appartient à l'enseignant de l'adapter à sa classe.

La situation géométrique étudiée est classique. La démarche pédagogique spécifique vise à construire des compétences amorcées en classe de seconde :

- « mettre en œuvre une recherche de façon autonome » (le professeur devient une ressource, secours de l'élève ou du groupe d'élèves) ;
- « mener des raisonnements » ;
- « avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus » ;
- « communiquer à l'écrit et à l'oral ».

grâce à la diversité de l'activité de l'élève (expérimenter, raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective, expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit, choisir et appliquer des techniques de calcul).

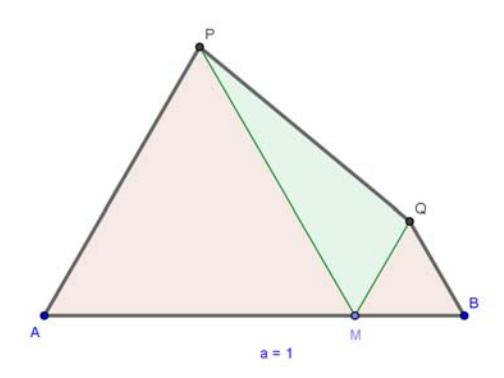
Scénario pédagogique

Au cours de l'année précédente, le professeur a récupéré les travaux de ses élèves sur ce même exercice. À partir de ces matériaux, l'enseignant va proposer à sa classe cinq démarches d'élèves qui permettent d'étudier différentes stratégies de résolution mises en place par les apprenants.

Le scénario pédagogique se déroule sur cinq séances d'une heure. Un devoir surveillé conclut l'activité présentée. Durant chaque séance, les élèves sont répartis par groupes de 5. À chaque séance, la consigne donnée par le professeur est d'étudier la démarche de résolution présentée dans les documents distribués. Un élève du groupe est chargé de finaliser le travail demandé et de le rendre au professeur en fin de séquence. En début de la séance suivante, un retour est effectué à l'oral sur les productions des groupes. Les cinq séances se sont déroulées durant le mois de septembre. La salle informatique est utilisée à chaque fois que cela est nécessaire. Précisons enfin que cette activité a donné lieu à deux devoirs maison qui ont permis à chacun de rédiger les analyses faites en groupes, ainsi qu'à la réalisation d'un poster portant sur la synthèse relative aux fonctions polynômes du second degré (définition, courbe, tableau de variation, sommet).

Énoncé de l’exercice

M est un point libre sur le segment [AB] de longueur 1. Les triangles AMP et MBQ sont équilatéraux.



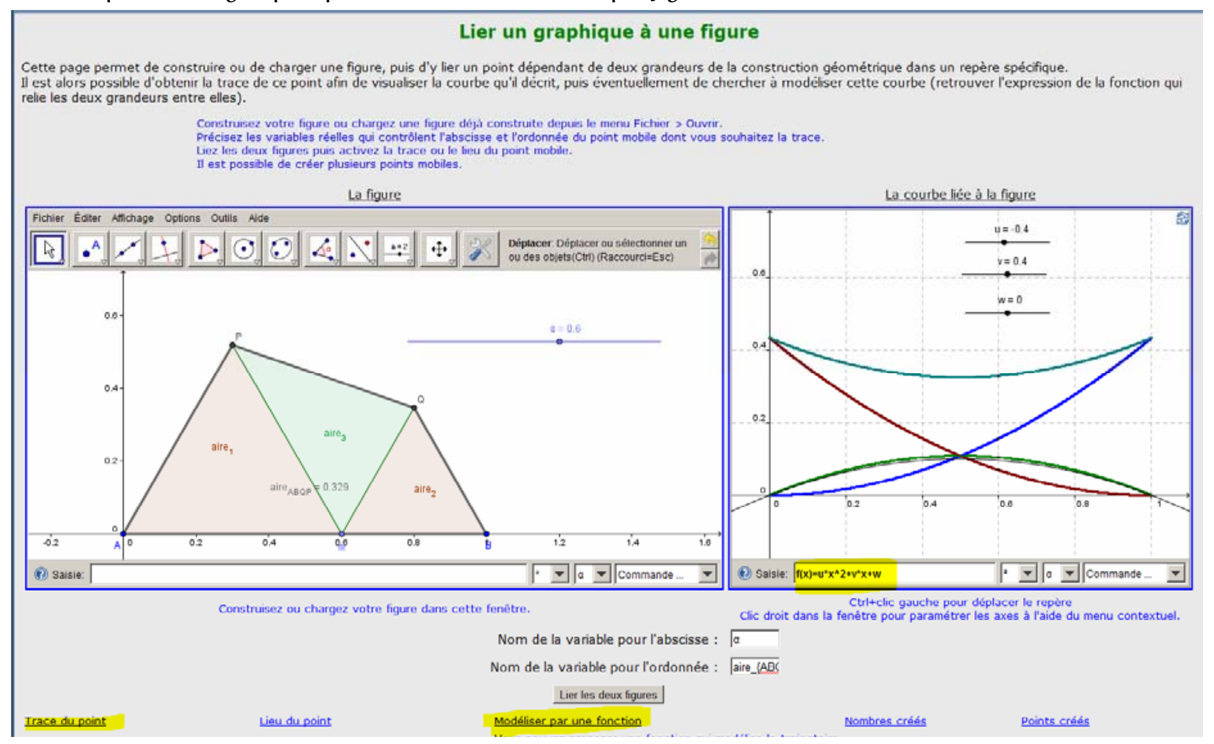
1. Déterminer la position de M qui rend maximale l’aire du triangle MPQ.
2. Expliquer pourquoi cette position rend minimale l’aire du quadrilatère ABQP.

Consignes données aux élèves par l’enseignant pour chaque séance :

« Voici la production qu’un élève de ma classe de l’année dernière a proposée pour répondre à l’exercice. Cette production est accompagnée de quelques questions auxquelles vous répondrez après avoir analysé la démarche suivie. Quelques éléments ont été volontairement cachés.
Il est conseillé de décrire les pistes suivies au cours de votre recherche, ainsi que les difficultés rencontrées. »

Séance 1 : analyse de la production de Youssra

J’ai utilisé GéoGébra plus précisément la page « Lier un graphique à une figure » disponible sur le Web à l’adresse
www.geogebra.org/en/upload/files/french/doNuts/LierUneCourbe.htm#ici1
J’ai représenté graphiquement les aires des polygones AMP, MBQ, MQP et APQB.



Il est facile de constater que l’aire du triangle MPQ est maximale quand « texte caché » *et on voit bien que l’aire du polygone ABQP est alors minimale.*

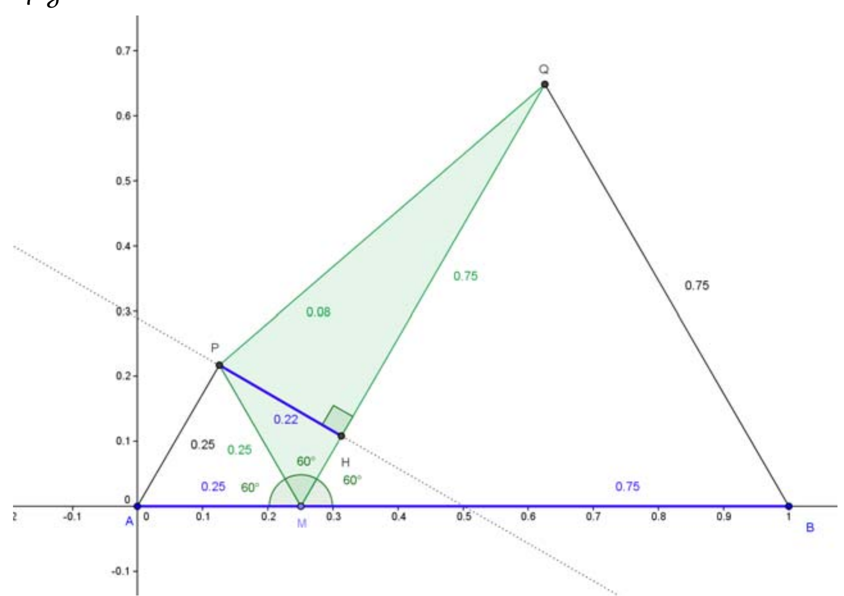
- Compléter la copie d'écran de Youssra par une légende associant courbes et aires.
- Retrouver le « texte caché » de la rédaction de Youssra.

Pour aller plus loin, j'ai pensé utiliser une fonction polynôme de degré 2 pour modéliser la courbe verte qui ressemble à un morceau de parabole. J'ai tâtonné avec trois curseurs, je suis certaine que w=0, et que u et v sont opposés. Mais ça ne marche pas, je n'ai pas réussi à superposer les courbes !

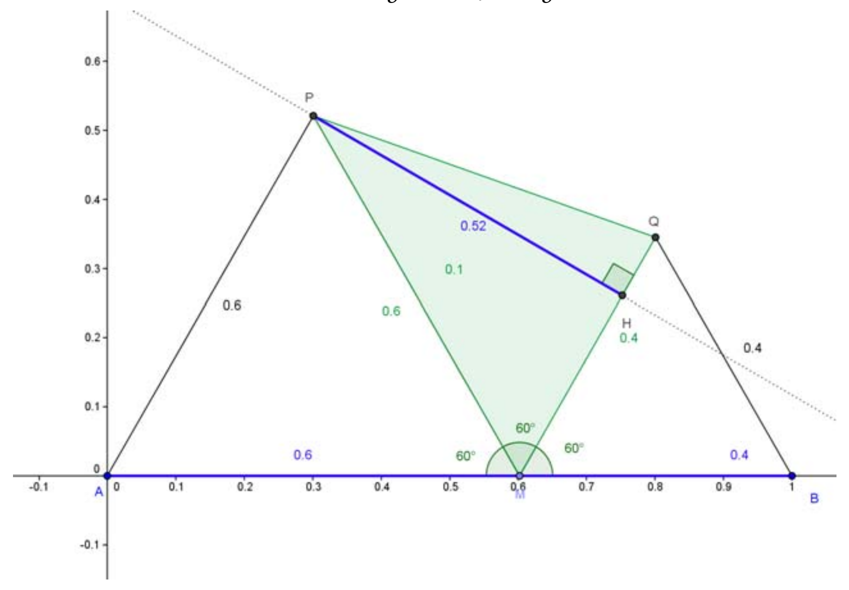
- Expliquer pourquoi w=0.
- Expliquer pourquoi u et v sont opposés.

Séance 2 : analyse de la production de Mylène

Pour comprendre le problème qui me semblait compliqué, j'ai d'abord utilisé GéoGébra pour faire une figure.



Ici l'aire du triangle MPQ est égale à 0,08.



Ici l'aire du triangle MPQ est égale à 0,1.

Première question du sujet.

J'ai calculé, dans le cas général, la hauteur PH en posant x=AM.

Puis j'ai obtenu l'aire du triangle MPQ : $0{,}4x \times (1-x) = 0{,}4x - 0{,}4x^2$

- Critiquer le résultat énoncé par Mylène :
« l'aire du triangle MPQ est égale à $0{,}4x \times (1-x) = 0{,}4x - 0{,}4x^2$ ».

Ensuite, j'ai tracé la courbe avec ma calculatrice et j'ai trouvé 0,5.

Graphique caché

En conclusion, l'aire du triangle MPQ est maximale pour x = 0,5 autrement dit quand M est au milieu de [AB].

- Comme l'a fait Mylène, utiliser la calculatrice pour visualiser la courbe associée à l'aire du triangle MPQ et commenter le résultat énoncé par Mylène.

Seconde question du sujet.

En additionnant les aires, j'ai trouvé :

Aire(APQB) = « texte caché » + $(0,4x - 0,4x^2) + 0,4(1-x)^2$.

En développant : Aire(APQB)= $0,4x^2$ + « texte caché ».

J'ai tracé la courbe avec ma calculatrice et j'ai trouvé 0,5.

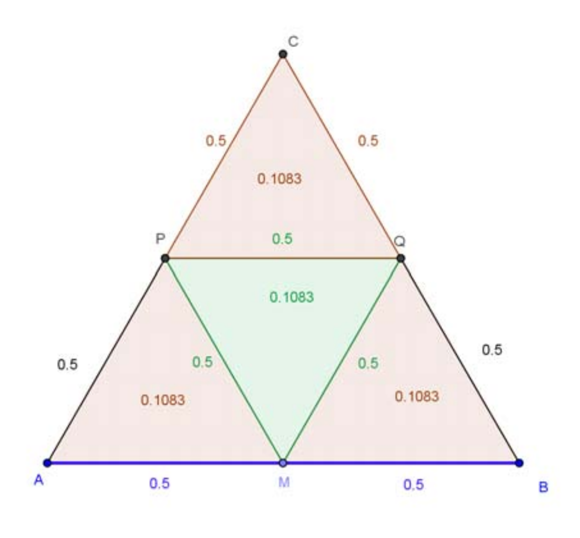
Graphique caché

En conclusion, l'aire du quadrilatère APQB est minimale pour x = 0,5 autrement dit quand M est au milieu de [AB].

- Au cours de sa résolution, Mylène utilise une approximation de $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Quelle est cette approximation ?
- En utilisant l'approximation de Mylène, retrouver les textes cachés en exprimant l'aire du triangle AMP en fonction de x puis celle du quadrilatère APQB.
- Comme l'a fait Mylène, utiliser la calculatrice pour visualiser la courbe associée à l'aire du quadrilatère APQB et commenter le résultat énoncé par Mylène.

Séance 3 : analyse de la production de Julie

J'ai fait la figure (cf. annexe 1) et placé M au milieu de [AB], j'ai alors remarqué que les trois triangles sont superposables, j'ai pensé à Thalès et complété la figure pour obtenir le triangle ABC.
Dans le formulaire du livre, j'ai trouvé une formule pour l'aire d'un triangle équilatéral, ici de côté 1 donc l'aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$. *J'en déduis que l'aire du triangle MPQ est égale à* $\frac{\sqrt{3}}{16}$ *et que l'aire du trapèze ABQP est égale à* $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.



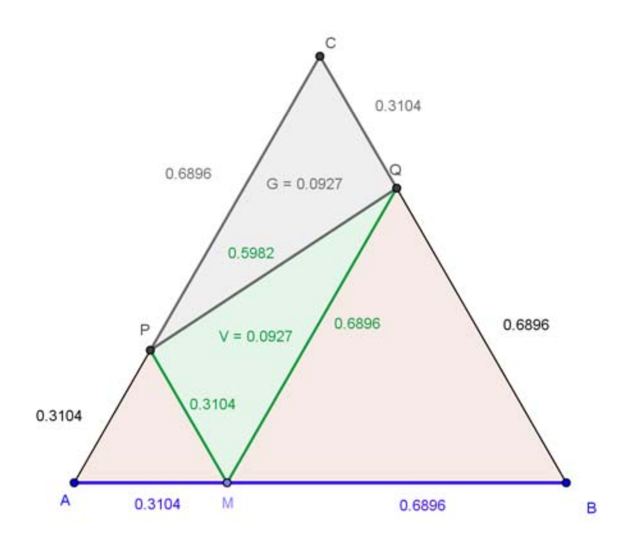
Annexe 1

Dans le cas général, l'aire du triangle équilatéral AMP est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ *, celle de BMQ est égale à* $\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$ *, V=G donc par découpage, cf. annexe 2, j'obtiens :*

$$2\times V=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$$

D'où $V=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)$

Après, j'ai voulu comparer V à $\frac{\sqrt{3}}{16}$ *mais je n'ai pas réussi. J'ai donc décidé d'abandonner la méthode … Mais je suis certaine de ma conjecture : le minimum de l'une et le maximum de l'autre sont bien obtenus simultanément au milieu de [AB]. D'ailleurs je l'ai vérifié en traçant les courbes sur papier millimétré (cf. annexe 3).*



Annexe 2

- Julie utilise, sans le justifier, l'égalité $V = G$. Par un raisonnement géométrique, compléter l'exposé de Julie, en démontrant l'égalité des aires des triangles CPQ et MPQ.
- Réaliser l'annexe 3 évoquée par Julie.
- Pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on pose $V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-x^2\right)$.
- Vérifier que $V\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{16}$.
- En étudiant le signe de $V(x)-V\left(\frac{1}{2}\right)$, démontrer le résultat relatif à l'aire du triangle MPQ.
- Sans aucun calcul, justifier la dernière intuition de Julie : « le minimum de l'une et le maximum de l'autre sont bien obtenus simultanément ».

<u>Séance 4 : analyse de la production d'Alexis</u>

Comme je ne trouvais rien malgré tout le temps qui passait, j'ai cherché « aire d'un triangle » sur « Wikipédia » et j'ai trouvé trois formules :

- *l'une utilise base et hauteur mais je ne connais pas la hauteur du triangle PQM alors je l'ai éliminé ;*
- *l'autre la formule du Héron mais il faut connaître les trois côtés et je n'en connais que deux ;*
- *donc je me suis permis d'utiliser la troisième* **S** = $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

En admettant ce résultat, je trouve facilement les aires des trois triangles et du quadrilatère :

- *pour APM, je trouve* $\mathbf{S_1}$ = « texte caché » ;
- *pour BMQ, je trouve* $\mathbf{S_2}$ = « texte caché » ;
- *pour MPQ, je trouve* $\mathbf{S_3}$ = $\frac{1}{2}x(1-x)\sin(60)$;
- *pour APQB, je trouve* $\mathbf{S_4}$ = « texte caché » = $\frac{1}{2}$ $\sin(60) \times (x^2 - x + 1)$.

Étude de S_3.

a) Sens de variation.

Comme $\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *, alors* $\frac{1}{2}x(1-x)\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x - x^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ *c'est un polynôme du second degré donc sa courbe est une parabole* (Γ_3) *ici tournée vers le bas car* $a = -\frac{\sqrt{3}}{4} < 0$.

b) Coordonnées du sommet de (Γ_3)

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 0 - \frac{\sqrt{3}}{4}\times 0^2 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2 = 0$$

le polynôme s'annule en 0 et en 1 donc $x_S = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$ *et* $y_S = f(x_S) = f(0{,}5) = \frac{\sqrt{3}}{16}$.

- Utiliser les informations données par Alexis (cf. a) et b)) pour dresser le tableau de variation de la fonction f_3 définie sur [0 ; 1] par $f_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x - x^2)$.

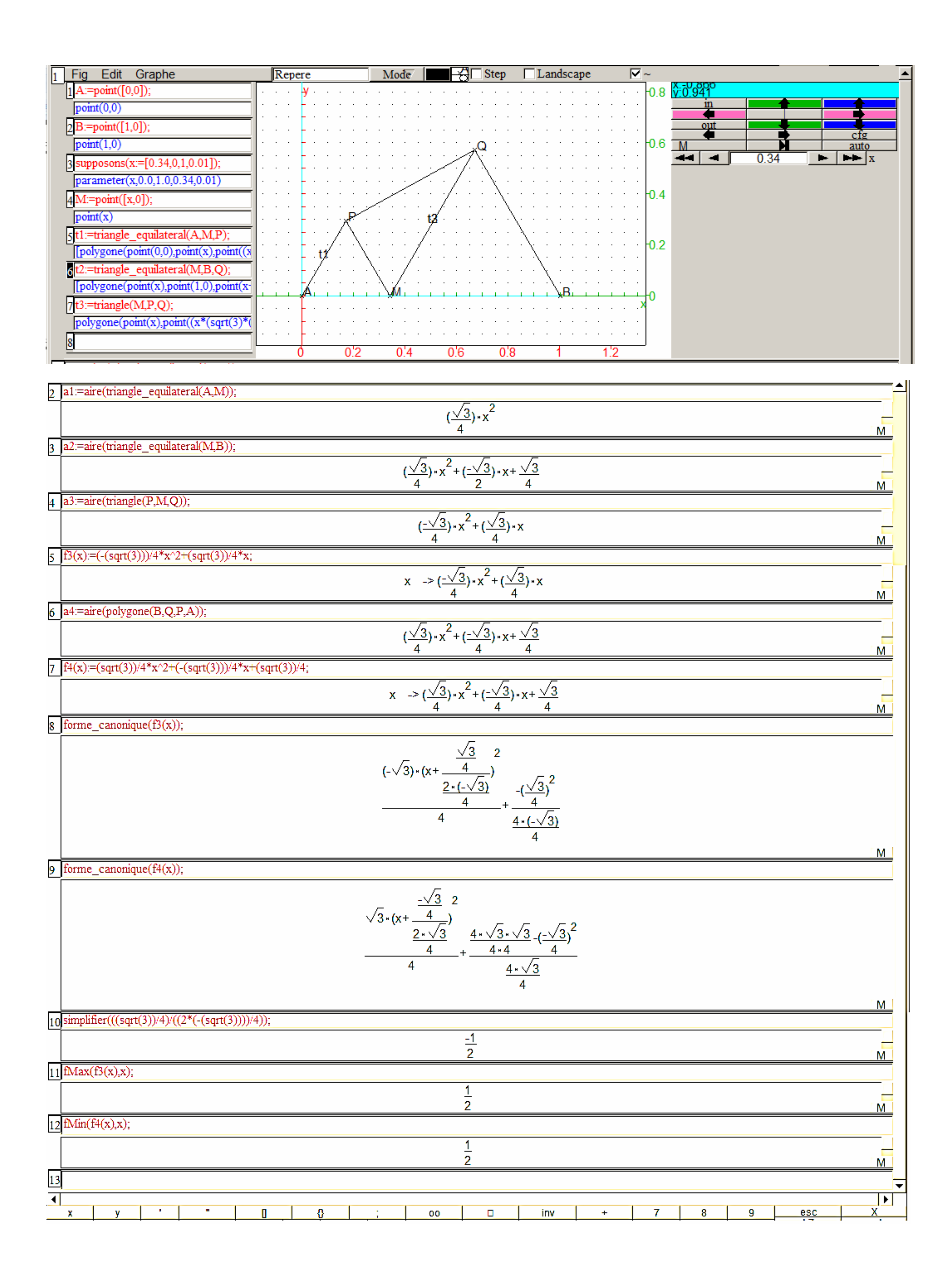
Étude de S_4.

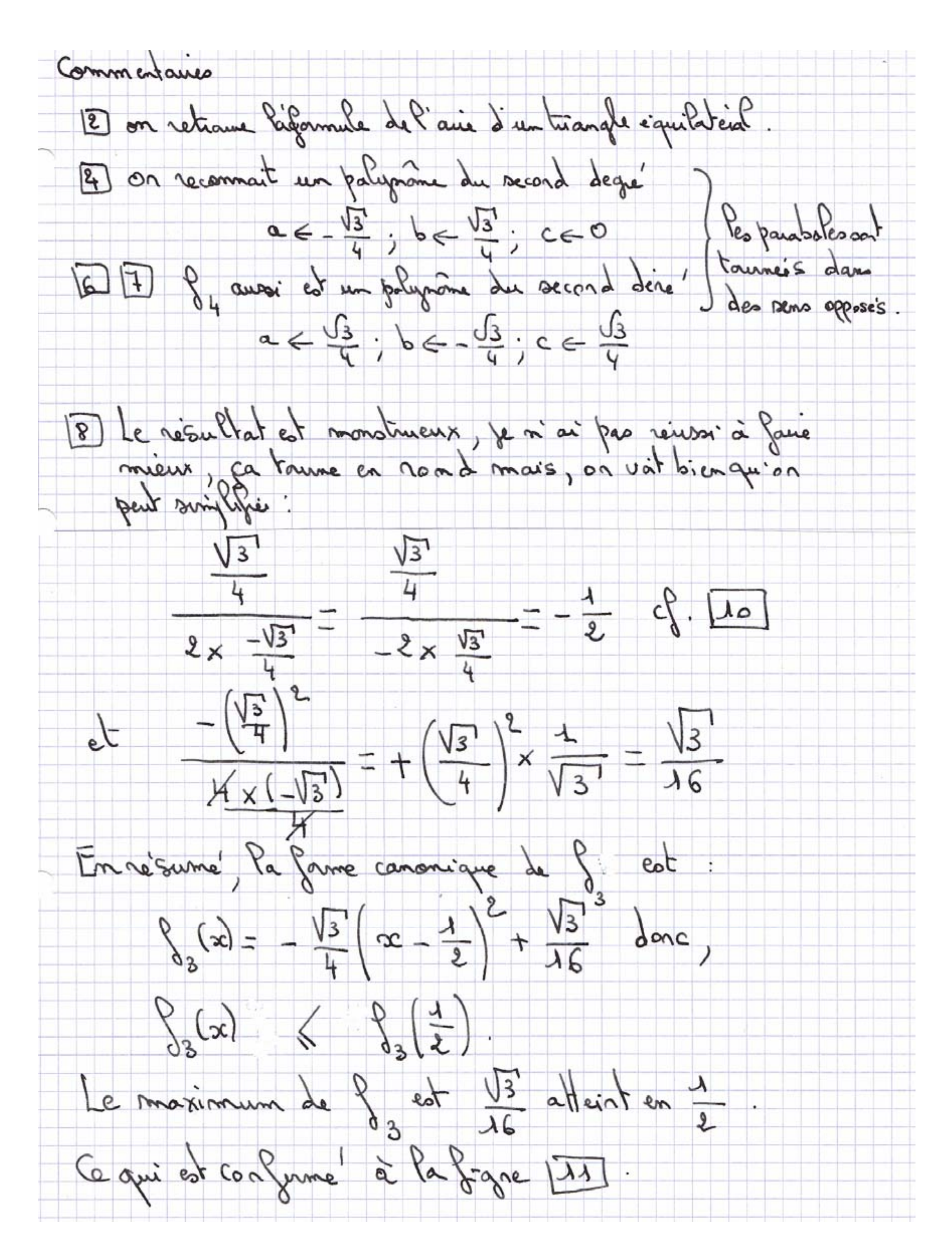
« texte caché »

- Exprimer S1 et S2 en fonction de x. En déduire que $\mathbf{S_4} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}$.
- On note f_4 la fonction définie sur [0 ;1] par $f_4(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}$ et de courbe représentative (Γ_4). Trouver, dans l'intervalle [0 ; 1], deux nombres x_1 et x_2 et ayant la même image par f_4. En déduire le sommet de (Γ_4) et le tableau de variation de f_4.

Séance 5 : analyse de la production de Paul Alexandre

Comme je connais assez bien XCas (surtout l'instruction canonical_form() que j'ai utilisée l'année dernière), j'ai préféré utiliser XCas.


Fig Edit Graphe
Repere
Mode
Step
Landscape
A:=point([0,0]);
point(0,0)
B:=point([1,0]);
point(1,0)
supposons(x:=[0.34,0,1,0.01]);
parameter(x,0.0,1.0,0.34,0.01)
M:=point([x,0]);
point(x)
t1:=triangle_equilateral(A,M,P);
t2:=triangle_equilateral(M,B,Q);
t3:=triangle(M,P,Q);
A
B
M
P
Q
t1
t3
0.34
a1:=aire(triangle_equilateral(A,M));
a2:=aire(triangle_equilateral(M,B));
a3:=aire(triangle(P,M,Q));
f3(x):=(-(sqrt(3)))/4*x^2+(sqrt(3))/4*x;
a4:=aire(polygone(B,Q,P,A));
f4(x):=(sqrt(3))/4*x^2+(-(sqrt(3)))/4*x+(sqrt(3))/4;
forme_canonique(f3(x));
forme_canonique(f4(x));
simplifier(((sqrt(3))/4)/((2*(-(sqrt(3))))/4));
-1/2
fMax(f3(x),x);
1/2
fMin(f4(x),x);
1/2



Commentaires

[2] on retrouve la formule de l'aire d'un triangle équilatéral.

[4] on reconnait un polynôme du second degré

$a \leftarrow -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $b \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}$; $c \leftarrow 0$

[6] [7] f_4 aussi est un polynôme du second degré

$a \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}$; $b \leftarrow -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $c \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}$

Les paraboles sont tournées dans des sens opposés.

[8] Le résultat est monstrueux, je n'ai pas réussi à faire mieux, ça tourne en rond mais, on voit bien qu'on peut simplifier :

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2 \times \frac{-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{-2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}} = -\frac{1}{2} \quad \text{cf. } [10]$$

et

$$\frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}{\frac{4 \times (-\sqrt{3})}{4}} = +\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

En résumé, la forme canonique de f_3 est :

$$f_3(x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{16} \text{ donc,}$$

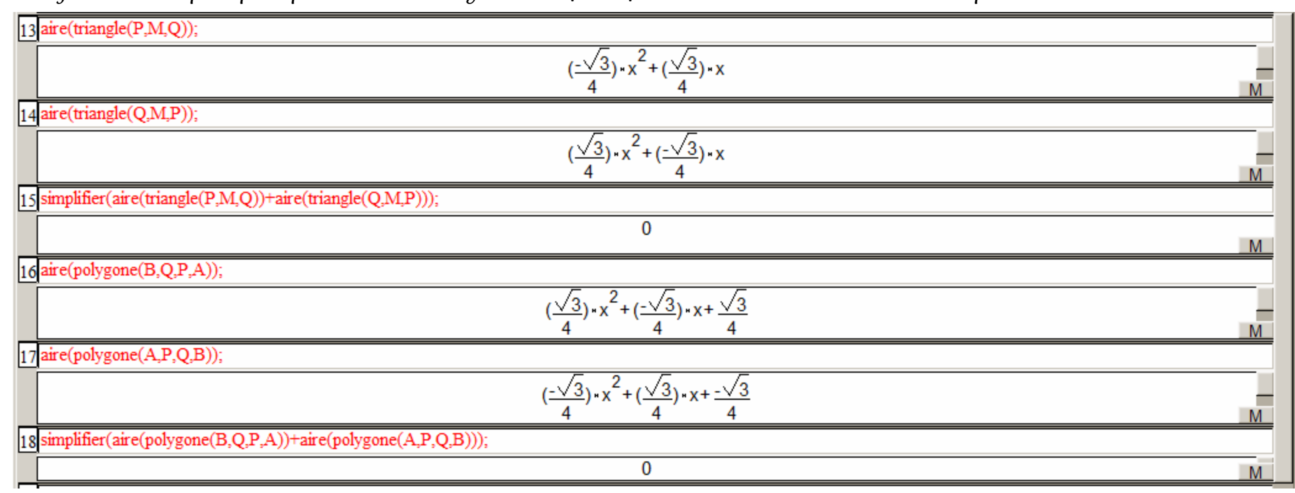
$$f_3(x) \leqslant f_3\left(\frac{1}{2}\right).$$

Le maximum de f_3 est $\frac{\sqrt{3}}{16}$ atteint en $\frac{1}{2}$.

Ce qui est conforme à la ligne [11].

- Extraire des documents livrés par Paul-Alexandre, les informations relatives à la forme canonique de f_3.
- A la manière de Paul-Alexandre, simplifier le résultat retourné ligne 9 pour en déduire la forme canonique de f_4.
- En développant, vérifier les calculs relatifs à f_4.
- Utiliser Xcas pour obtenir la forme canonique du polynôme $x^2 - x + 1$. Vérifier ce résultat en développant. En déduire son minimum et son tableau de variation.
- Recommencer avec le trinôme $-x^2 + x$.
- Critiquer la démarche de Paul-Alexandre.

Ici, j'ai remarqué quelque chose de bizarre, il faut faire attention à l'ordre des points…



- Commenter cette dernière remarque de Paul-Alexandre.

Remarque :

L'analyse de la production de Paul-Alexandre est plus difficile. Elle pourra n'être proposée qu'à certains groupes, ou en accompagnement personnalisé.

<u>Évaluation des acquis des élèves.</u>

Extrait des programmes des premières S, ES et L :

Objectif général

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :

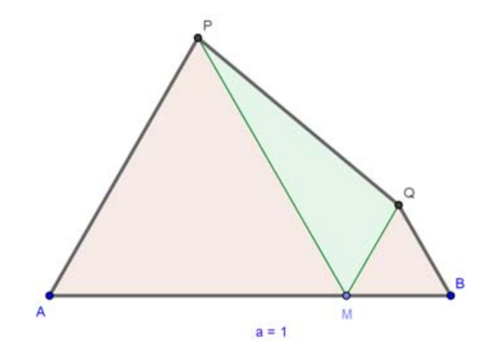
- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

L'évaluation proposée se déroule en deux parties. La première partie permet une évaluation de certaines compétences citées dans les programmes, en incitant l'élève à s'auto-évaluer. La deuxième partie fait le point sur les connaissances acquises par les élèves à la fin de l'activité.

Texte de l'évaluation

M est un point libre sur le segment [AB] de longueur 1, AMP et MBQ sont équilatéraux.

1. Déterminer la position de M qui rend maximale l'aire du triangle MPQ.
2. Expliquer pourquoi cette position rend minimale l'aire du quadrilatère ABQP



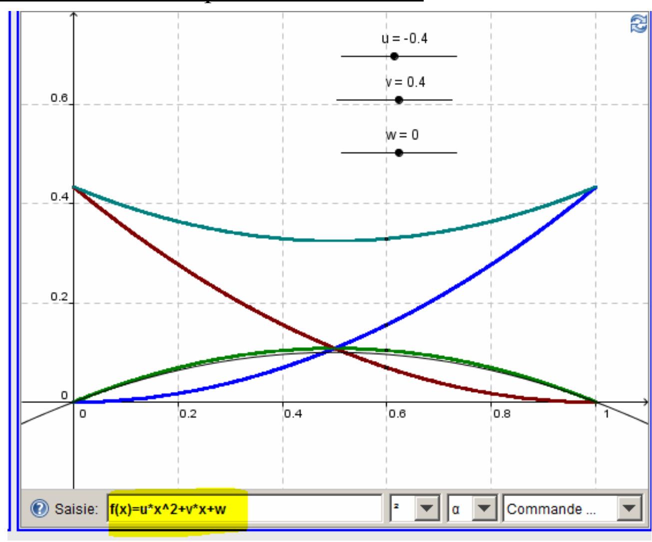
Première partie de l'évaluation (20mn – 8 points)

- En un maximum de 10 lignes, en guise de conclusion de l'étude : donner le point qui vous a semblé le plus délicat à traiter ou qui a posé le plus de difficultés ainsi que le point sur lequel vous avez le plus progressé. Justifier vos choix.

  Aucun développement mathématique n'est demandé.

- En un maximum de 15 lignes, proposer ce qui vous parait-être une démarche « idéale » de résolution du problème. On sera amené à se souvenir des points positifs et négatifs des différentes démarches des cinq élèves.

  Aucun développement mathématique n'est demandé.



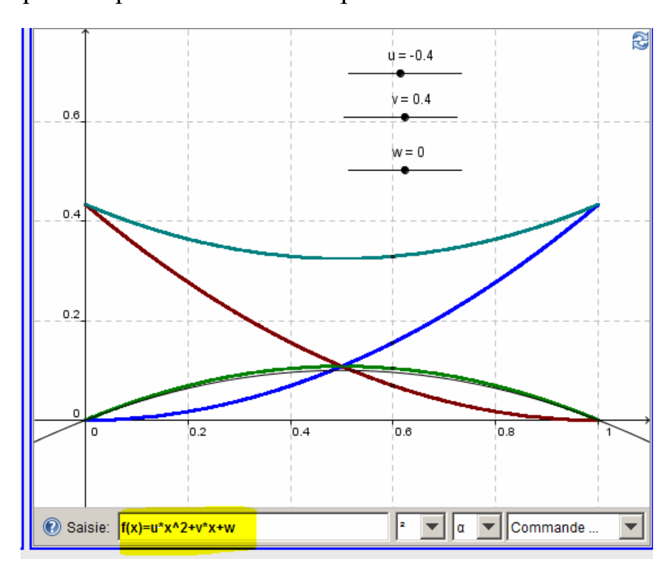
Seconde partie de l'évaluation (35 minutes - 12 points)

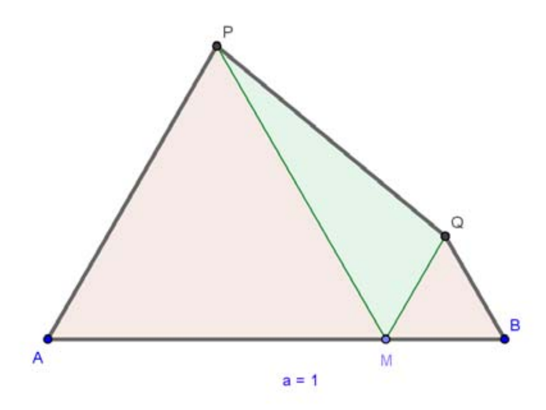
1. Associer les courbes et les aires des polygones AMP, MBQ, MQP et APQB. Découper, coller, légender. On ne demande aucune justification.
2. On pose AM=x, exprimer l'aire du triangle AMP en fonction de x. Justifier.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - x^2\right)$. On admet qu'une des courbes ci-contre représente cette fonction.

3. Utiliser le tableau de variation de f pour justifier le choix de la courbe associée à cette fonction.

Question de synthèse : énoncer différentes méthodes permettant de déterminer les coordonnées du sommet d'une parabole quelconque. Structurer la réponse.





Remarque :

Afin de construire rapidement le cours sur le second degré, le professeur a fait le choix de donner les figures nécessaires aux élèves.

Un prolongement possible de cette activité est la construction de la figure de l'exercice à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Le baby-boom

Problématiques développées : P2, P3, P5 et P6.

Série : toutes séries.

Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur le second degré. Modéliser une situation.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'écrit.
Connaissances	La parabole. Statistiques.
Modalités de gestion de classe	Travail en groupes. Activité en autonomie.

Scénario pédagogique

Situation (fiche élève)

- Consignes données à l'élève :
Modéliser l'évolution des naissances lors de la période du baby-boom au Canada par une fonction polynôme du second degré.
Mesurer l'intérêt de cette modélisation par l'estimation du nombre de naissances en 1970.
Rédiger un compte-rendu de cette activité présentant conclusions et démarches.
- Supports et ressources de travail :
Tableur et/ou calculatrice.
Les données proviennent du site « CANSIM sur E-STAT ».

Années	Estimation naissances
1950	372009
1951	381092
1952	403559
1953	417884
1954	436198
1955	442937
1956	450739
1957	469093
1958	470118
1959	479275
1960	478551
1961	475700
1962	469693
1963	465767
1964	452915

Années	Estimation naissances
1965	418595
1966	387710
1967	370894
1968	372009
1969	369647
1970	371988
1971	362187
1972	347319
1973	343373
1974	350650
1975	359323
1976	359987
1977	361400
1978	358852
1979	366064

Années	Estimation naissances
1980	370709
1981	371346
1982	373082
1983	373689
1984	377031
1985	375727
1986	372913
1987	369742
1988	376795
1989	392661
1990	405486
1991	402533
1992	398643
1993	388394
1994	385114

Années	Estimation naissances
1995	378016
1996	366200
1997	348598
1998	342418
1999	337249
2000	327882
2001	333744
2002	328802
2003	335202
2004	337072
2005	342176
2006	354617
2007	367864
2008	374595
2009	380535

Aide ou « coup de pouce »

- **Vérification de la bonne compréhension :**

Pour inciter les élèves à reformuler la consigne, on pourra leur poser quelques questions :

  - Qu'est-ce que le baby-boom ? À quelle période se situe-t-il au Canada ?
  - Quel est le travail à effectuer ? Que demande-t-on de réaliser ? D'estimer ?
  - Quelles informations nous donnent les ressources proposées ?

- **Aide à la démarche de résolution :**
  - Comment peut-on afficher un nuage de points sur l'écran de la calculatrice ? À l'aide du tableur ?
  - Comment afficher à l'écran une courbe de tendance ? Comment obtenir son équation ?

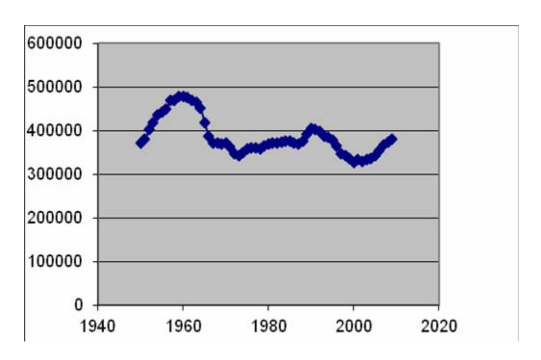
- **Apport de connaissances et de savoir-faire :**
  - Comment établir le lien entre la parabole et les coefficients a, b et c de la fonction polynôme du second degré ?

Pour aller plus loin (approfondissements et prolongements possibles) :

- Établir une étude statistique permettant de comparer les naissances au Canada et dans les pays d'Europe entre 1950 et 1968. S'appuyer sur le site de l'INSEE.
- Des phénomènes de baby-boom se retrouvent-ils sur le vieux continent ?
- Existe-t-il des périodes de l'histoire de France où l'on a pu constater des phénomènes comparables, où la courbe des naissances est modélisable par une parabole ?

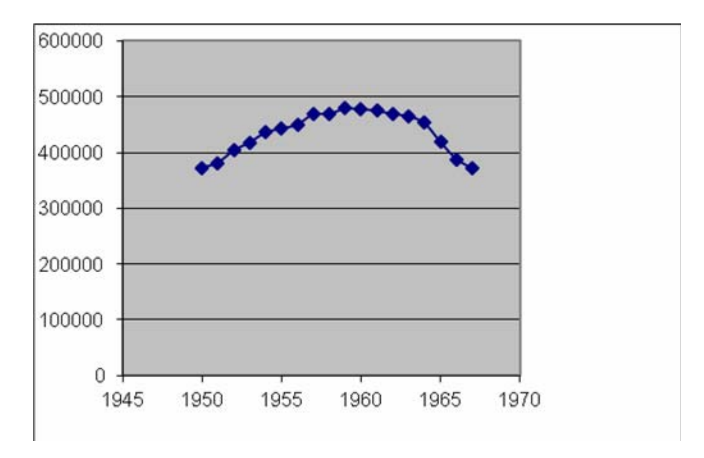
Compte-rendu des activités des élèves

Dans un premier temps, les élèves représentent le nuage de points de coordonnées (année, nombre de naissances). Le nuage obtenu est le suivant :



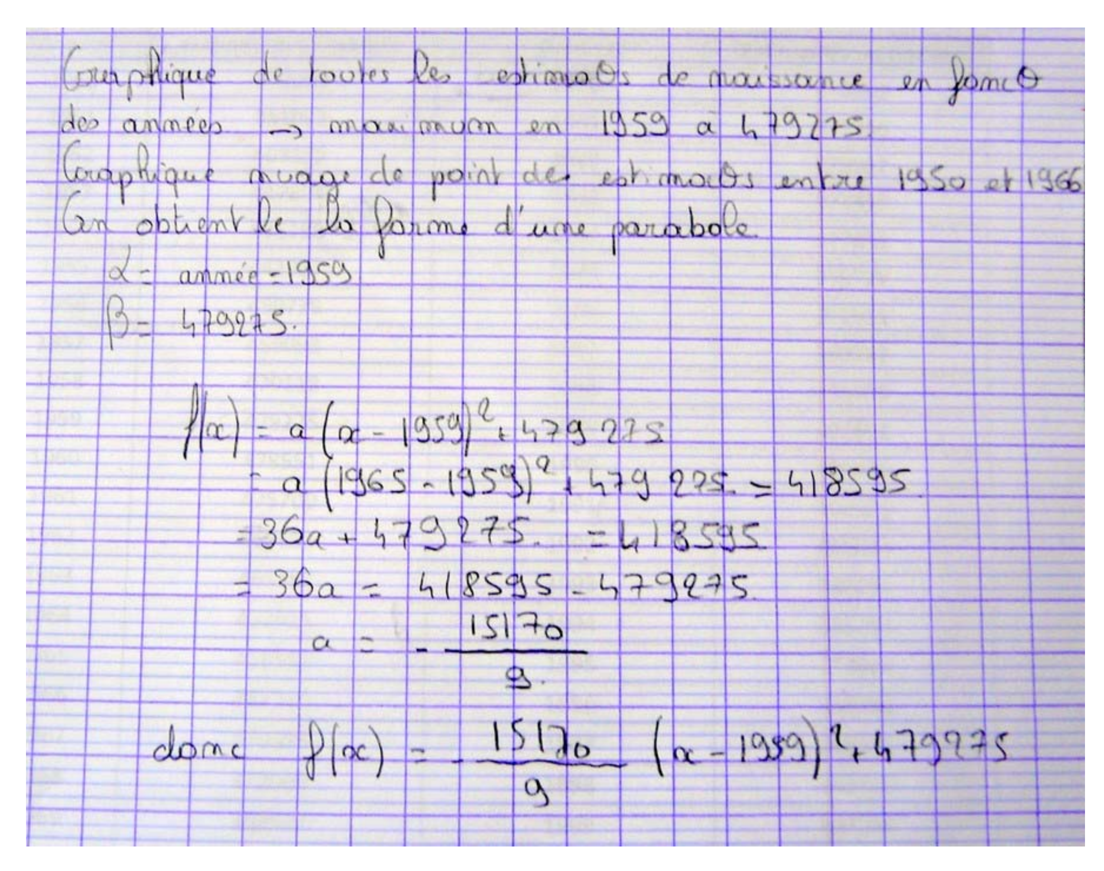
Une des élèves de la classe, Élodie, annonce : « Le baby-boom semble être situé entre 1950 et 1967 ». Elle décide donc de ne garder que les valeurs correspondantes.

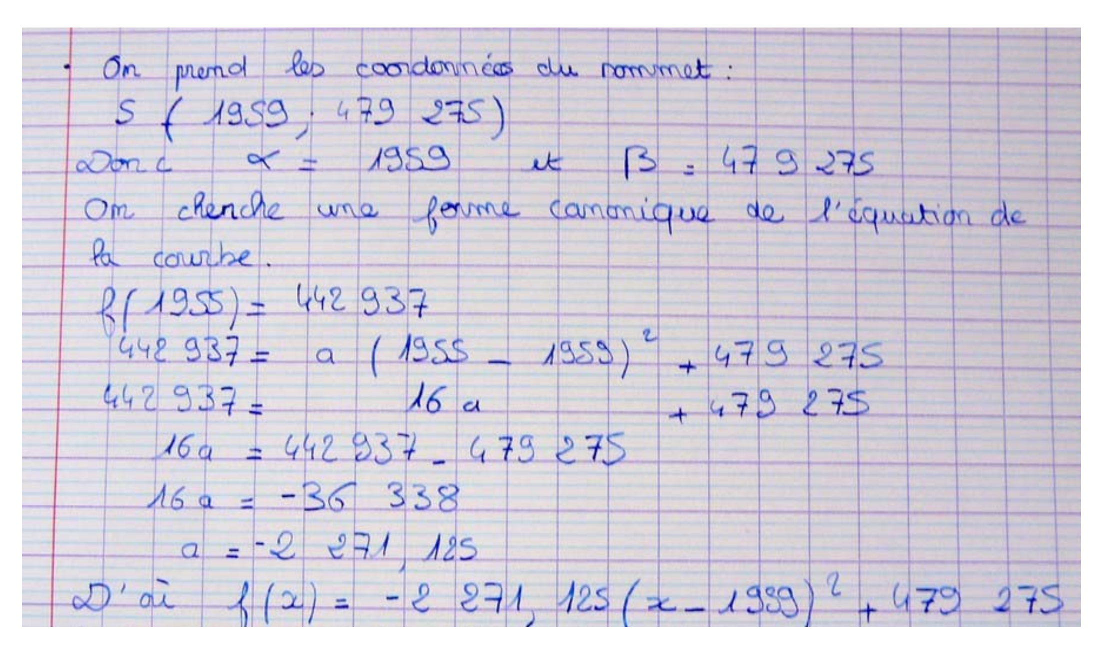
Elle obtient le nuage de points suivant :



Le professeur donne la consigne de décrire les éléments de recherche qui permettent de modéliser mathématiquement cette situation.

Les élèves travaillent en autonomie. On obtient diverses productions parmi lesquelles les deux suivantes :





On prend les coordonnées du sommet :

S (1959 ; 479 275)

Donc $\alpha = 1959$ et $\beta = 479\,275$

On cherche une forme canonique de l'équation de la courbe.

f(1955) = 442 937

$442\,937 = a\,(1955 - 1959)^2 + 479\,275$

$442\,937 = 16a + 479\,275$

$16a = 442\,937 - 479\,275$

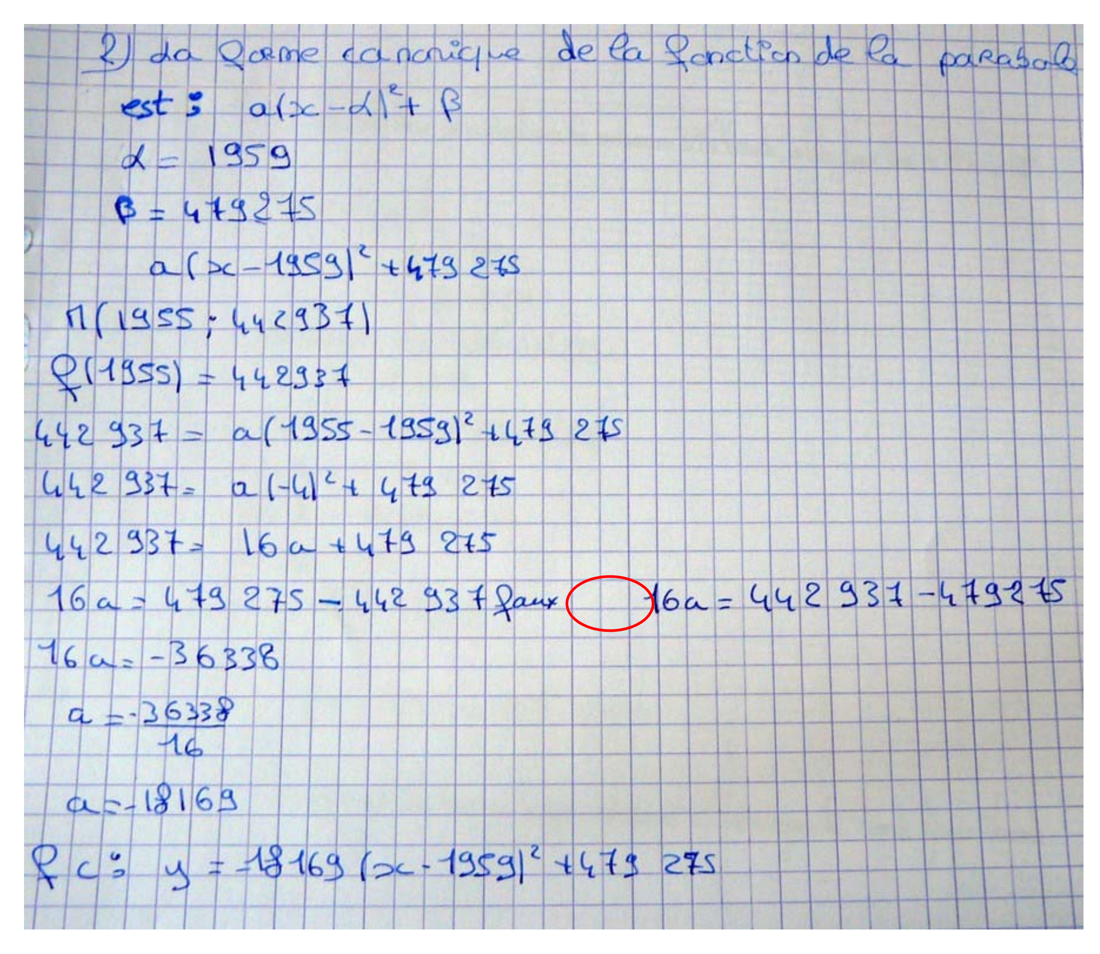
$16a = -36\,338$

$a = -2\,271,125$

D'où $f(x) = -2\,271,125\,(x - 1959)^2 + 479\,275$

Il s'ensuit un travail collectif sur la qualité de la communication écrite.

Le professeur a repéré un certain nombre d'erreurs dans la production suivante :



2) La forme canonique de la fonction de la parabole est : $a(x-\alpha)^2+\beta$

$\alpha = 1959$

$\beta = 479275$

$a(x-1959)^2 + 479\,275$

M(1955 ; 442937)

f(1955) = 442937

$442\,937 = a(1955-1959)^2 + 479\,275$

$442\,937 = a(-4)^2 + 479\,275$

$442\,937 = 16a + 479\,275$

$16a = 479\,275 - 442\,937$ faux $16a = 442\,937 - 479\,275$

$16a = -36338$

$a = \frac{-36338}{16}$

$a = -18169$

f c : $y = -18169\,(x-1959)^2 + 479\,275$

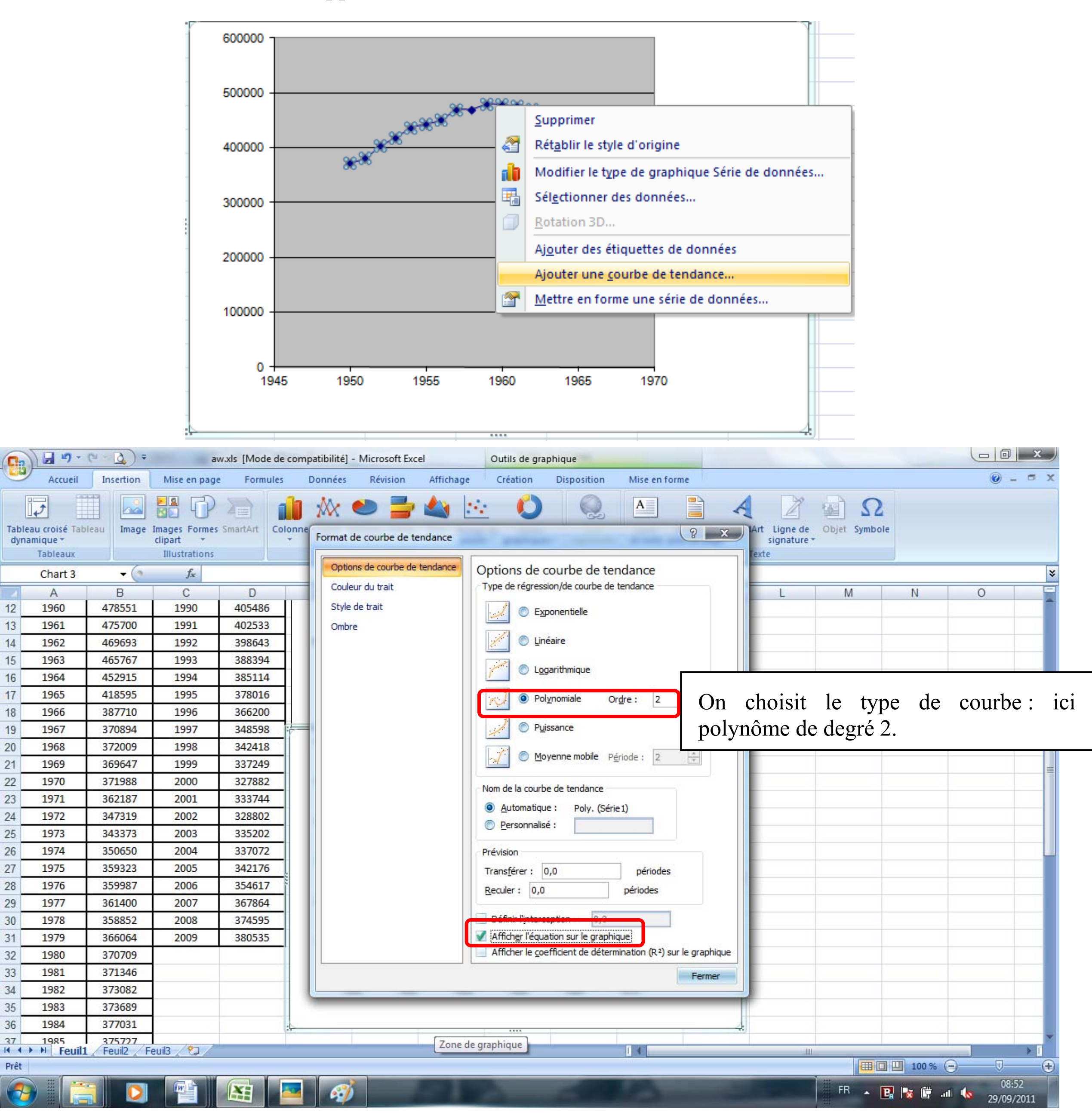
Par un questionnement ouvert, l'enseignant amène l'élève à critiquer sa production. Ce dernier constate immédiatement que le coefficient *a* est en contradiction avec l'allure de la courbe obtenue au tableur :

« La parabole est tournée vers le bas donc le coefficient de x² doit être négatif. Celui que j'obtiens est positif. J'ai fait une erreur de signe ».

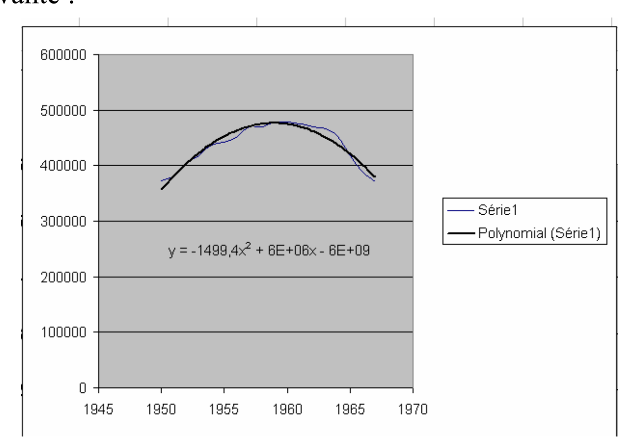
L’élève rectifie mais commet maintenant une erreur de calcul suite à une mauvaise manipulation des touches de la calculatrice. C’est l’occasion pour le professeur de travailler l’ordre de grandeur et le calcul mental réfléchi (Quel est le rapport entre 36000 et 18000 ? Comment diviser mentalement par 16 ?...).

Un temps d’échange collectif amène le professeur à présenter une nouvelle fonctionnalité du tableur : la courbe de tendance.

À l’aide d’un clic droit, on fait apparaître :



On obtient la courbe suivante :



Question du professeur : « Comment comparer l'équation de la parabole que vous avez déterminée avec celle obtenue à l'aide du tableur ? »

Traduction de l'équation :

• $y = -1499,4\,x^2 + 6E+06\,x - 6E+09.$

$y = -1499,4\,x^2 + 6\,000\,000\,x - 6\,000\,000\,000$

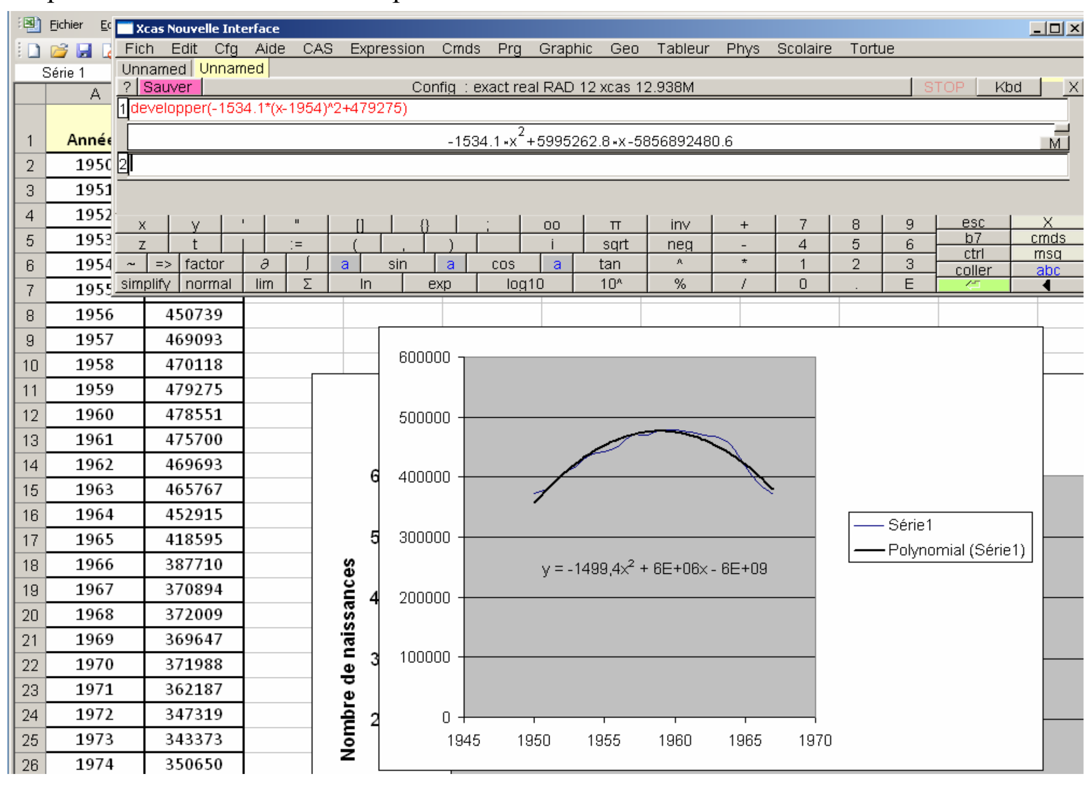
Une autre rédaction :

D'où $f(x) = -2\,271,125\,(x - 1959)^2 + 479\,275$

Avec xcas $f(x) = -2271,125\,x^2 + 8898267,75\,x$ ...

$- 8715373986,12$

Une comparaison visualisée sur une réponse d'élève :



	A	
1	Année	
2	1950	
3	1951	
4	1952	
5	1953	
6	1954	
7	1955	
8	1956	450739
9	1957	469093
10	1958	470118
11	1959	479275
12	1960	478551
13	1961	475700
14	1962	469693
15	1963	465767
16	1964	452915
17	1965	418595
18	1966	387710
19	1967	370894
20	1968	372009
21	1969	369647
22	1970	371988
23	1971	362187
24	1972	347319
25	1973	343373
26	1974	350650

Pour aller plus loin…

« Comparer les résultats obtenus pour l'évaluation du nombre de naissances à l'aide des deux modélisations ».

Une histoire de paraboles

Problématiques développées : P2, P3, P5 et P6.
Série : S.
Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Objectifs pédagogiques	Résoudre un problème traitant du second degré avec les TICE.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'oral.
Connaissances	La parabole.
Logiciels	Logiciel de géométrie dynamique. Tableur.
Modalités de gestion de classe	Activité en autonomie. Travaux pratiques.

<u>Fiche élève : trajectoire du sommet d'une parabole</u>

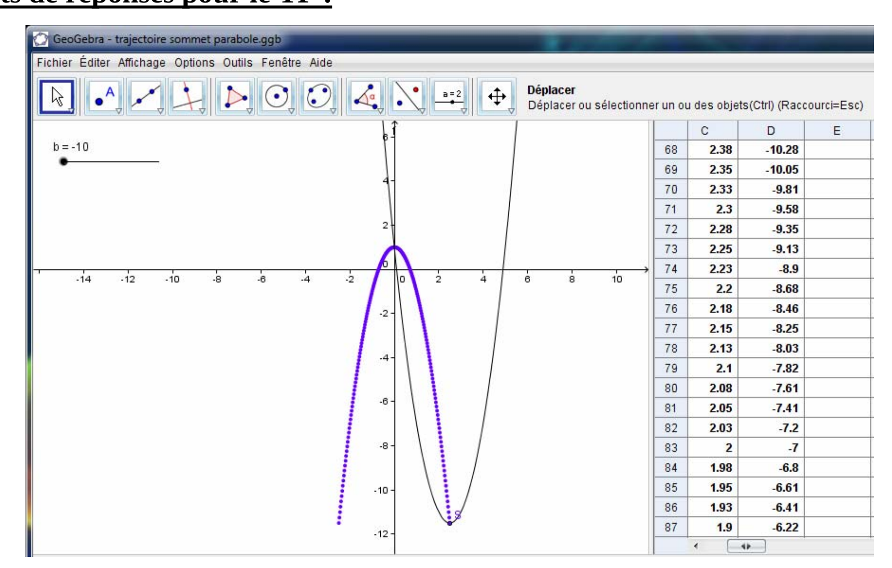
Consignes données à l'élève : traiter le TP en respectant les appels au professeur.

L'objet de ce TP est de conjecturer le lieu du sommet S de la parabole ($\mathcal{P}$) d'équation $y = 2x^2 + bx + 1$ où b est un nombre réel.
Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
Appeler le professeur pour valider la construction.
En faisant varier b, observer les déplacements du point S et répondre au problème.
Appeler le professeur pour valider la construction.
A l'aide d'un tableur saisir les coordonnées de S lorsque b varie et conjecturer l'équation de la courbe obtenue.

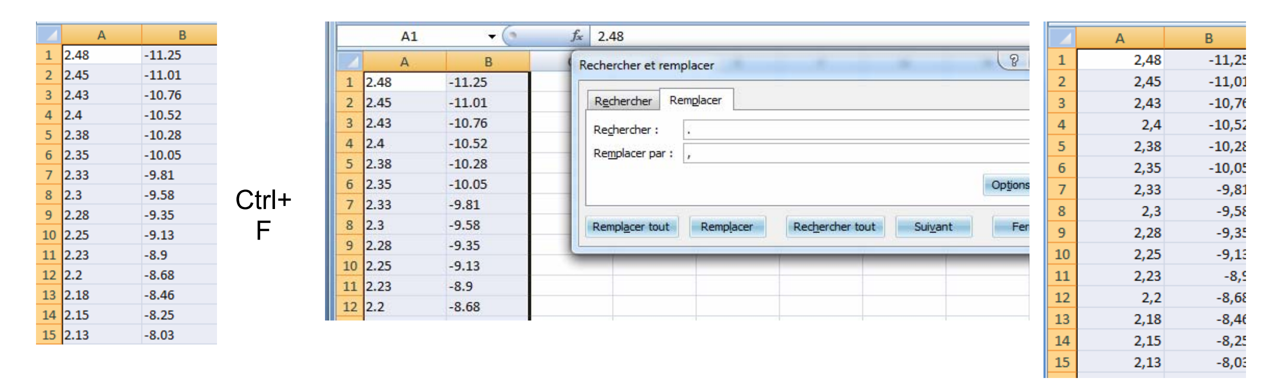
<u>Prolongements possibles :</u>

- Dans le cadre du TP, on peut demander à examiner le même problème avec la parabole d'équation $y = ax^2 + x + 2$ où a est un nombre réel.
- Dans le cadre d'un devoir en temps libre, le professeur demande de rédiger la démonstration qui permet de valider ou de rejeter la conjecture concernant le lieu du sommet S de la parabole ($\mathcal{P}$).

<u>Éléments de réponses pour le TP :</u>



Indication :
On pensera à transformer les formats d'écriture des nombres extraits du tableur-*GeoGebra* par la fonction : Ctrl + F (passage du point au point décimal ou virgule)



	A	B
1	2.48	-11.25
2	2.45	-11.01
3	2.43	-10.76
4	2.4	-10.52
5	2.38	-10.28
6	2.35	-10.05
7	2.33	-9.81
8	2.3	-9.58
9	2.28	-9.35
10	2.25	-9.13
11	2.23	-8.9
12	2.2	-8.68
13	2.18	-8.46
14	2.15	-8.25
15	2.13	-8.03

Ctrl+ F

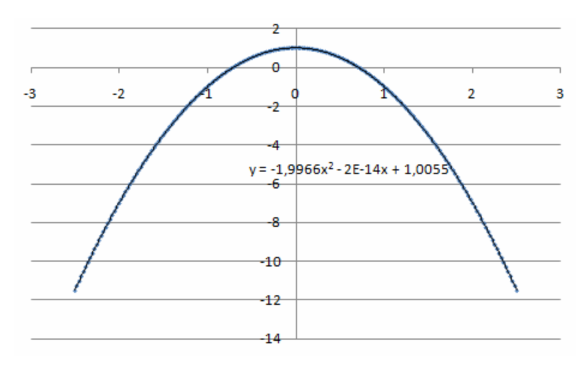
A1 2.48

	A	B
1	2.48	-11.25
2	2.45	-11.01
3	2.43	-10.76
4	2.4	-10.52
5	2.38	-10.28
6	2.35	-10.05
7	2.33	-9.81
8	2.3	-9.58
9	2.28	-9.35
10	2.25	-9.13
11	2.23	-8.9
12	2.2	-8.68

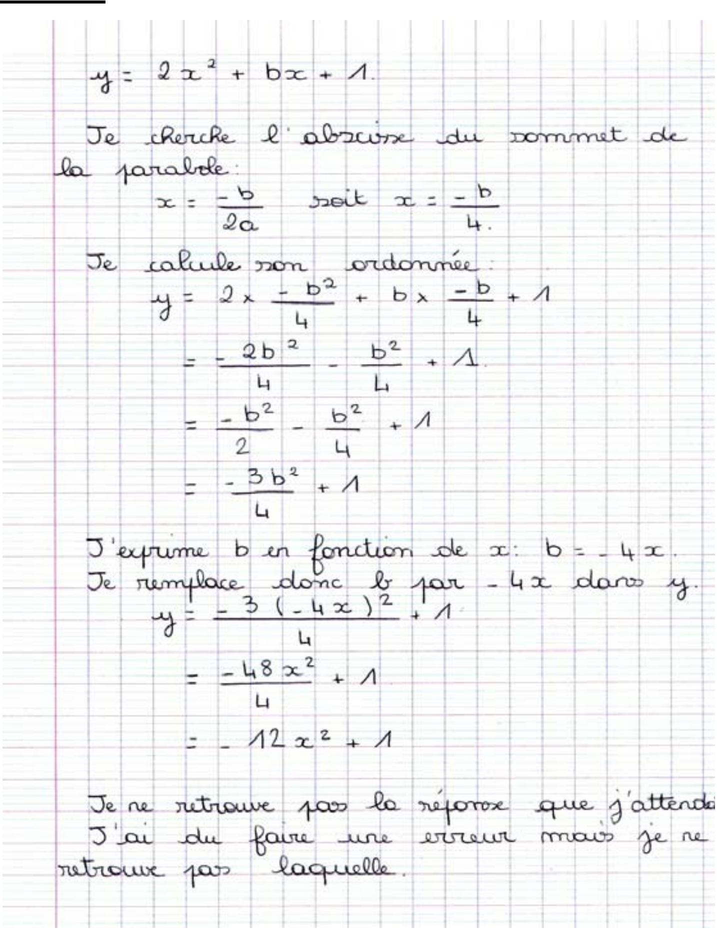
Rechercher et remplacer
Rechercher | Remplacer
Rechercher : .
Remplacer par : ,
Options
Remplacer tout | Remplacer | Rechercher tout | Suivant | Fer

	A	B
1	2,48	-11,25
2	2,45	-11,01
3	2,43	-10,76
4	2,4	-10,52
5	2,38	-10,28
6	2,35	-10,05
7	2,33	-9,81
8	2,3	-9,58
9	2,28	-9,35
10	2,25	-9,13
11	2,23	-8,9
12	2,2	-8,68
13	2,18	-8,46
14	2,15	-8,25
15	2,13	-8,03

On obtient une idée de l'équation de la trajectoire du sommet en utilisant la courbe de tendance.



<u>Une production écrite :</u>



$y = 2x^2 + bx + 1.$

Je cherche l'abscisse du sommet de la parabole :

$x = \frac{-b}{2a}$ soit $x = \frac{-b}{4}.$

Je calcule son ordonnée :

$y = 2 \times \frac{-b^2}{4} + b \times \frac{-b}{4} + 1$

$= -\frac{2b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + 1.$

$= \frac{-b^2}{2} - \frac{b^2}{4} + 1$

$= \frac{-3b^2}{4} + 1$

J'exprime b en fonction de x : $b = -4x.$
Je remplace donc b par $-4x$ dans y.

$y = \frac{-3(-4x)^2}{4} + 1$

$= \frac{-48x^2}{4} + 1$

$= -12x^2 + 1$

Je ne retrouve pas la réponse que j'attends. J'ai du faire une erreur mais je ne retrouve pas laquelle.

Commentaires :
L'élève s'engage dans un raisonnement correct, il fait preuve d'esprit critique, sa communication écrite est bonne. Lors de ce travail, il atteste les compétences C2, C3 et C4a explicitées ci-après.

Exemple de grilles de compétences :

Ces grilles permettent une traçabilité dans l'acquisition des compétences repérées.

Grille de compétences à l'usage de l'élève :

NOM	**Prénom**		**Classe**		**Trimestre**		
Grille de compétences : résoudre des problèmes, pratiquer une démarche scientifique							
		DS1	DS2	DS3	TP1	TP2	TP3
C1	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome						
C2	Mener des raisonnements						
C3	Avoir une attitude critique face aux résultats						
C4a	Communiquer à l'écrit						
C4b	Communiquer à l'oral						

Grille à l'usage du professeur :

	Résoudre des problèmes, pratiquer une démarche scientifique				
	C1	**C2**	**C3**	**C4a**	**C4b**
	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome	Mener des raisonnements	Avoir une attitude critique face aux résultats obtenus	Communiquer à l'écrit	Communiquer à l'oral
Nom Prénom					

Exemple d'activité dans le cadre de l'accompagnement personnalisé.

Problématiques développées : P2, P3, P4, P5 et P6.
Série : série S, adaptable aux autres séries.
Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Scénario pédagogique : une évaluation diagnostique réalisée en cours de Mathématiques suivie d'une séance développée dans le cadre de l'Accompagnement Personnalisé. Une séance portant sur la démarche d'investigation, réalisée en cours de Mathématiques, boucle le scénario pédagogique.

L'une des finalités de l'Accompagnement Personnalisé, en classe de première, est de favoriser l'acquisition de compétences propres à chaque voie de formation. De ce fait, les auteurs ont souhaité présenter un scénario pédagogique permettant de développer chez les apprenants des compétences scientifiques tout en répondant spécifiquement aux besoins de chacun. L'évaluation diagnostique est ainsi au cœur de ce protocole, elle pilote l'Accompagnement Personnalisé.

Afin de préparer une séance sur la démarche d'investigation, les professeurs se sont intéressés à l'acquisition de connaissances structurées par les élèves :

L'élève sait-il :

- mobiliser ses connaissances (donner du sens, traduire, décoder, mettre en relation, choisir une propriété, appliquer une méthode…) ;
- utiliser les TIC ;
- raisonner ;
- démontrer ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer un résultat par écrit ?

Voici l'énoncé de l'évaluation :

Après plusieurs relevés, un scientifique a modélisé une passe de volley-ball, la passe de Clément à son coéquipier Florian. La hauteur du ballon $h(t)$ en fonction du temps t est : $h(t) = -0{,}525t^2 + 2{,}1t + 1{,}9$ où $h(t)$ est exprimée en mètres et t en secondes.

a) À quelle hauteur Clément commence-t-il sa passe ?

b) Quelle hauteur maximale le ballon atteint-il ?

c) Florian ne réussit pas à toucher le ballon que Clément lui passe. Combien de temps après la passe de Clément le ballon tombe-t-il au sol ?

d) Durant combien de temps le ballon est-il en phase de descente ?

La hauteur du filet est de 2,43 mètres. Durant combien de temps le ballon est-il situé au-dessus du filet ?

Les réponses sont à justifier.

L'évaluation a débouché sur la formation de trois groupes de besoins en fonction des profils repérés.

Le premier groupe

Les élèves de ce groupe s'engagent, ont des connaissances, parfois confuses, peu structurées. Ils éprouvent des difficultés à reconnaître dans un problème simple l'outil mathématique adéquat. Ils montrent des acquis dans l'utilisation des calculatrices. Ils attestent d'un regard critique intéressant et communiquent correctement à l'écrit.

Voici quelques extraits significatifs d'une copie d'un élève de ce groupe.

Extrait 1

a) $h(t) = -0{,}525t^2 + 2{,}1t + 1{,}9$
h la hauteur en m.
t le temps en s
on cherche la hauteur tel que le temps $t=0$
on pose $h(0) = -0{,}525 \times 0^2 + 2{,}1 \times 0 + 1{,}9$
$= 1{,}9$
ainsi Clément commence sa passe à 1,9 m donc
$u_0 = 1{,}9$m
2) On cherche a quelle hauteur maximale le ballon atteint-il.
on pose $U_n = -0{,}525n^2 + 2{,}1n + 1{,}9$
on utilise le mode recur de la calculatrice.
on visualise les premiers termes suivant:
$u_0 = 1{,}9$
$u_1 = 3{,}475$
$u_2 = 4$ — il semble que $u_2 = 4$ soit le maximum de cette fonction.
$u_3 = 3{,}475$
$u_4 = 1{,}9.$ — il semblerait donc que la hauteur maximale est 4 m.
On cherche a justifier cette hypothèse.

Extrait 2

il s'agit donc bien d'une fonction polynome du second degré
on cherche a étudier le tableau de variation de cette fonction.
on pose $\Delta = a\,b^2 - 4ac$
$= -0{,}525 \times (2{,}1)^2 - 4 \times (-0{,}525) \times 1{,}9$
$= 1{,}67475 > 0$

Extrait 3

Je n'arrive à rien d'interessant avec mes resultats
je repars sur la forme.
$U_n = -0{,}525n^2 + 2{,}1n + 1{,}9.$
je sais donc grâce au mode recur que le max est atteint au rang 2.

on pose: $U_2 = -0{,}525 \times 2^2 + 2{,}1 \times 2 + 1{,}9.$
$= 4$

ainsi la hauteur max est 4 m.

Le deuxième groupe

Les élèves de ce groupe comprennent et interprètent correctement la situation. Ils utilisent à bon escient des connaissances mathématiques et la calculatrice.Ils ne justifient pas les résultats.

Voici un extrait de copie.

a) On remplace t par 1. On cherche la hauteur des mains de Clément
$-0,525 \times 1^2 + 2,1 \times 1 + 1,9 = 3,475$.
$-0,525 \times 0^2 + 2,1 \times 0 + 1,9 = 1,9$.
b) On rentre cette fonction dans la Table des fonctions sur la calculatrice et on observe que lors de la passe de Clément il se trouve à 1,9m du sol.
b) Le ballon atteint son point culminant à 2 seconde à la hauteur de 4 mètres.
c) F(4) = 1,9m donc à F(5) = 0.
d) Le ballon est au plus haut à 2 secondes à 4 mètres 5 - 2 = 3
Le ballon touche le sol à 5 secondes donc il est en descente à partir de la 2ième seconde.
e) Si le filet est à 2,43 mètres dans le tableau des fonctions à la seconde 1, 2 et 3 le ballon ~~le ballon se trouv~~ se trouve successive à 3,475 ; 4 ; 3,475 mètres donc il reste 3 secondes au dessus du filet.

Le troisième groupe

Les élèves de ce groupe sont en réussite globale.

Pour permettre le progrès de tous les élèves, quels que soient leurs besoins, une remédiation plus ciblée, fondée sur les points forts de chacun, est proposée en Accompagnement Personnalisé.

Le support, commun aux trois groupes, est un exercice du même type que celui proposé en évaluation diagnostique. Le travail demandé à chaque groupe est, par contre, différent.

Des chercheurs ont, en première approximation, modélisé le taux de croissance μ (par heure h^{-1}) de la bactérie Methylosinustrichosporium (*) en fonction de la température T (en degré Celsius) par :

$$\mu(T) = -6\times10^{-5}T^2 + 2,76\times10^{-3}T - 1,998\times10^{-2}.$$

Les chercheurs souhaitent connaître :

- les températures minimale et maximale en-deçà et au-delà desquelles le taux de croissance est propice au développement de la bactérie ;
- le taux de croissance maximum ;
- l'intervalle des températures pour lequel le taux de croissance augmente en fonction de la température ;
- les températures donnant un taux de croissance égal à $4,5\times10^{-3}$.

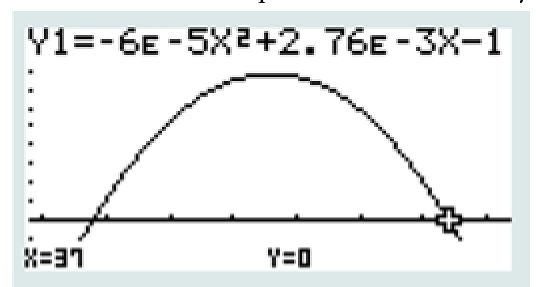
(*) Bactéries capables de croître et de se multiplier en utilisant le méthane comme seule source de carbone et d'énergie.

Pour les élèves du premier groupe : l'objectif fixé par le professeur est d'apprendre à utiliser son cours.

Pour cela, le professeur propose aux apprenants de résoudre le problème à l'aide de la leçon et de l'ébauche du travail d'un élève qu'il donne comme support, ce dernier étant reproduit ci-dessous :

Pour résoudre le problème posé, Mélanie effectue la démarche suivante :

- elle repère dans le texte les mots importants pour s'approprier la situation ;
- elle trace à l'écran de sa calculatrice la courbe représentant la fonction μ



- la parabole obtenue modélise le taux de croissance de la bactérie ;
- μ est une fonction polynôme de degré 2 ;
- elle écrit $a = \ldots$, $b = \ldots$ et $c = \ldots$

Poursuivre le travail de Mélanie afin de répondre aux questions posées par les chercheurs.

Pour les élèves du deuxième groupe : l'objectif fixé par le professeur est d'apprendre à utiliser une fiche méthode pour apprendre à justifier.

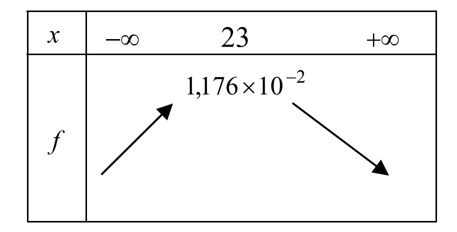
L'activité proposée aux élèves par le professeur est la suivante :

Pour résoudre le problème posé, Charlotte utilise la fiche méthode suivante :
f est la fonction polynôme définie sur R par :
$f(x) = -6\times10^{-5}x^2 + 2{,}76\times10^{-3}x - 1{,}998\times10^{-2} = -6\times10^{-5}(x-9)(x-37) = -6\times10^{-5}(x-23)^2 + 1{,}176\times10^{-2}$.

- Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, j'utilise la forme factorisée de $f(x)$: $f(x) = -6\times10^{-5}(x-9)(x-37)$
$f(x) = 0$ équivaut à $-6\times10^{-5}(x-9)(x-37) = 0$, ce qui donne $x = 9$ ou $x = 37$.

- Pour calculer le discriminant de f, j'utilise la forme développée de f :
$f(x) = -6\times10^{-5}x^2 + 2{,}76\times10^{-3}x - 1{,}998\times10^{-2}$
$a = -6\times10^{-5}$; $b = 2{,}76\times10^{-3}$; $c = -1{,}998\times10^{-2}$
$\Delta = (2{,}76\times10^{-3})^2 - 4\times(-6\times10^{-5})\times(1{,}998\times10^{-2}) = 2{,}8224\times10^{-6}$

- Pour dresser le tableau de variation de f , j'utilise la forme canonique de f :
$f(x) = -6\times10^{-5}(x-23)^2 + 1{,}176\times10^{-2}$



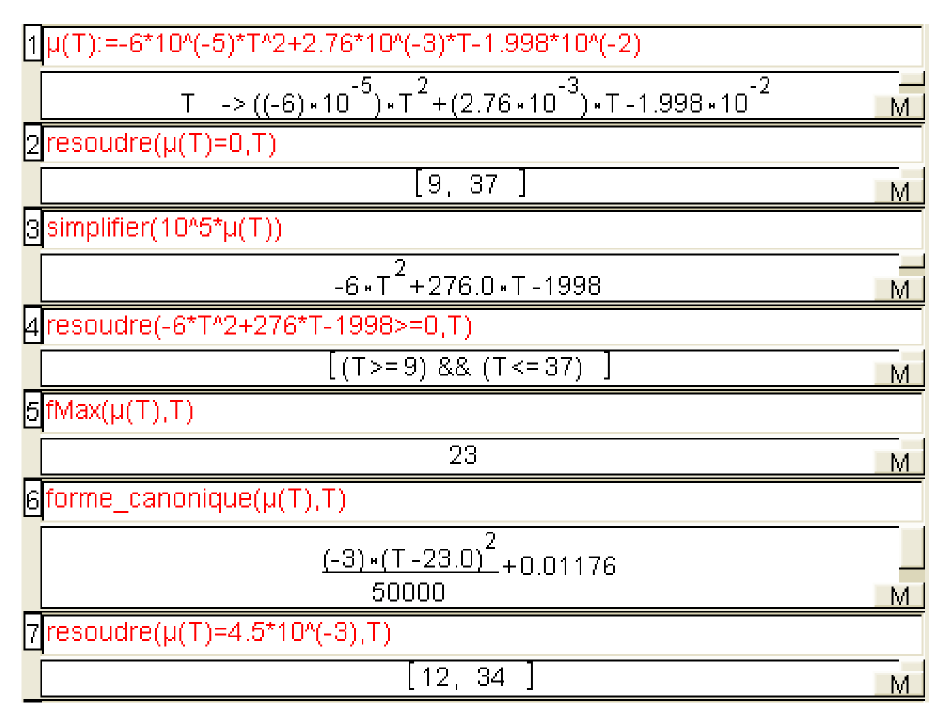
Répondre aux questions suivantes en choisissant la forme de f la plus adéquate :

1. Résoudre dans **R** l'inéquation $f(x) \geq 0$.
   1.A. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) \leq 1{,}176 \times 10^{-2}$.
   1.B. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole qui représente f .
   1.C. Résoudre dans **R** l'équation $f(x) = 4{,}5 \times 10^{-3}$.
2. Répondre aux questions posées par les chercheurs.

Pour les élèves du troisième groupe : l'objectif fixé par le professeur est d'approfondir.

L'activité proposée aux élèves de ce groupe consiste à résoudre le problème à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Pour résoudre le problème posé, Léa utilise un logiciel de calcul formel dont voici une copie d'écran :



Expliquer la démarche de Léa.

Bilan des travaux

Les corrections et les synthèses des différentes démarches proposées à chaque groupe d'élèves sont faites en Accompagnement Personnalisé. Chaque groupe expose son travail au reste de la classe, favorisant ainsi la communication orale. Cette synthèse offre à chaque élève la possibilité de choisir l'une des démarches pour un même problème en fonction de ses compétences.

Prolongement

Afin de mettre à profit ces pistes de différenciations pédagogiques, il serait intéressant de proposer deux situations similaires aux élèves : l'une en classe, accompagnée d'un questionnement sur le choix méthodologique effectué par l'élève (qui peut être fait avant l'évaluation diagnostique) et l'autre sur l'Espace Numérique de Travail mettant en scène une situation plus complexe dans laquelle les élèves devraient mobiliser et combiner plusieurs procédures acquises. Le professeur pourrait ainsi vérifier la capacité des élèves à réinvestir ce qu'ils ont appris dans un autre cadre et selon des modalités différentes.

2. Dérivation

Lien entre coefficient directeur et pente d'une droite

Cette activité a pour but d'anticiper les difficultés, d'assurer une meilleure homogénéité des connaissances à l'approche du chapitre sur la dérivation. Elle fait suite à un repérage des besoins sur les notions d'équations de droites, de coefficient directeur, de pente.

Problématiques développées : P1, P2, P4 et P5.
Série : toutes séries.
Place dans la progression : avant le cours sur la dérivation.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les équations de droite. Donner un sens concret au coefficient directeur.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Équations de droites.
Logiciels	Tableur et/ou calculatrice. Logiciel de géométrie dynamique.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel. Accompagnement personnalisé.

Scénario pédagogique

Phase 1 : un support concret : à la montagne (extrait Bac L maths info)

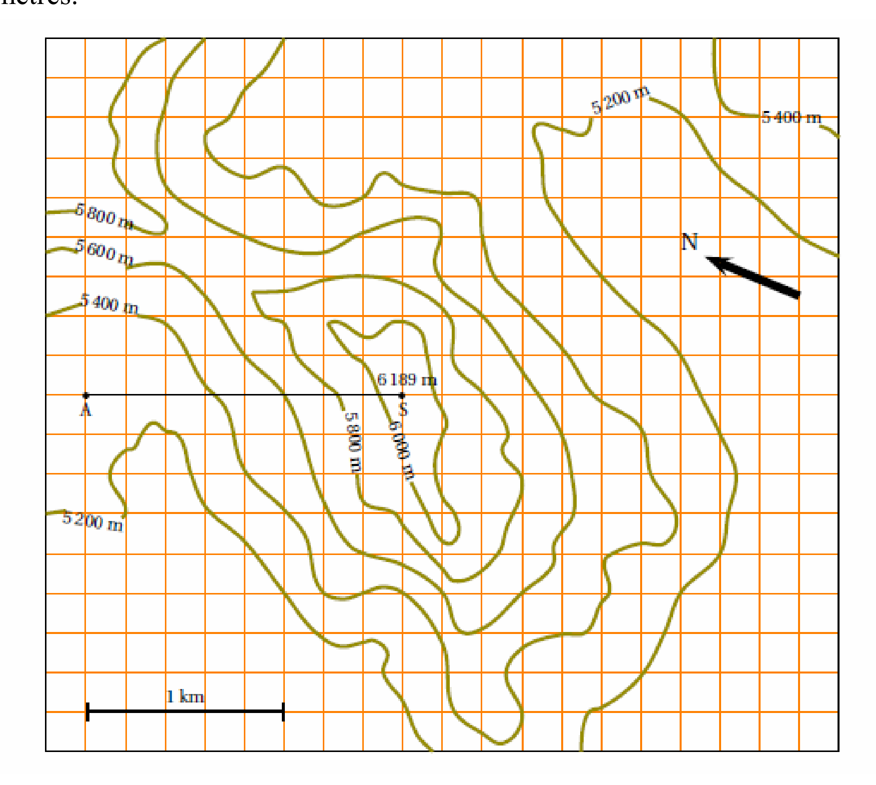
Le professeur laisse travailler ses élèves en autonomie sur le support proposé ci-dessous. Il passe dans les rangs pour aider ou débloquer certains élèves en difficulté. Des besoins se font sentir sur un éclairage entre « coefficient directeur » et « pente d'une droite ». Le professeur explore ces notions à l'aide du logiciel *GeoGebra* afin de créer des images mentales chez les apprenants. Une synthèse collective est réalisée à l'issue de ce travail qui conduit à l'élaboration d'une fiche-méthode.



Island peak 6189m - Makalu 8 463 m

Ci-dessous se trouve la carte de la région montagneuse autour du sommet « Island Peak » au Népal. Le sommet culmine à 6 189 mètres d'altitude et est matérialisé sur la carte par le point S.

1. Hachurer sur la carte la zone montagneuse située à une altitude comprise entre 5 200 mètres et 5 400 mètres.



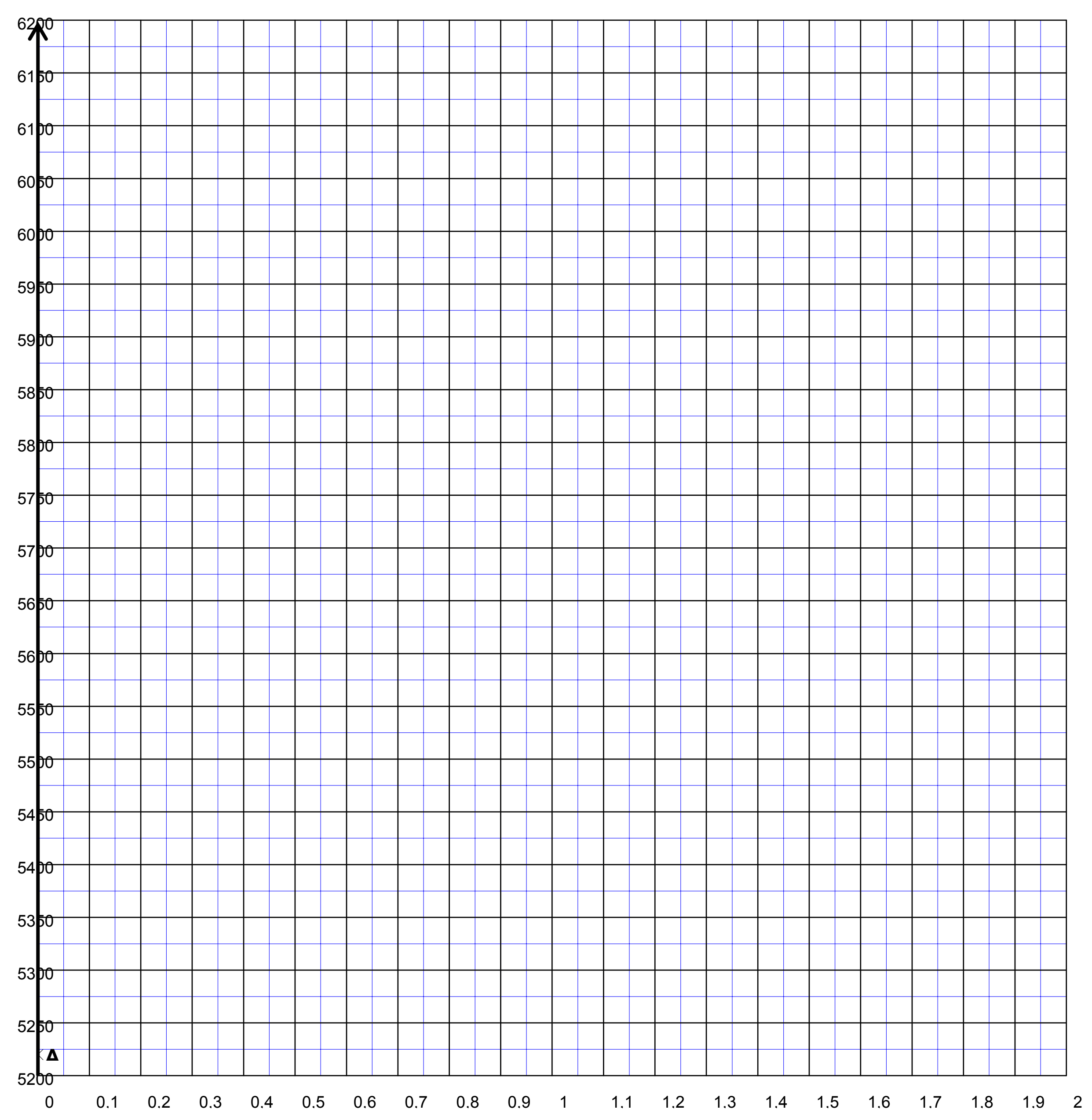
2. Alexandre a enfin réussi à s'offrir le trek de ses rêves : atteindre en quelques jours le camp de base de l'Everest que représente l'Island Peak.

Pour sa dernière étape, Alexandre va partir du point A situé à 5 220 mètres d'altitude pour arriver au sommet S en suivant le trajet indiqué sur la carte.

- À partir de la lecture de la carte, calculer l'élévation moyenne, exprimée en mètres par kilomètre parcouru, lors de sa dernière étape. Arrondir le résultat à l'unité.
- Dans un repère donné, le point A a pour coordonnées (0 ; 5 220). Tracer dans le repère donné un profil du parcours d'Alexandre.

Indication possible : pour aider à tracer le profil, on peut repérer sur la carte des points du parcours dont l'altitude est connue.

- Le profil obtenu est la représentation d'une fonction dite affine par morceaux. Quelle est son expression ?
- Que représente le coefficient directeur de chacun de ces segments de droites ?
- À l'aide d'un nouveau tracé, retrouver sur le graphique l'élévation moyenne par kilomètre parcouru.

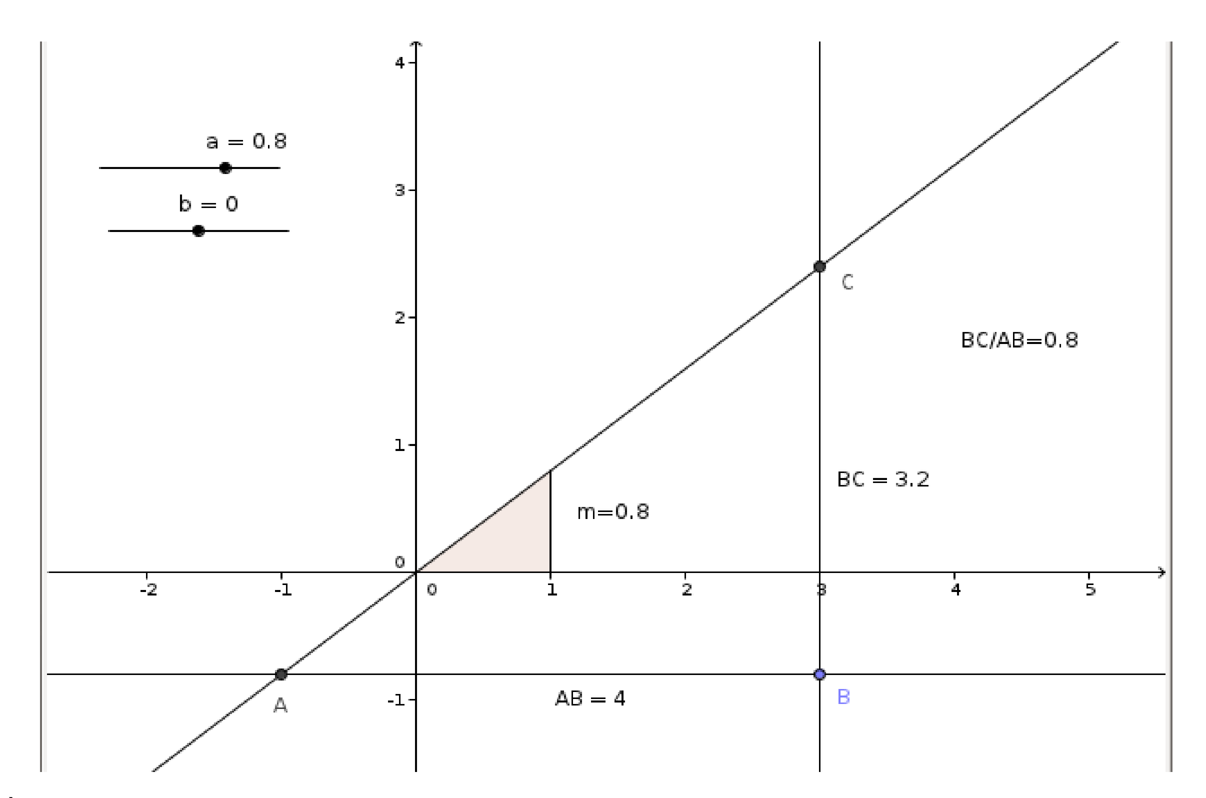


Phase 2 : prolongement de l'activité par l'élaboration d'une fiche personnelle.

En utilisant le logiciel *GéoGebra*, tracer la droite d'équation $y = ax + b$, a et b étant les valeurs données par deux curseurs. On se positionne par exemple sur $y = 0,8x$ dans un repère orthogonal. On prend le point A d'abscisse –1 de la droite tracée, B est un point mobile sur la droite horizontale passant par A et le point C est l'intersection de la droite tracée et de la perpendiculaire à (AB) passant par B. On calcule AB, BC, et le rapport BC/AB.

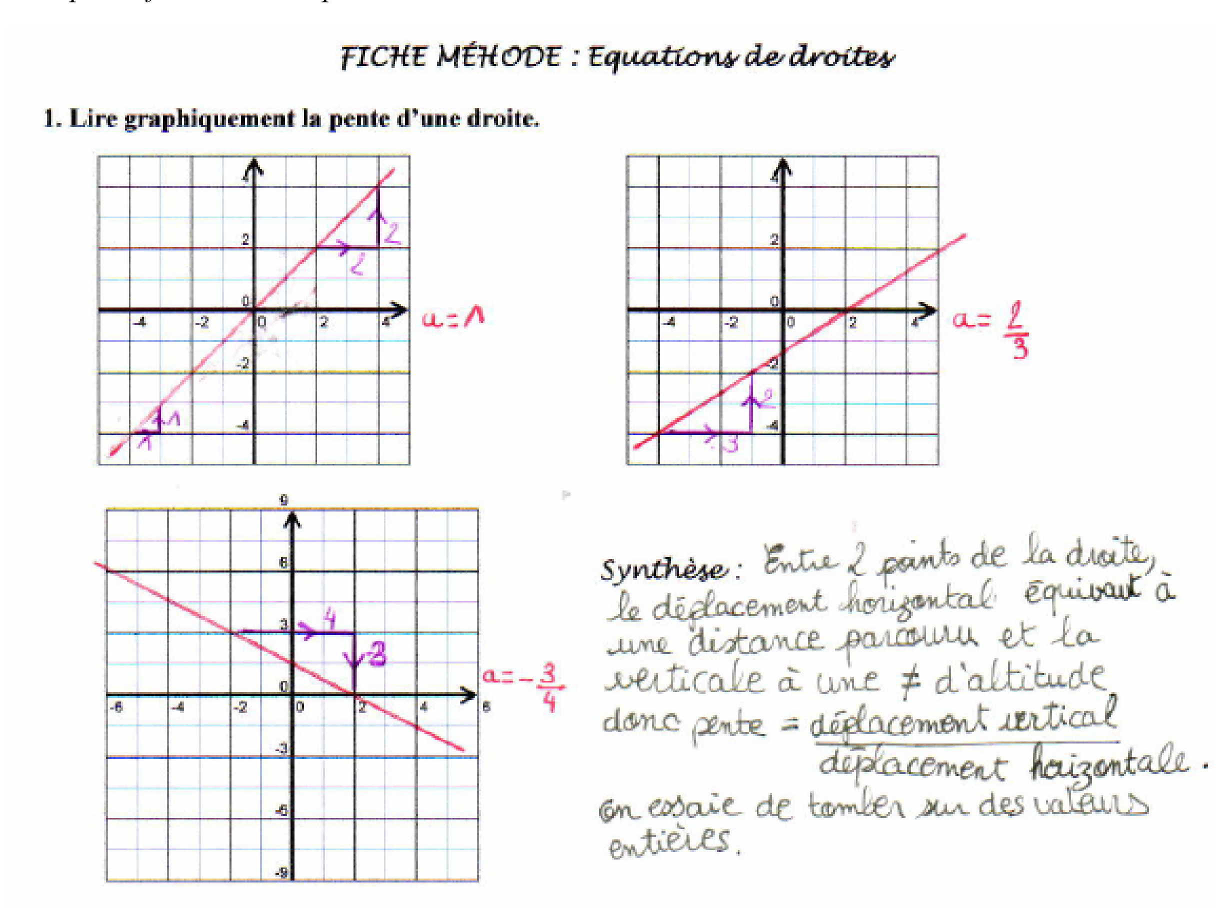
Les élèves remarquent alors que, quel que soit le point B, le rapport est constant.

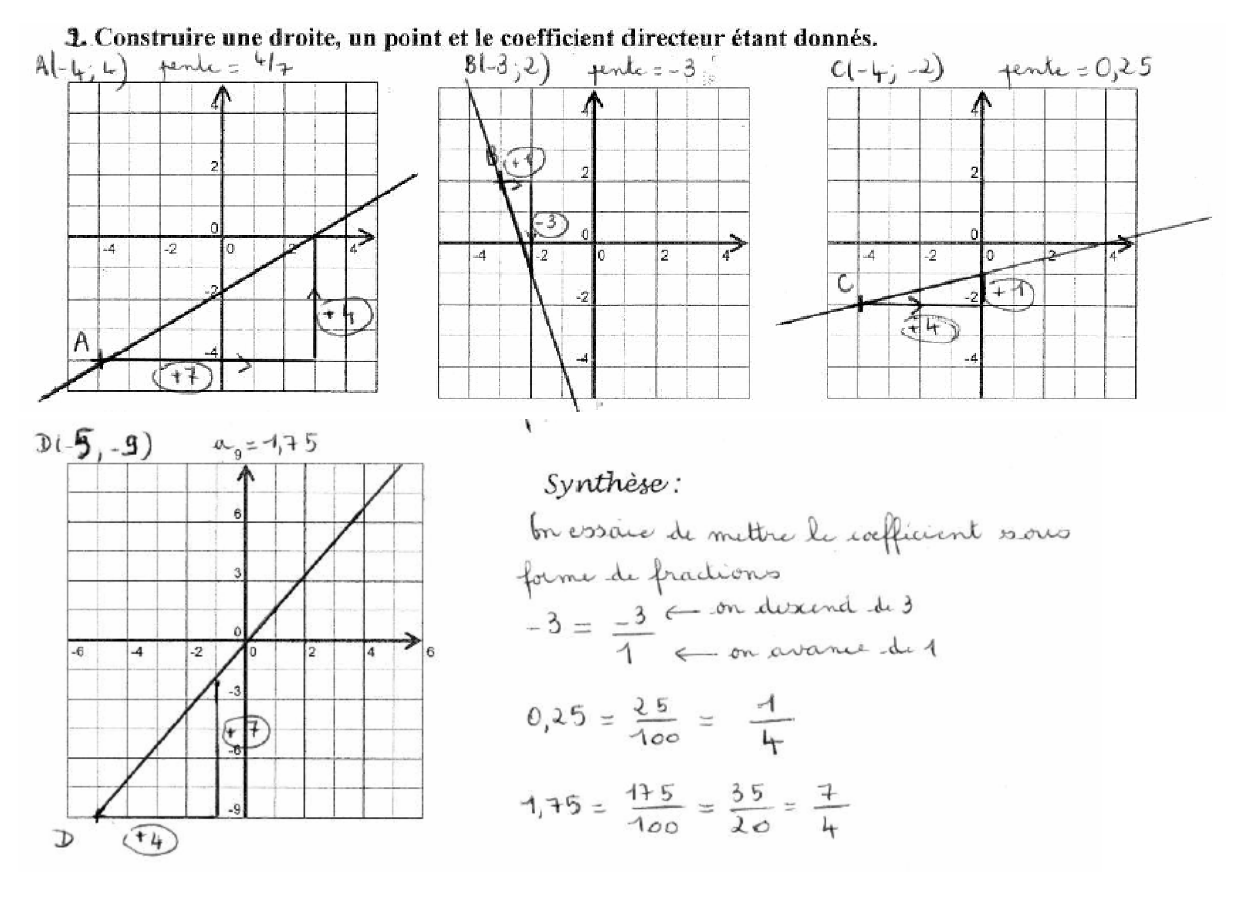
Les triangles rectangles qui apparaissent à l'écran ont des côtés proportionnels.



À l'issue de cette activité, les élèves amorcent le début d'une **fiche-méthode qu'ils compléteront au fur et à mesure** des séances.

Exemple de fiche élaborée par des élèves :





On pourra vérifier avec les élèves par calcul que si x « augmente » de 1 alors y « augmente » de a.

Phase 3 : lien graphique entre coefficient directeur et pente.

L'objectif de l'étude suivante est de créer chez les élèves des images mentales afin de les rendre capables d'appréhender le lien entre coefficient directeur et pente. Pour cela, on utilise le logiciel *GeoGebra*. Les élèves échangent leurs observations à l'oral et complètent en autonomie leur fiche-méthode selon leurs besoins.

On se placera dans un repère **orthonormé** et on continue d'exploiter la situation créée avec le logiciel *GeoGebra*.

a. Éduquer son œil, créer des liens entre coefficients directeurs et situations de la droite.

À l'oral, le professeur amène les élèves à s'intéresser aux questions suivantes :

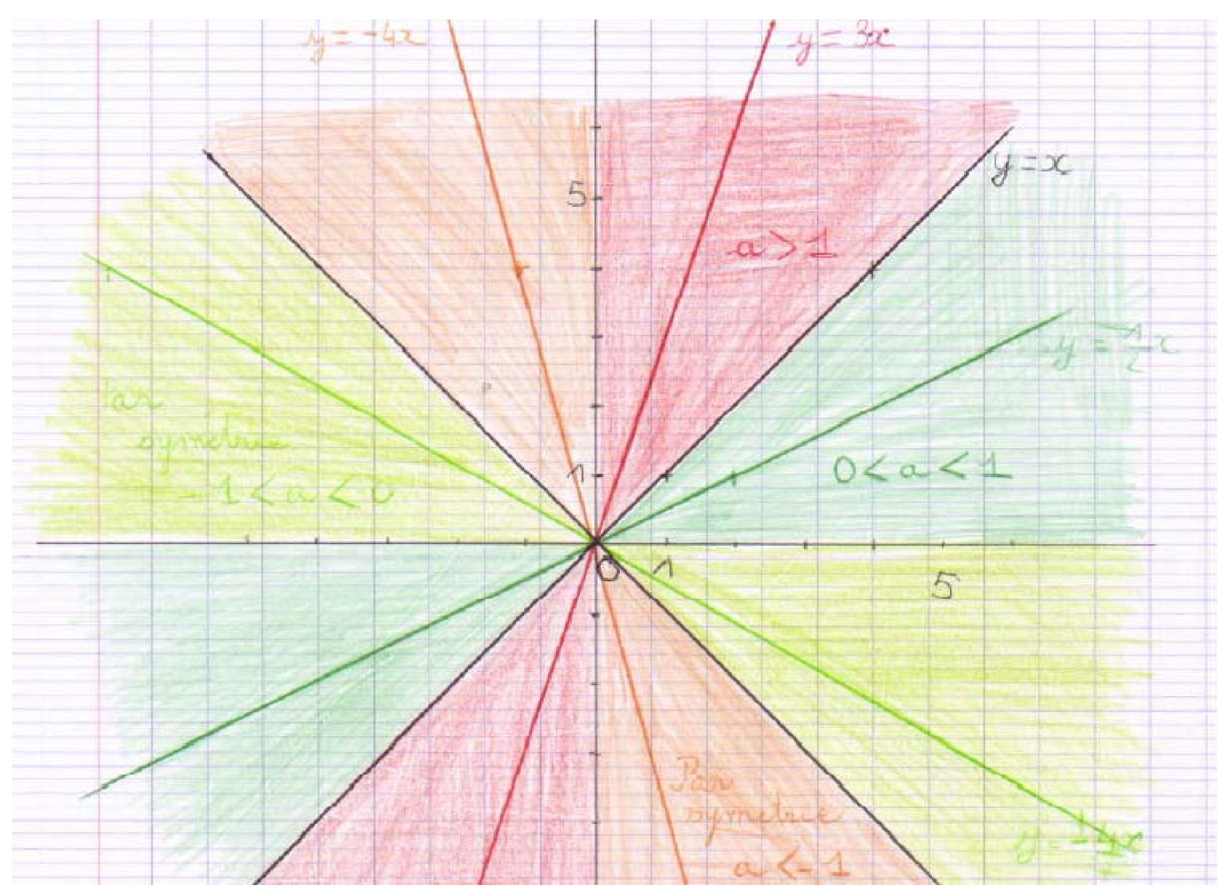
- Qu'observe-t-on quand on modifie le paramètre b ? Conclure.

On remarquera que $b = f(0)$.

- On fixe $b = 0$.

Qu'observe-ton lorsque $a > 1$? $a = 1$? $0 < a < 1$? $a = 0$? $-1 < a < 0$? $a = -1$?

Exemple de synthèse d'élève :



b. Symétries et coefficients directeurs.

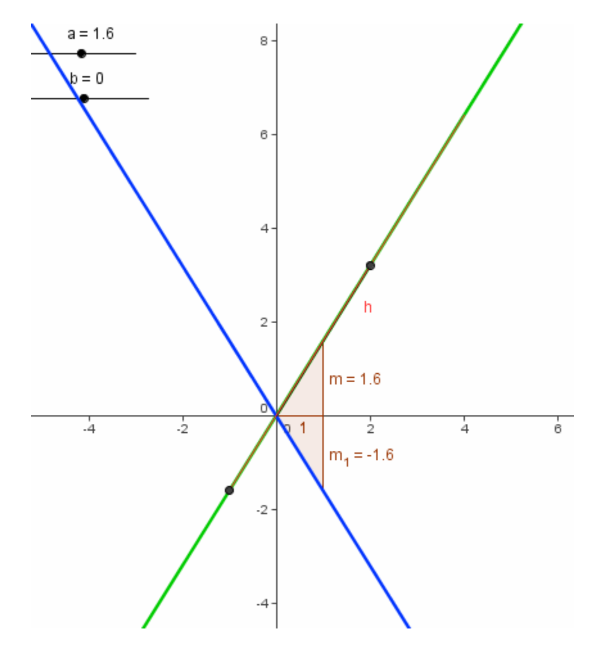
À l'aide du logiciel *GeoGebra*, tracer une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax$, puis la droite $\mathcal{D}'$ symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à l'axe des ordonnées. Que dire des coefficients directeurs des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$?

Faire de même avec les droites symétriques de $\mathcal{D}$:

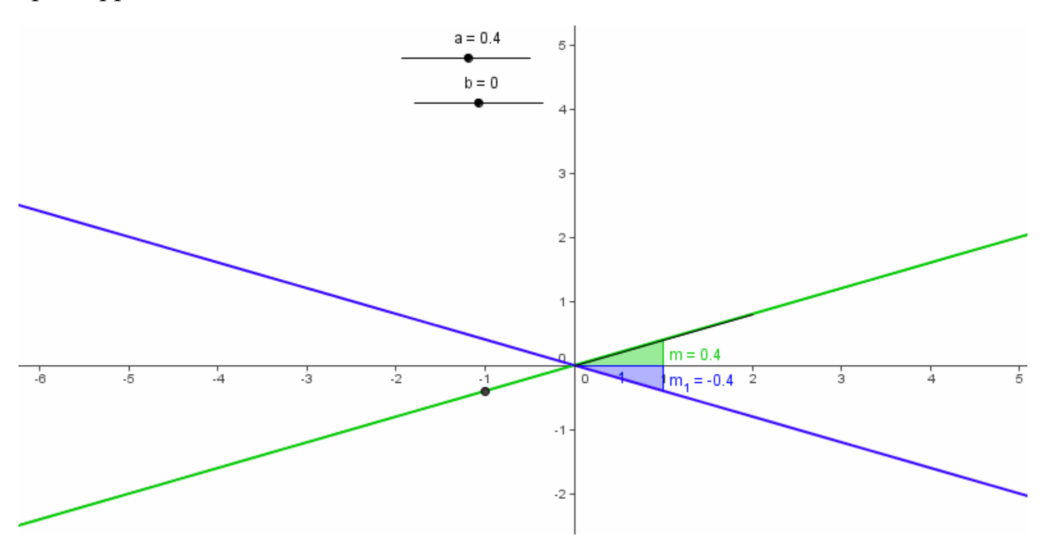
- par rapport à l'axe des abscisses,
- par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$),
- par rapport à la seconde bissectrice (droite d'équation $y = - x$).

Dans les représentations ci-dessous, la droite verte est la droite initiale $\mathcal{D}$ et la droite bleue est sa symétrique par rapport à l'axe précisé.

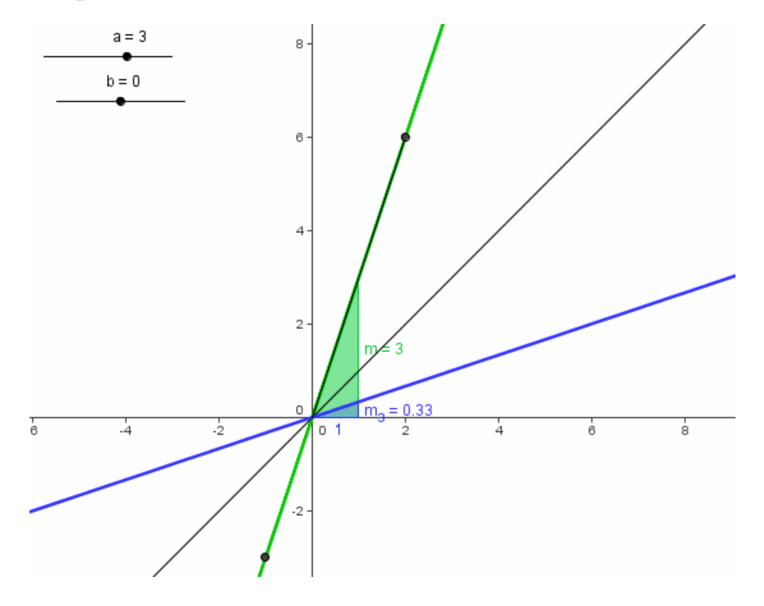
Symétrie par rapport à l'axe des abscisses :



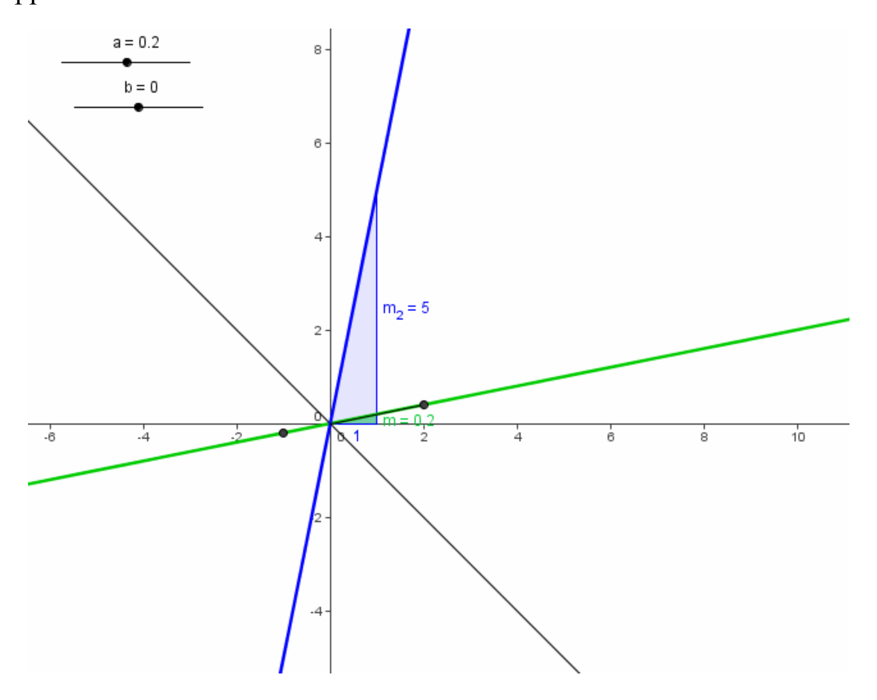
Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :



Symétrie par rapport à la première bissectrice :

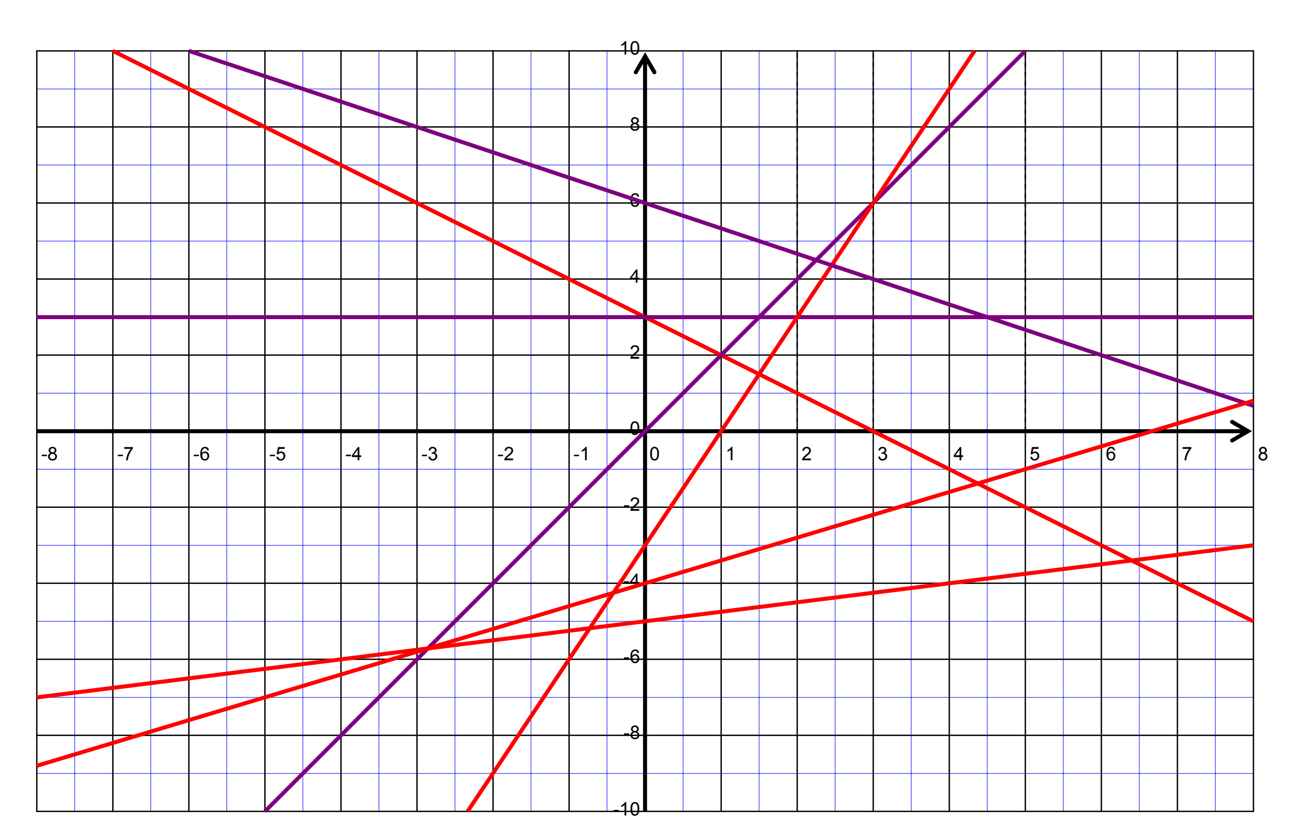


Symétrie par rapport à la seconde bissectrice :



Pour aller plus loin, on pourra se placer dans un repère orthogonal…

Pour conclure, une mise en application est réalisée en demandant aux élèves de déterminer les équations des droites représentées dans le repère ci-dessous :



Introduction à la dérivation en utilisant un T.B.I.

Problématiques développées : P1, P2, P4, P8 et P9.
Série : toutes séries (expérimenté en première ES-L).
Place dans la progression : avant le cours sur la dérivation.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les fonctions, sur les droites. Introduire un nouvel outil et montrer son intérêt.
Compétences	Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Mener des raisonnements. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Les fonctions. Les droites.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel et collectif.

Scénario d'introduction au chapitre sur la dérivation

Le scénario pédagogique consiste à introduire le nombre dérivé en classe de Première. Il a été testé en classe de 1ère L avec un groupe d'élèves peu habitués à manier les concepts d'analyse. Le professeur utilise un Tableau Blanc Interactif (T.B.I, appelé aussi T.N.I pour Tableau Numérique Interactif) ainsi que des boîtiers de vote.

Le tableau blanc interactif

Le T.B.I. est un outil numérique permettant de centraliser sur le tableau les logiciels, les cours, les écrits numérisés, en complète interaction à partir de l'écran de projection. L'enseignant est ainsi plus libre, il n'est plus astreint à rester à côté de l'ordinateur. Il fait face aux élèves et peut mieux observer son public. Les essais des élèves, les expérimentations effectuées peuvent être stockés afin de conserver trace de la vie mathématique de la classe.

Il est possible en outre d'utiliser des boîtiers d'évaluation qui permettent aux élèves de répondre en direct et de manière individuelle à des questionnaires à choix multiples. Les résultats des votes apparaissent en direct sur l'écran du T.B.I., et aident le professeur à établir des diagnostics sur les connaissances et les savoir-faire des élèves, ce qui lui permet ensuite de mettre en place les réponses pédagogiques appropriées.

Partie I : évaluation diagnostique des élèves

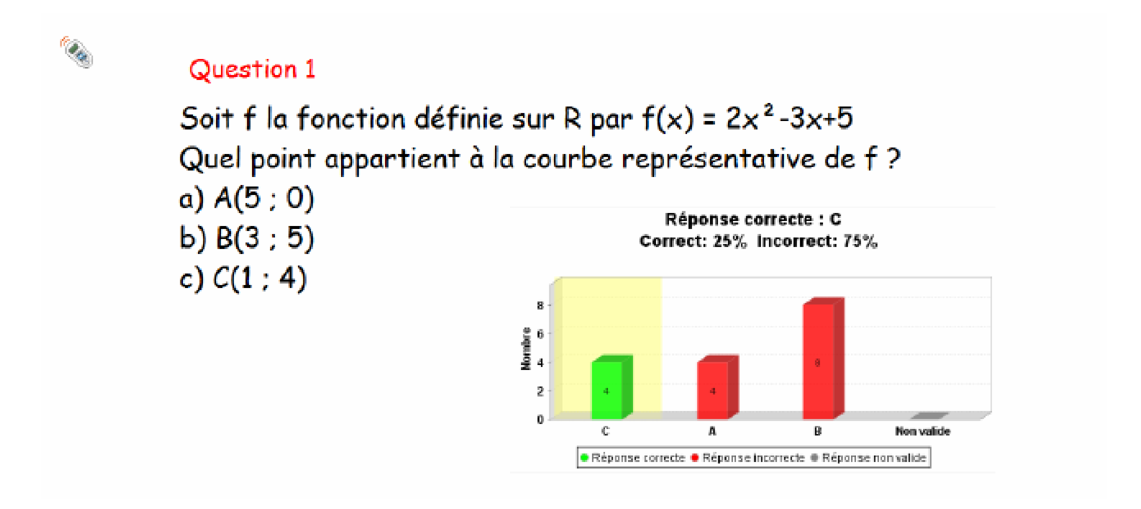
Afin de faire le point sur certaines connaissances des élèves portant sur les fonctions, nécessaires à une bonne compréhension du chapitre sur la dérivation, le professeur a conçu un QCM comprenant en particulier des distracteurs permettant de repérer quelques erreurs spécifiques. L'objectif de l'enseignant est ainsi d'effectuer en direct des remédiations personnalisées en classe entière.

Pour chaque question du QCM, l'élève doit voter pour la réponse qu'il pense être la bonne. Le tableau récapitulatif des résultats s'affiche ensuite sur le T.B.I..Le professeur relève les erreurs commises en temps réel, sans que la notion de sanction ne soit présente. Il repère un élève concerné par une erreur et lui demande d'expliquer son raisonnement. L'enseignant peut alors démonter les mécanismes erronés.

Cette expérimentation a duré 2 heures. Elle a permis de faire le point sur des notions essentielles portant sur les fonctions et a aidé les apprenants à créer leurs propres fiches méthodologiques. En effet, les élèves consignent, dans un petit cahier personnel, les aides, les méthodes, les outils de contrôle à l'aide des TIC (calcul formel, logiciel de géométrie…), les rappels de cours dont ils estiment avoir besoin, ainsi que leurs erreurs analysées et corrigées.

On trouvera ci-dessous les questions posées ainsi que des extraits de travaux effectués en classe, et notifiés dans certains « petits cahiers » d'élèves.

Question 1 :



La moitié des élèves font une confusion avec la forme canonique dans laquelle on voit apparaître les coordonnées du sommet de la parabole et pensent qu'il y a un lien entre les coordonnées d'un point de la courbe et les coefficients de son équation. Un quart d'entre eux confondent abscisse et ordonnée.

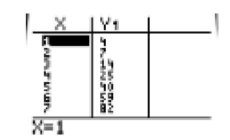
Pistes de remédiation :

- Faire expliciter par un élève ayant répondu B la méthode permettant de contrôler qu'un point appartient à la courbe représentative d'une fonction.
- Mettre en évidence les liens entre la forme canonique et la parabole correspondante.
- Utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice.
- Rappeler la définition de la courbe représentative d'une fonction.

Un extrait du cahier d'un élève :

Comment montre-t-on qu'un point appartient à la courbe représentative d'une fonction ?

- Il faut remplacer x par l'abscisse du point et trouver l'ordonnée.
- Faire le graphique et le tableau de valeur sur la calculatrice



Complément : On peut prolonger par l'écriture d'un algorithme :

Construire un algorithme vérifiant l'appartenance d'un point à la courbe

Entrée : on définit la fonction f
on entre les coordonnées (x, y) du point

Traitement : si $f(x) = y$
alors afficher « oui »
sinon afficher « non »

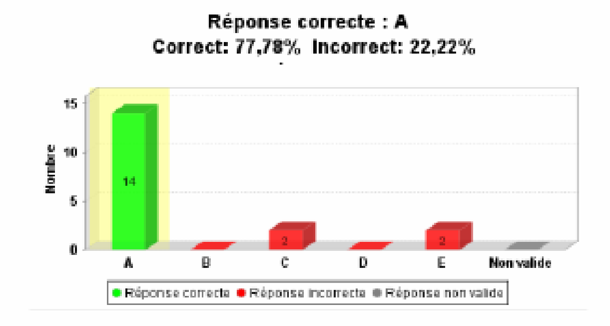
Question 2 :



Question 2

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)= 3-2x^2$.
Soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé.
Le point M de (C) d'abscisse -3 a pour ordonnée :

a) -15
b) 21
c) -9
d) 9
e) -33



Les élèves ont manifestement retenu la notion d'appartenance à une courbe. Seules quelques erreurs de calcul sont relevées.

Piste de remédiation :

- Expliciter les règles de priorité des opérations.

Un extrait du cahier d'un élève :

Quelles étaient les erreurs visées dans la question précédente ?

$3-2\times(-3)^2$

$= 3-2\times 9$

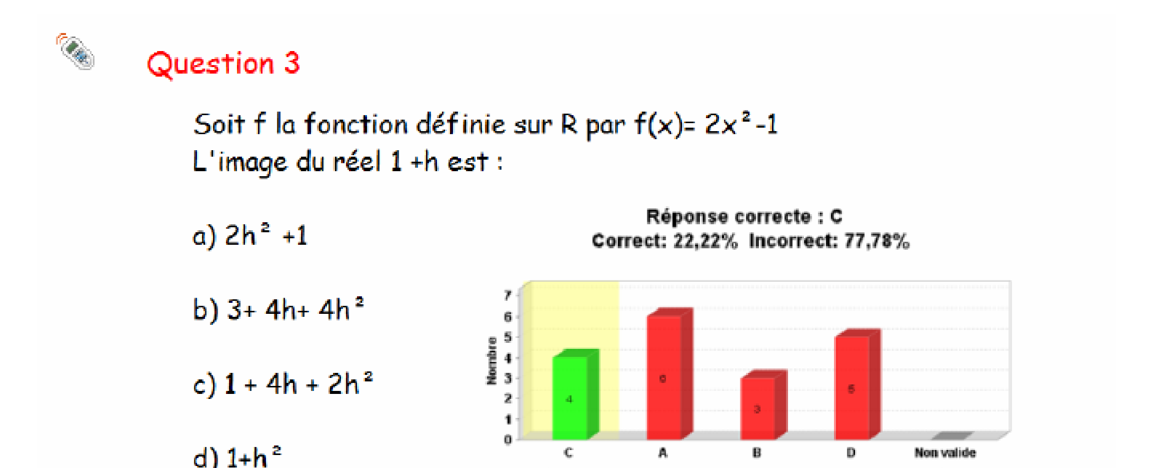
$= -15$

⚠ $(-3)^2 \neq -9$

$(-3)^2 \neq 6$ Confusion carré - double

$2x^2 \neq (2x)^2$

Question 3 :



La plupart des élèves ne comprennent pas la question posée.

Pistes de remédiation :

- Faire expliquer par certains élèves le sens de cette question.
- Se réapproprier les identités remarquables.
- Apprendre à contrôler la validité du développement (usage de tests, utilisation d'un logiciel de calcul formel,…).

Un extrait du cahier d'un élève :

Comment contrôler le résultat de mon calcul ?

$2(1+h)^2 - 1 = 2[1 + 2\times1\times h + h^2] - 1$

$= 2 + 4h + 2h^2 - 1 = 2h^2 + 4h + 1$

- on peut contrôler en remplaçant h par une valeur par exemple 1.

$f(1+1) = 2(2)^2 - 1 = 7$

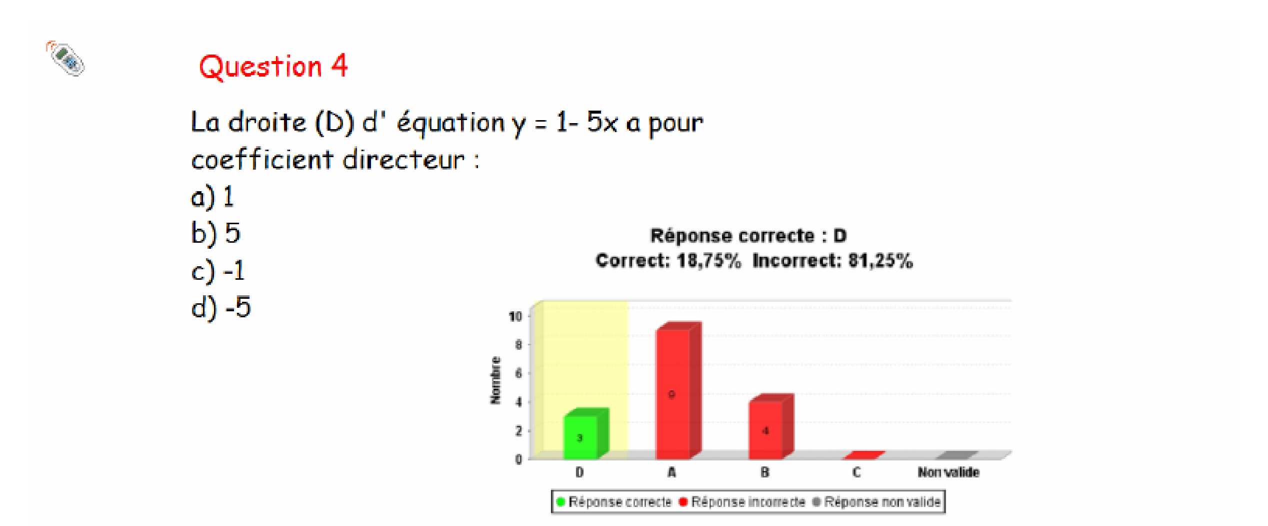
a) $2\times1^2+1 = 3$ b) $3+4+4 = 11$

c) $1+4+2 = 7$ d) $1+1^2 = 2$

- on utilise un logiciel de calcul formel

```
1 f(x):=2x^2-1
        x -> 2·x^2 -1
2 f(1+h)
        2·(1+h)^2 -1
3 simplify(f(1+h))
        2·h^2 +4·h+1
```

Question 4 :

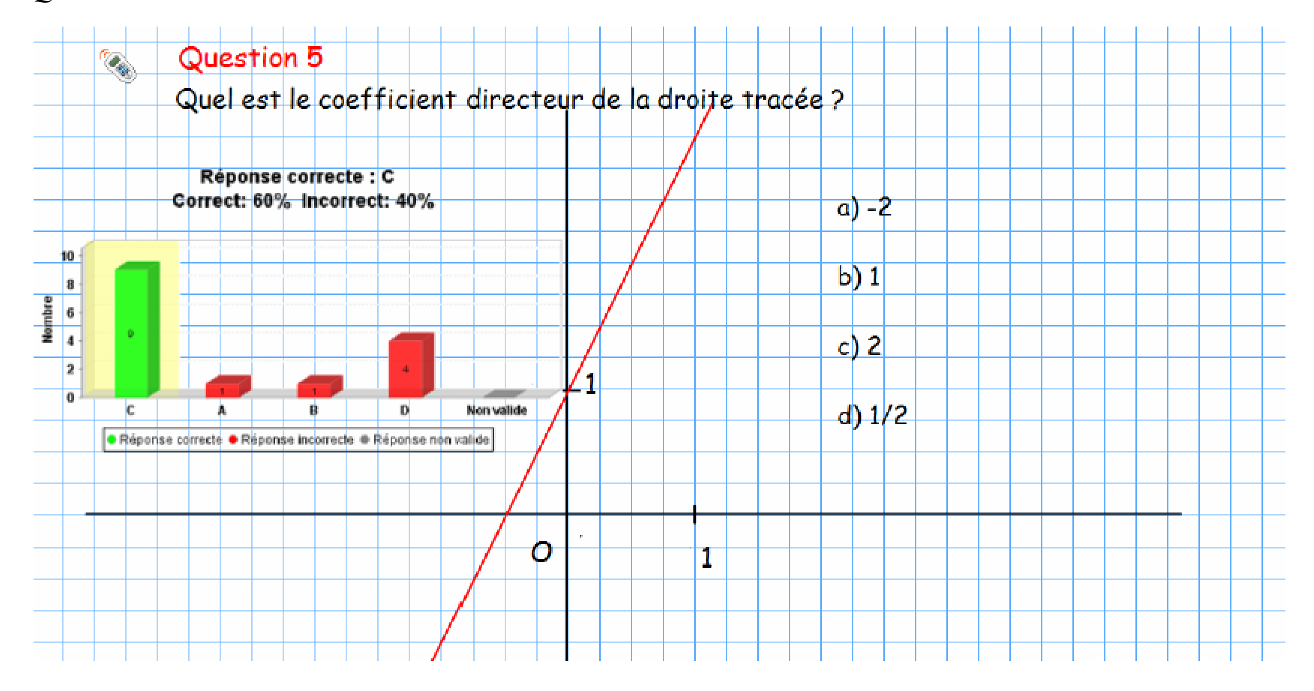


Les réponses mettent en évidence des connaissances trop fragiles.

Pistes de remédiation :

- Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour construire une image mentale du coefficient directeur d'une droite.
- Travail sur la proportionnalité des accroissements de *x* et *y*. Faire remarquer alors que si *x* « augmente » de 1, alors y « augmente » de *a*.

Question 5 :

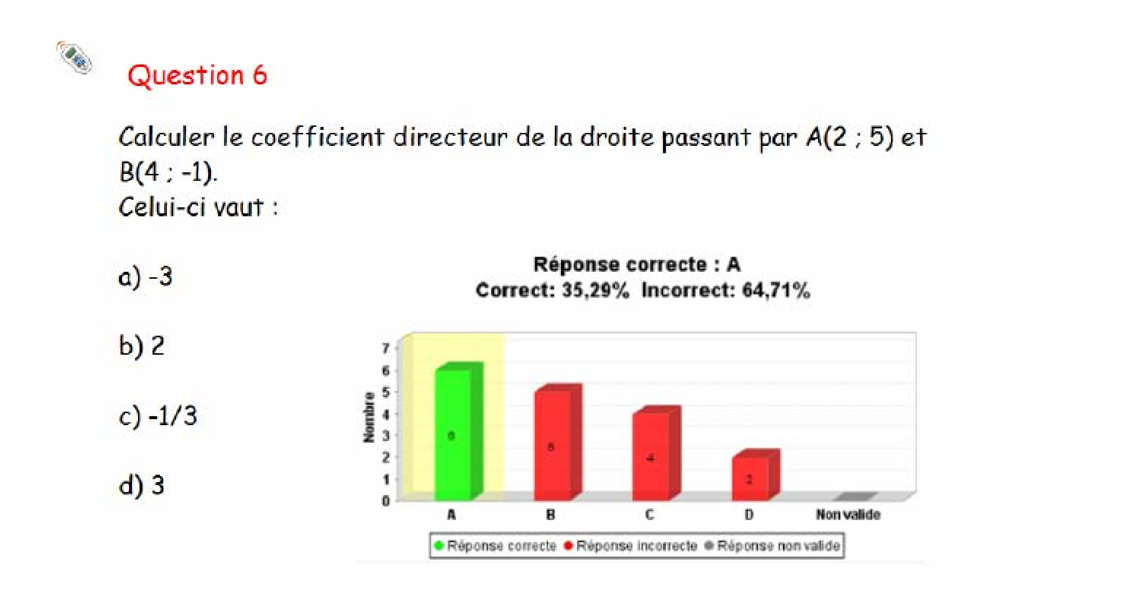


On note encore quelques confusions entre l'abscisse et l'ordonnée.

Pistes de remédiation :

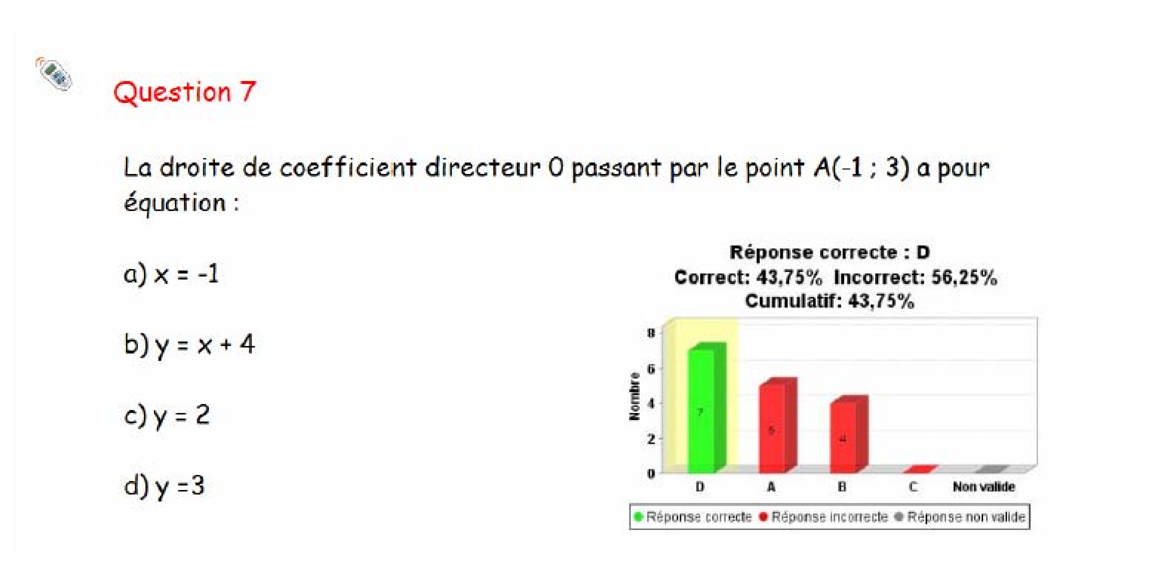
- Interpréter le coefficient directeur en termes d'inclinaison.
- Lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite.
- Faire le lien avec la formule $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Question 6 :



Visualiser la droite permet d'apporter une remédiation efficace.

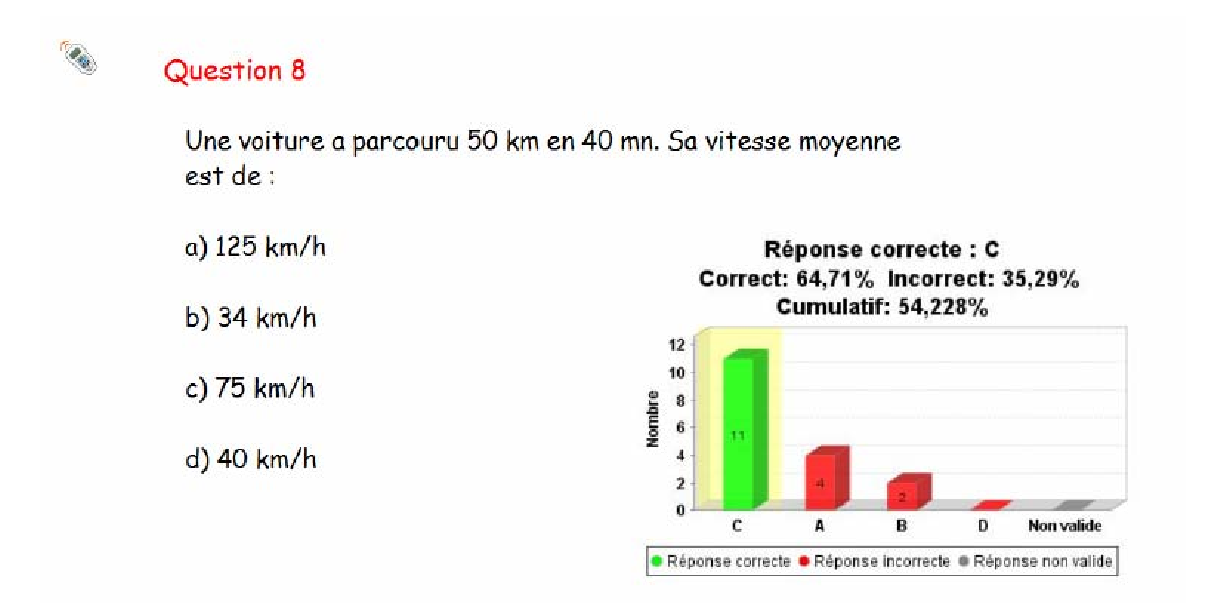
Question 7 :



Pistes de remédiation :

- Visualiser la droite horizontale.
- Caractériser l'ensemble des points ayant même ordonnée.
- Rappeler le lien entre coefficient directeur et inclinaison d'une droite.

Question 8 :



Pistes de remédiation :

- Donner du sens à la notion de vitesse.
- Explicitation des démarches utilisées (règle de trois, « produit en croix », propriétés de linéarité, formule sur la vitesse).

<u>Pistes de travail en accompagnement personnalisé (AP) ou à l'extérieur de la classe</u>

On pourra poursuivre les remédiations en Accompagnement Personnalisé à partir des notes écrites sur les « petits cahiers » des élèves qui constituent dorénavant des références pour les apprenants.

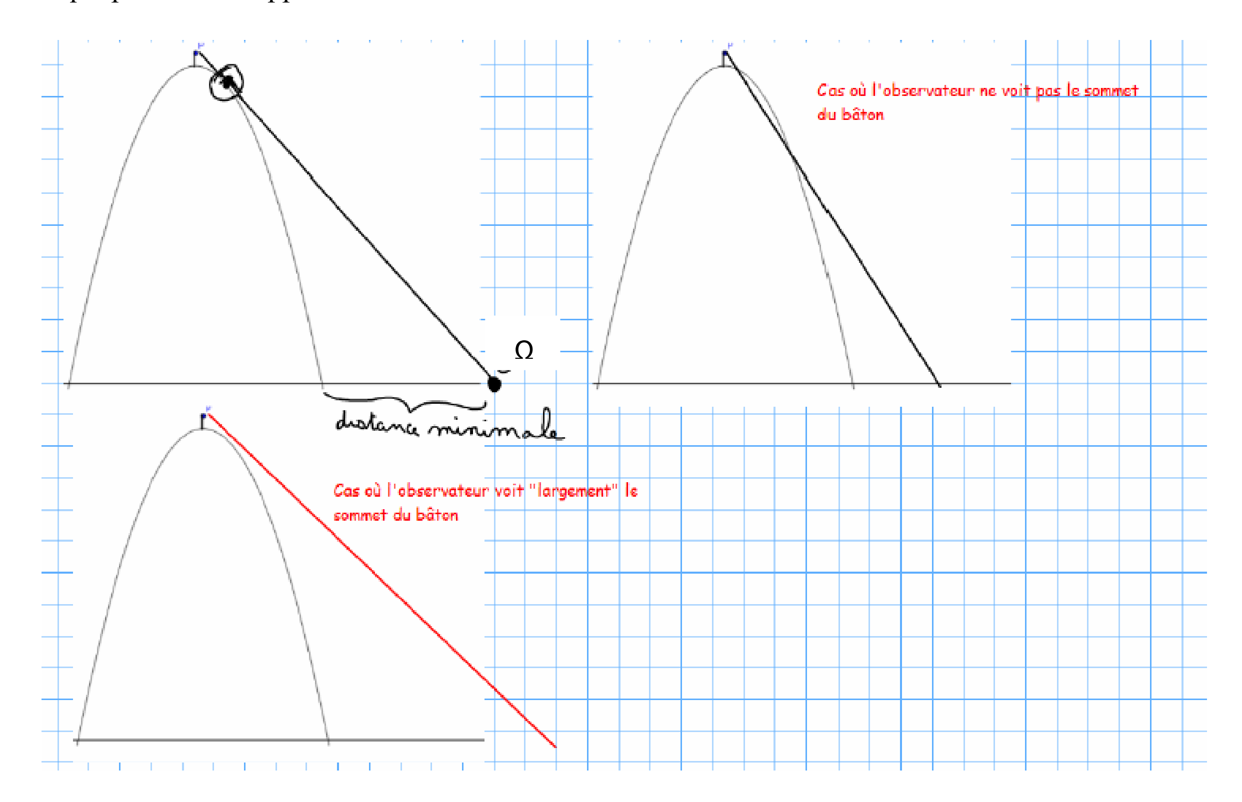
- Aide à la structuration des connaissances, à l'apprentissage d'une leçon : exposé oral des connaissances sur les fonctions affines.
- Aide au développement de l'autonomie : rédaction d'une fiche-méthode sur la lecture d'une image, d'un antécédent, construction d'un tableau de valeurs et d'une courbe représentative, vérification de l'appartenance d'un point à une courbe, fonctions polynômes du second degré…
- Utilisation de la fiche-méthode précédente pour résoudre des exercices d'entraînement choisis par l'élève lui-même en fonction de l'analyse qu'il fait de ses difficultés.
- Utilisation d'un exerciseur en ligne (Euler, WIMS…) pour des exercices répétitifs sur la lecture ou le calcul d'un coefficient directeur.

Partie II : découverte de la notion de tangente à une courbe

Reprise avec *GeoGebra* de l'activité terril (Document d'accompagnement – 2001).

L'énoncé du problème :
Au sommet d'un terril de 25m de haut se trouve planté un bâton de 1 m de haut. À quelle distance minimale du pied du terril faut-il se placer pour apercevoir le bout du bâton de 1 m de haut ?

Le professeur découpe le T.B.I. en quatre parties sur lesquelles le schéma du terril est représenté. Il propose à quatre élèves de positionner avec des tracés l'endroit où devrait se trouver l'observateur. Les différentes réflexions des élèves aboutissent au fait que la position la meilleure est celle où la droite (ΩP) reliant l'observateur au sommet du bâton « frôle » un point du terril. Le mot « tangente » est évoqué par certains apprenants. Les schémas suivants sont sélectionnés :



Le débat mathématique autour de l'existence d'une telle droite se poursuit dans la classe.

Le professeur demande aux élèves d'admettre que la ligne de pente de ce terril est une portion de la parabole d'équation $y = -x^2 + 25$.

On sait que l'ordonnée à l'origine est égale à 26. Donc la droite a une équation de la forme $y = ax + 26$, avec $a < 0$.

Puisqu'il y a un point d'intersection entre la droite et la parabole, alors x est solution de l'équation : $-x^2 + 25 = ax + 26$.

Soit à résoudre l'équation : $x^2 + ax + 1 = 0$.

Le groupe reconnaît une équation du second degré, dont le discriminant vaut $\Delta = a^2 - 4$.

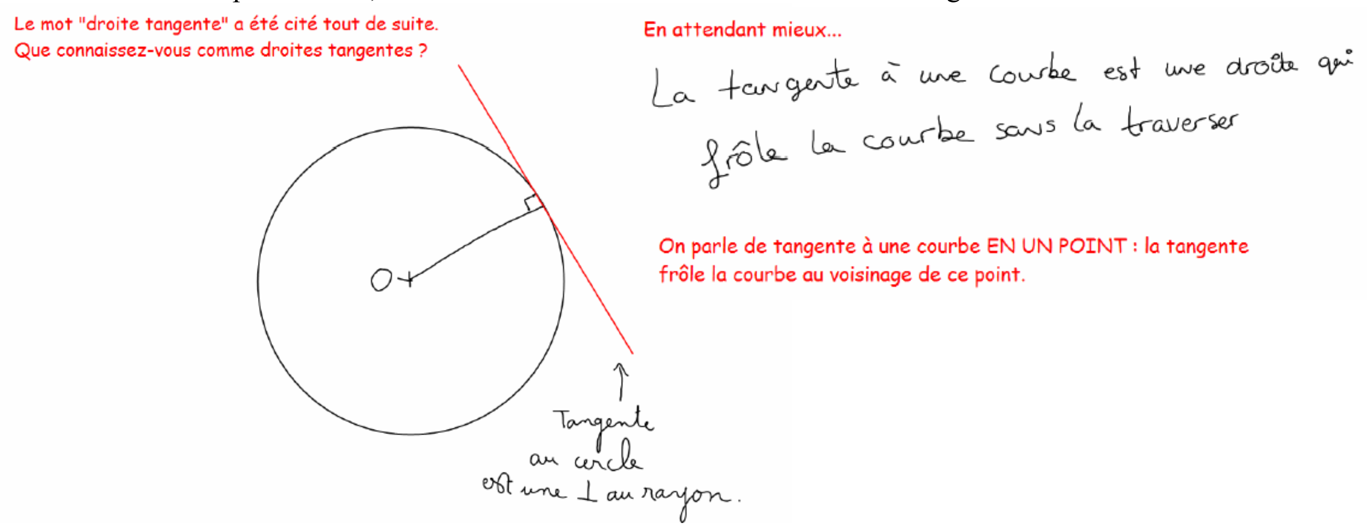
L'équation a une unique solution si et seulement si $a = -2$ (rappel : on sait que a est négatif).

Il reste à vérifier que le point d'intersection est le point de coordonnées (1 ; 24) et que la droite cherchée a pour équation $y = -2x + 26$.

Le point Ω a donc pour abscisse 13.

La tangente est la position limite d'une sécante.

Avec l'exemple du terril, les élèves ont donné « leur » définition de la tangente.



Le professeur utilise alors un logiciel de géométrie dynamique pour montrer qu'une tangente à une courbe est la position limite d'une sécante.

La définition de la tangente est ensuite donnée aux élèves. L'enseignant peut alors introduire le taux d'accroissement de la fonction f en a, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, et sa limite quand h tend vers 0.

Partie III : définition du nombre dérivé et équation d'une tangente

Extrait des programmes des premières S, ES et L :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point.	• Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé.

Pour conclure le scénario pédagogique, le cours est synthétisé avec la classe. Il est suivi d'exercices d'application axés sur :

- la lecture graphique de nombres dérivés ;
- le tracé d'une tangente connaissant le coefficient directeur de la droite ;
- quelques calculs de taux d'accroissement à l'aide, si besoin, d'un logiciel de calcul formel ;
- la recherche d'équations de tangentes à une courbe donnée en un point.

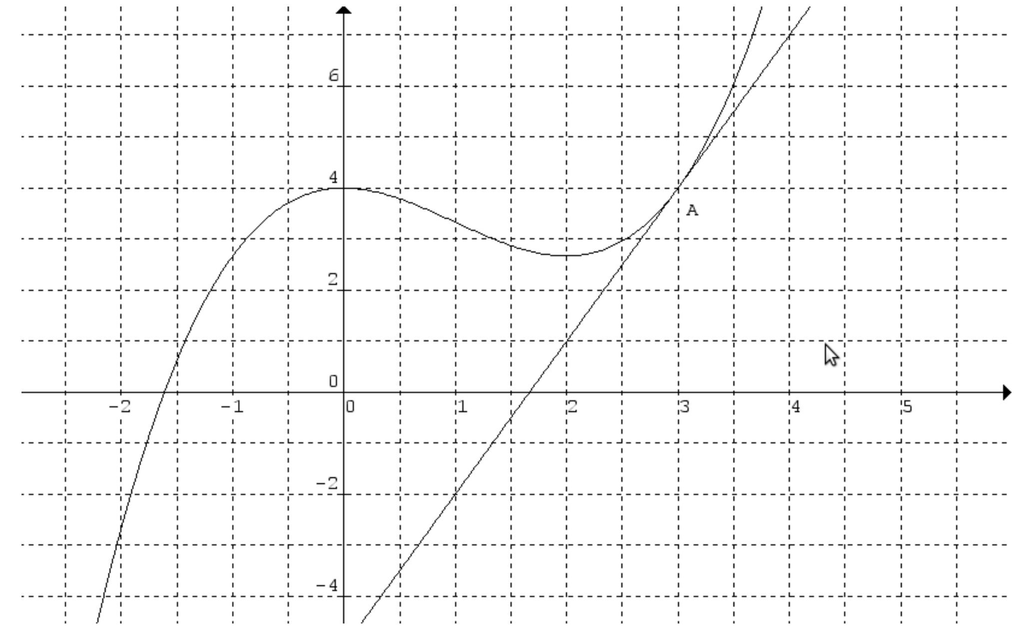
Partie IV : évaluation formative

Un Questionnaire à Choix Multiples, permettant à chaque élève de s'auto-évaluer, est mis en ligne par le professeur. Cette auto-évaluation aide l'élève à repérer ses points forts et ses points faibles. Il peut ainsi travailler certaines connaissances mal dominées, avec l'aide éventuelle d'un enseignant, avant une interrogation écrite.

1) La fonction f est définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = -2x^2 + x + 2$. Lequel des points suivants appartient à la courbe représentative de f ?

a. A(2 ; 0)   b. B(1 ; 2)   c. C(2 ; 2)   d. D(2 ; -4)

On donne la courbe représentative d'une fonction g qui permet de répondre aux questions 2), 3), 4) et 5) :



2) La valeur de $g(-2)$ est :

a. $-2{,}5$ b. $-1{,}75$ c. 0 d. 0,5

3) La valeur de $g'(0)$ est:

a. 4 b. 7 c. 0 d. $-0{,}75$

4) Le coefficient directeur de la tangente au point A est :

a. 4 b. 3 c. -3 d. 2

5) La tangente tracée permet de déterminer :

a. $g'(4)$ b. $g'(3)$ c. $g'(-3)$ d. $g'(1{,}75)$

6) Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 - x + 2$. Pour déterminer $f'(1)$, il faut simplifier l'expression :

a. $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ b. $\dfrac{f(1+h)-1}{h}$ c. $f(2)-f(1)$ d. $\dfrac{f(1+h)-2}{h}$

7) Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 - x + 2$.

On donne la copie d'écran issue de Xcas :

```
f(x):=x^2-x+2
                                        x -> x^2 -x+2
simplify(f(1+h))
                                        h^2 +h+2
```

La valeur de $f'(1)$ est : a. 2 b. 1 c. 4 d. 0

8) Soit g la fonction définie par $g(t) = \dfrac{t}{t-5}$

On donne la copie d'écran de Xcas:

```
g(t):=t/(t-5)
                                        t -> t/(t-5)
simplify((g(6+h)-g(6))/h)
                                        -5/(h+1)
```

La valeur de $g'(6)$ est : a. -5 b. $-\dfrac{5}{2}$ c. $-\dfrac{5}{7}$ d. 6

Une deuxième introduction à la dérivation

Problématiques développées : P2, P3 et P7.
Série : toutes séries (expérimenté en première S).
Place dans la progression : avant le cours sur la dérivation.

Objectifs pédagogiques	Introduire un nouvel outil, lui donner du sens et montrer son intérêt.
Compétences	Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Mener des raisonnements. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Les fonctions. Les droites.
Logiciels	Logiciel de calcul formel.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel et collectif.

Activité : « le radar »

Après un séjour passé en Allemagne, un célèbre professeur de mathématiques emprunte la voie express sans limitation de vitesse. Lors du passage de la frontière pour regagner la France, il réalise que la limitation de vitesse est de 130km/h. Il décide donc de freiner son véhicule afin d'éviter une éventuelle contravention! Il stabilise sa vitesse au bout de 4 secondes.

À partir du franchissement de la frontière par le véhicule, on note t le temps écoulé en seconde et $f(t)$ la distance parcourue en mètres.

Sur l'intervalle [0 ; 4], la fonction f est définie par $f(t) = \dfrac{480t}{t+12}$. Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de f sur l'intervalle [0 ; 4].



Partie A: Étude du mouvement

1. Calculer $\dfrac{f(3)-f(0,5)}{2,5}$ puis donner une interprétation du résultat.
2. Exprimer, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, $V(h)=\dfrac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h}$ en fonction de h puis donner une interprétation du résultat.
3. À l'aide de la calculatrice, observer les valeurs de $V(h)$ pour h variant de 0,1 à 0,5 avec un pas de 0,1.
Faire ensuite varier h de 0,01 à 0,1 avec un pas de 0,01.
Faire enfin varier h de 0,001 à 0,01 avec un pas de 0,001.
Lorsque h est proche de 0, que devient $V(h)$?
Le résultat obtenu s'appelle la limite de $V(h)$ quand h tend vers 0. En terme concret, cette valeur correspond à la vitesse instantanée du véhicule à l'instant $t = 0,5$.
4. Le célèbre professeur de mathématiques aperçoit les gendarmes avec leur radar à l'instant $t = 0,5$. En tenant compte des vitesses retenues par le cinémomètre (voir tableau ci-dessous), est-il en infraction lorsqu'il est surpris par les gendarmes? Justifier votre réponse.

VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE Cinémomètre		VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE Cinémomètre		VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE Cinémomètre	
	Fixe	Mobile		Fixe	Mobile		Fixe	Mobile
55	50	—	86	81	76	117	111	105
56	51	—	87	82	77	118	112	106
57	52	—	88	83	78	119	113	107
58	53	—	89	84	79	120	114	108
59	54	—	90	85	80	121	114	108
60	55	50	91	86	81	122	115	109
61	56	51	92	87	82	123	116	110
62	57	52	93	88	83	124	117	111
63	58	53	94	89	84	125	118	112
64	59	54	95	90	85	126	119	113
65	60	55	96	91	86	127	120	114
66	61	56	97	92	87	128	121	115
67	62	57	98	93	88	129	122	116
68	63	58	99	94	89	130	123	117
69	64	59	100	95	90	131	124	117
70	65	60	101	95	90	132	125	118
71	66	61	102	96	91	133	126	119
72	67	62	103	97	92	134	127	120
73	68	63	104	98	93	135	128	121
74	69	64	105	99	94	136	129	122
75	70	65	106	100	95	137	130	123
76	71	66	107	101	96	138	131	124
77	72	67	108	102	97	139	132	125
78	73	68	109	103	98	140	133	126
79	74	69	110	104	99	141	133	126
80	75	70	111	105	99	142	134	127
81	76	71	112	106	100	143	135	128
82	77	72	113	107	101	144	136	129
83	78	73	114	108	102	145	137	130
84	79	74	115	109	103	146	138	131
85	80	75	116	110	104	147	139	132

La première colonne donne la vitesse enregistrée par le cinémomètre. Afin de tenir compte des erreurs de mesure, cette vitesse enregistrée est transformée en une vitesse retenue, qui est celle utilisée pour constater une infraction.

Lorsque le cinémomètre est fixe, la deuxième colonne du tableau donne la vitesse retenue ; lorsque l'appareil est embarqué à l'intérieur d'une voiture de gendarmerie et que la mesure se fait en roulant, c'est la troisième colonne du tableau qui donne la vitesse retenue.

Partie B : Par le calcul formel

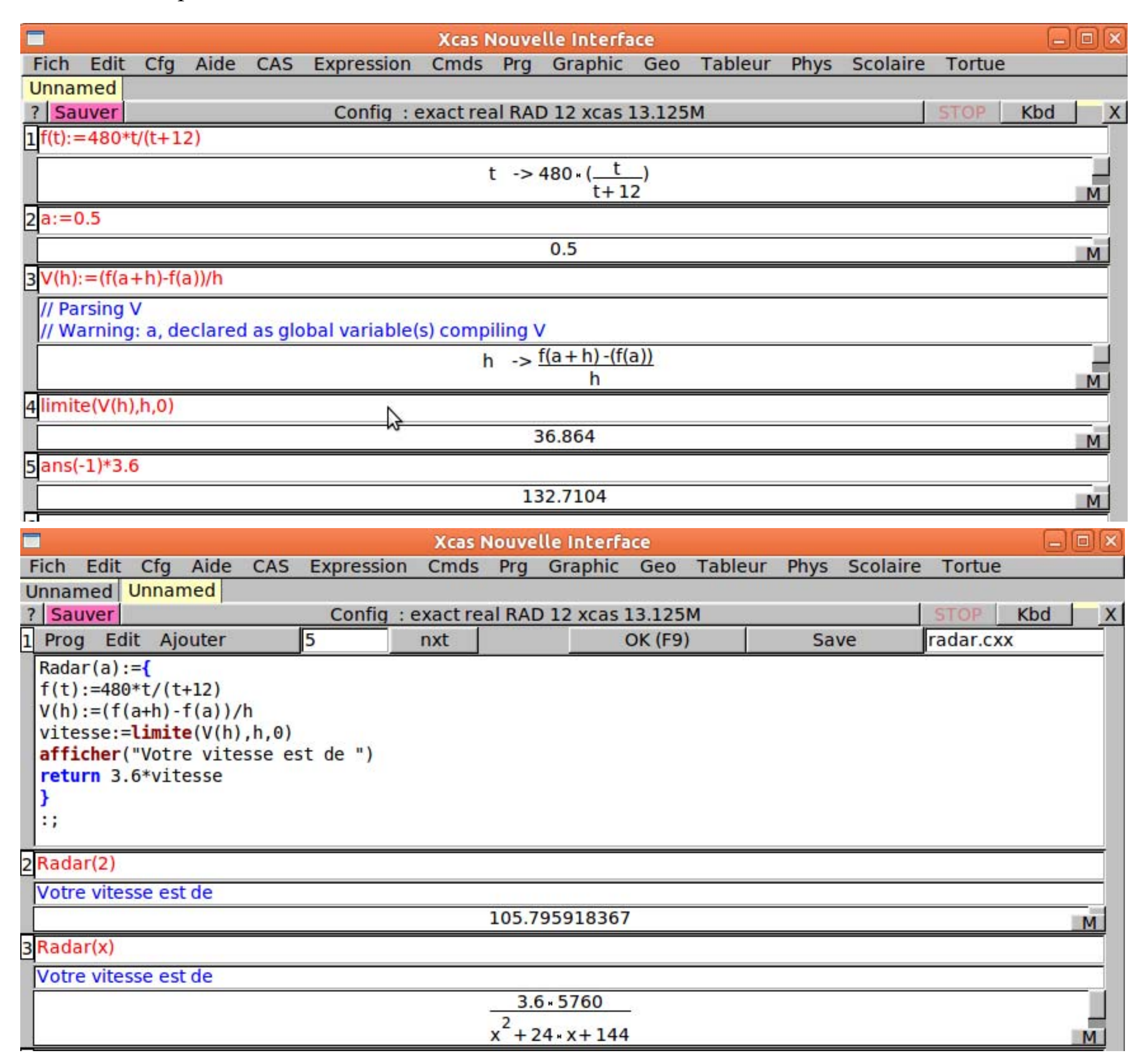
Émettre une conjecture quant à l'instant t, compris entre 0 et 4, à partir duquel la vitesse du célèbre professeur de mathématiques restera inférieure à 110km/h (on demande une valeur arrondie de t à la seconde près).

Aide : pour le logiciel de calcul formel *Xcas*, la commande qui permet de calculer la limite de $V(h)$ quand h tend vers 0 est limite($V(h)$,h,0).

Partie C : Par l'algorithmique

5. Écrire un algorithme permettant de calculer la vitesse instantanée du célèbre professeur de mathématiques à un instant a compris entre 0 et 4.
6. Écrire cet algorithme en langage Xcas puis exécuter ce programme pour différentes valeurs de a, comprises entre 0 et 4.
7. À l'aide du programme, déterminer en fonction de l'instant x, la vitesse instantanée du célèbre professeur de mathématiques.

Éléments de réponse



3. Pourcentages

Job de vacances

Cette activité a pour but :

- d’entraîner les élèves à une pratique aisée de techniques élémentaires de calcul sur les pourcentages ;
- d’amener les élèves à avoir une attitude critique vis-à-vis des informations chiffrées.

Problématiques développées : P1, P2, P6.
Série : ES - L.
Place dans la progression : pendant le cours sur les pourcentages.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les pourcentages. Donner un sens concret au lien entre une évolution et un pourcentage.
Compétences	Rechercher, extraire et organiser l’information utile. Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l’oral.
Connaissances	Pourcentages.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel.

Scénario pédagogique

Étape 1 : le professeur laisse travailler les élèves en autonomie sur le support donné sur la page suivante. Il passe dans les rangs aider ou débloquer certains élèves en difficulté. Une synthèse collective est réalisée à l’issue du travail.

Aurélie, une jeune fille de 16 ans, a trouvé un premier emploi de vacances en tant qu’animatrice dans le centre de vacances « Les alouettes ». Elle doit effectuer 109 heures de travail pour un salaire net de 647 euros auquel s’ajoutent 79 euros d’indemnités de congés payés.

En se renseignant sur la législation en vigueur concernant les salaires et indemnités de congés payés, elle a trouvé les informations suivantes :

Salaire et indemnité de congés payés (Circulaire DRT n° 2002-15 du 22 août 2002)

Le salaire minimum de croissance (SMIC) est le salaire horaire en dessous duquel il est interdit de rémunérer un salarié et ce, quelle que soit la forme de sa rémunération (au temps, au rendement, à la tâche, à la pièce, à la commission ou au pourboire). Le SMIC assure aux salariés dont les salaires sont les plus faibles la garantie de leur pouvoir d’achat et une participation au développement économique de la Nation.

Le montant du **SMIC horaire brut** est fixé, depuis le 1er janvier 2011, à 9 €.

Les jeunes de moins de 18 ans titulaires d’un contrat de travail sont rémunérés au minimum sur la base du SMIC :

- minoré de 20 % avant 17 ans,
- minoré de 10 % entre 17 et 18 ans.

A noter : pas de minoration de la rémunération si le jeune possède six mois de pratique professionnelle dans la branche.

L'employeur calcule le **salaire net** en déduisant du salaire brut les **charges salariales** qui représentent environ 20% du salaire brut.

Au terme de son contrat, le jeune reçoit une **indemnité de congés payés**. Le montant de cette indemnité est obtenu de la façon suivante :

- on prend 10 % des salaires bruts perçus ;
- on enlève les charges salariales qui représentent environ 20% de cette somme.

Compte tenu de ces informations, Aurélie a-t-elle intérêt à accepter cet emploi ?

Étape 2 : *les élèves prennent connaissance du document donné sur la page suivante. Après qu'ils se soient appropriés ce document, une discussion s'établit pour expliciter certains mots ou certaines notions. Les élèves travaillent ensuite en autonomie puis une synthèse collective est réalisée à l'issue du travail.*

Voici la fiche de salaire d'une employée de 20 ans du centre de vacances « Les alouettes » qui effectue 120 heures de travail :

Association Les Alouettes
2 rue Saint Michel
59009 VILLENEUVE D'ASCQ

SIRET	53713180700039
URSSAF	280 403 4179461

BULLETIN DE PAIE

Période	du 01/07/2011 au 31/07/2011
Paiement	Par virement le 01/08/2011
Plafond du mois	1899,00

Code salarié	S353
Emploi	Animatrice saisonnière
Qualification	Stagiaire BAFA
Heures de présence	120,00

Gabriella SOLIS
56 Avenue Aimé Césaire
59343 ROUBAIX

Elément	Libellé	Base	Taux salarial	Montant salarial	Cotisation patronale	
					Tx patronal	Mont. patronal
7234	Salaire de base	120,00	9,0000	1080,00		
2726	Congés payés	1080,00	10,0000	108,00		
	SALAIRE BRUT			1188,00		
	CHARGES					
55	CSG déductible	1009,80	5,1000	-51,50		
56	CSG non déductible	1009,80	2,4000	-24,24		
57	CRDS	1009,80	0,5000	-5,05		
58	Maladie, maternité, décès	1188,00	0,7500	-8,91	12,8000	152,06
61	Vieillesse plafonnée	1188,00	6,6500	-79,00	8,3000	98,60
332	Solidarité autonomie	1188,00			0,3000	3,56
299	Vieillesse déplafonnée	1188,00	0,1000	-1,19	1,6000	19,01
64	Allocations familiales	1188,00			5,4000	64,15
65	Aide au logement	1188,00			0,1000	1,19
1251	Aide au logement collectivités	1188,00			0,5000	5,94
66	Accident du travail	1188,00			1,1000	13,07
75	Transport	1188,00			1,7000	20,20
67	Retraite	1188,00	2,2800	-27,09	3,4100	40,51
73	Centre de gestion	1188,00			0,5500	6,53
74	Centre National de la Fonction Publique Territoriale	1188,00			1,0000	11,88
	TOTAL COTISATIONS			196,97		436,71
	MONTANT A VERSER			991,03		

1°) Citer deux cotisations payées uniquement par le salarié. Citer deux cotisations payées par le salarié et l'employeur.

2°) Quel est le coût total de ce salarié pour le centre de vacances ?

3°) La base de calcul pour les deux CSG (déductible et non-déductible) et la CRDS est un pourcentage du salaire brut. Déterminer ce pourcentage.

4°) Afin de calculer le pourcentage du salaire brut que représentent les charges salariales, Léa a fait la somme des taux et a trouvé 17,78. Est-ce exact ?

Approfondissement possible :

Le gouvernement envisage de faire passer le montant de la CSG déductible de 5,1% à 6,1%. Quel sera alors le pourcentage de diminution du salaire ?

Etape 3 *: travail en temps libre ou en salle informatique.*

En utilisant un tableur, établir la fiche de salaire d'un salarié de 19 ans de ce centre de vacances effectuant 160 heures de travail.

Calcul d’impôts

Cette activité (extrait du sujet du groupement 5 du CRPE session 2009) a pour but :

- d’entraîner les élèves à une pratique aisée de techniques élémentaires de calcul sur les pourcentages ;
- d’amener les élèves à avoir une attitude critique vis-à-vis des informations chiffrées.

Problématiques développées : P1 et P6.
Série : ES - L.
Place dans la progression : pendant le cours sur les pourcentages.

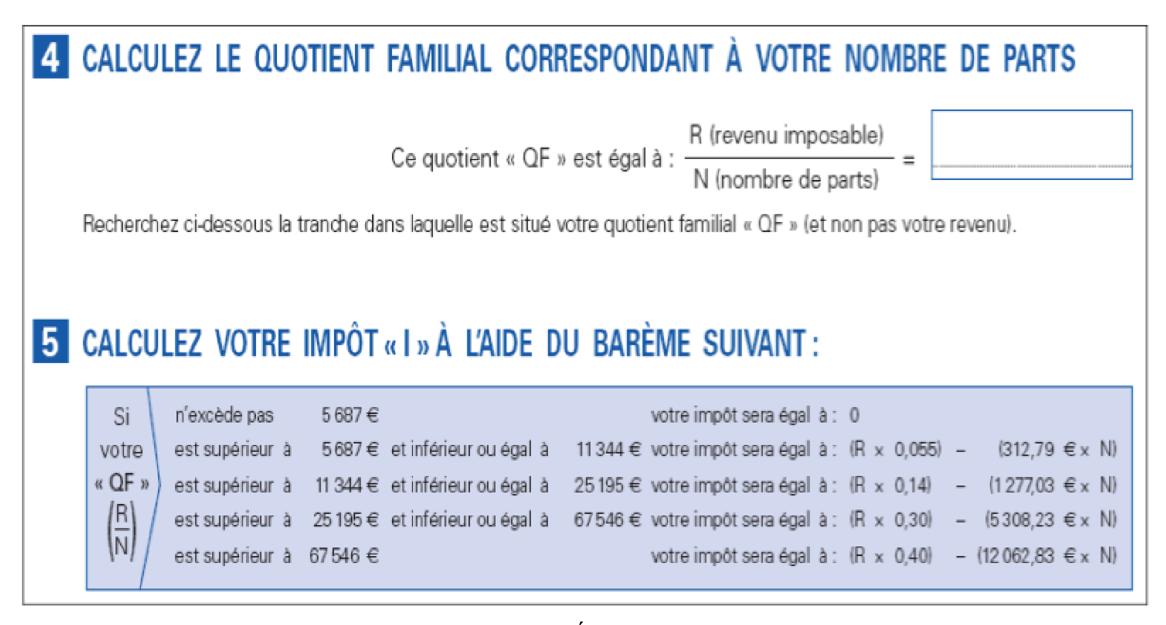
Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les pourcentages. Donner un sens concret au lien entre une évolution et un pourcentage.
Compétences	Rechercher, extraire et organiser l’information utile. Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l’oral.
Connaissances	Pourcentages.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel.

M. et Mme Durand sont mariés et n’ont pas de personne à charge.
Pour l’année étudiée dans cet exercice, leur revenu imposable est de 50 000 €.

1°) Sachant que ce revenu imposable a été calculé en opérant sur le revenu annuel du couple une réduction de 10%, calculer le revenu annuel du couple avant cette réduction.

2°) Le revenu annuel de Mme Durand représente 85 % du revenu annuel de M. Durand. Quel est le revenu annuel de M. Durand ?

3°) Pour les couples mariés sans personne à charge, le nombre de parts N est égal à 2.
Calculer le montant de l’impôt à payer pour ce couple en utilisant le barème donné ci-dessous :



4 CALCULEZ LE QUOTIENT FAMILIAL CORRESPONDANT À VOTRE NOMBRE DE PARTS

Ce quotient « QF » est égal à : $\dfrac{\text{R (revenu imposable)}}{\text{N (nombre de parts)}}$ =

Recherchez ci-dessous la tranche dans laquelle est situé votre quotient familial « QF » (et non pas votre revenu).

5 CALCULEZ VOTRE IMPÔT « I » À L’AIDE DU BARÈME SUIVANT :

Si votre « QF » $\left(\frac{R}{N}\right)$	n’excède pas 5 687 €		votre impôt sera égal à :	0
	est supérieur à 5 687 €	et inférieur ou égal à 11 344 €	votre impôt sera égal à :	(R x 0,055) – (312,79 € x N)
	est supérieur à 11 344 €	et inférieur ou égal à 25 195 €	votre impôt sera égal à :	(R x 0,14) – (1 277,03 € x N)
	est supérieur à 25 195 €	et inférieur ou égal à 67 546 €	votre impôt sera égal à :	(R x 0,30) – (5 308,23 € x N)
	est supérieur à 67 546 €		votre impôt sera égal à :	(R x 0,40) – (12 062,83 € x N)

Source: Ministère de l'Économie et des finances

4°) On avait proposé à Mme Durand un autre poste lui offrant une augmentation de son revenu annuel de 1 000 €.

Son mari l’en avait dissuadée en lui disant : « Tu n’y songes pas ! Avec ce nouveau poste, nous allons changer de tranche d’imposition et toute ton augmentation va être absorbée par les impôts.»

Son argument était-il valable ? Expliquer la réponse.

4. Suites

Modes de génération d'une suite

Ces deux activités ont pour but d'illustrer des modes de génération de suites à partir de nuages de points à l'aide d'un lissage par moyennes mobiles. Les travaux s'effectuent sur tableur. L'objectif est également de donner un sens concret, ici économique, à la notion de suite.

Problématiques développées : P2, P3 et P6.
Série : ES-L, éventuellement S.
Place dans la progression : avant le chapitre sur les suites.

Objectifs pédagogiques	Introduire la notion de suites et exploiter sa représentation graphique.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique face aux résultats obtenus. Communiquer à l'oral. B2I lycée.
Connaissances	Représentation d'une série statistique. Notion d'évolution.
Logiciels	Tableur
Modalités de gestion de classe	Travail individuel. Accompagnement personnalisé.

Exemple 1 : illustrer l'évolution du prix de l'essence

Trois documents sont fournis aux élèves : 1) un extrait d'un cours d'économie, 2) un tableau donnant les prix de l'essence sur une période et 3) quelques éléments du contexte économique de cette période.

Document 1 : extrait d'un cours d'économie

Une série chronologique est une série statistique ordonnée en fonction du temps.
Sur la représentation graphique d'une série chronologique, on peut distinguer les composantes fondamentales suivantes :

• le mouvement de tendance générale ou trend indiquant l'évolution générale du phénomène étudié ;

• les mouvements cycliques sur une grande période autour du trend. Ces mouvements peuvent être périodiques (exemple : récession et expansion économique, etc.) ;

• les mouvements saisonniers ou variations saisonnières sont des variations se reproduisant périodiquement à des moments bien déterminés (exemple : vente de mazout avant l'hiver, etc.) ;

• les mouvements accidentels ou résiduels sont dus à des facteurs exceptionnels pour la plupart imprévisibles (grève, risque de guerre, etc.).

Document 2 : prix de l'essence sur une période

Le document ci-dessous donne les variations du prix d'un litre d'essence entre les années 1988 et 2007. Ces prix sont exprimés en euros.

Année	Prix
1988	0,749
1989	0,813
1990	0,816
1991	0,805
1992	0,784
1993	0,788
1994	0,819
1995	0,867
1996	0,921
1997	0,956

Année	Prix
1998	0,980
1999	1,006
2000	1,099
2001	1,049
2002	1,000
2003	1,040
2004	1,070
2005	1,220
2006	1,250
2007	1,265

Source : Insee, annuaire statistique de la France

Document 3 : contexte historique de cette période

• Les prix s'effondrèrent en 1987. Ces bas prix stimulèrent la consommation et ralentirent la production hors moyen orient où les coûts d'exploitation sont plus élevés (cas de l'extraction offshore par exemple).

• Les conflits entre le Koweït et l'Iraq en 1990 annulèrent l'offre de pétrole de ces pays qui fut compensée par l'Arabie Saoudite et le Venezuela pour la majorité, le reste des pays de l'OPEP comblant le manque à produire.

• Les prix en déclin depuis le début des années 1990 ne remontèrent qu'à partir du boom économique aux États-unis et en Asie au milieu des années 1990.

• La crise financière asiatique mit un terme brutal à l'embellie des prix à partir de 1997.

• Le déclin des prix s'accentua jusqu'en février 1999 pour atteindre 10 dollars américains/baril. Puis à partir de mars 99, à la suite d'un accord de réduction de la production des pays de l'OPEP mais aussi d'Oman, de la Fédération de Russie, de Mexico et de la Norvège, les prix n'ont cessé d'augmenter jusqu'à atteindre plus de 30 dollars américains/baril un an plus tard. L'OPEP décida alors d'augmenter la production avec comme objectif de stabiliser les prix entre 20 et 25 dollars américains/baril. Les prix redescendirent à nouveau à partir de décembre 2000 pour se stabiliser autour de 28 dollars américains.

• A la suite des attentats du 11 septembre 2001 une légère hausse a eu lieu, mais très rapidement, du fait d'une baisse de la demande en fuel d'aviation et des perspectives de stagnation de la croissance économique qui prévalaient jusqu'alors, les cours ont à nouveau plongé et l'OPEP a décidé de réduire sa production à partir de janvier 2002 à condition que les pays hors de l'OPEP contribuent également à cette réduction.

• Depuis le début des années 2000, le cours du pétrole a connu un niveau historique très élevé et une hausse constante depuis 2001. La moyenne des prix du pétrole a été de 18.5$ environ sur la période 1985-2000 alors que depuis 2000, celle-ci est de 41.6$" (2000-2007). Cette hausse très importante s'explique notamment par le dynamisme de l'économie chinoise et l'émergence de pays nouvellement industrialisés qui tendent à augmenter leur consommation d'énergie, ainsi que par l'amélioration des conditions économiques dans certaines régions du monde et en particulier aux États-Unis (qui se retrouvent de ce fait devoir faire face à une certaine tension au niveau des stocks nationaux). Les sous-jacents ne suffisent cependant pas à expliquer le développement des cours du pétrole sur les années 2003-2004. Ceux-ci ont, en effet, été également fortement influencés par des sur-réactions spéculatives en relation avec les perturbations potentielles au niveau de l'offre (évènements en Irak, par exemple) ou de la demande (faiblesse et baisse des stocks américains).

1. Afin d'ordonner les prix du document 2, on décide d'appeler p_0 le prix d'un libre d'essence en 2008, p_1 le prix en 2009, et ainsi de suite… Illustrer l'évolution de cette suite de prix à l'aide d'un nuage de points réalisé à l'aide d'un tableur.

2. Exploiter la représentation graphique de la suite des prix pour décrire certaines composantes du document 1, composantes que l'on expliquera à l'aide du document 3.

3. Afin d'observer une tendance générale, on décide de créer une nouvelle suite de prix (q_n) obtenue par lissage de moyennes mobiles.

Le principe de cette méthode est de construire une nouvelle suite obtenue en calculant des moyennes arithmétiques successives de longueur fixe à partir des données originales. Chacune de ces moyennes obtenues correspondra au "milieu" de la période pour laquelle la moyenne arithmétique vient d'être calculée.

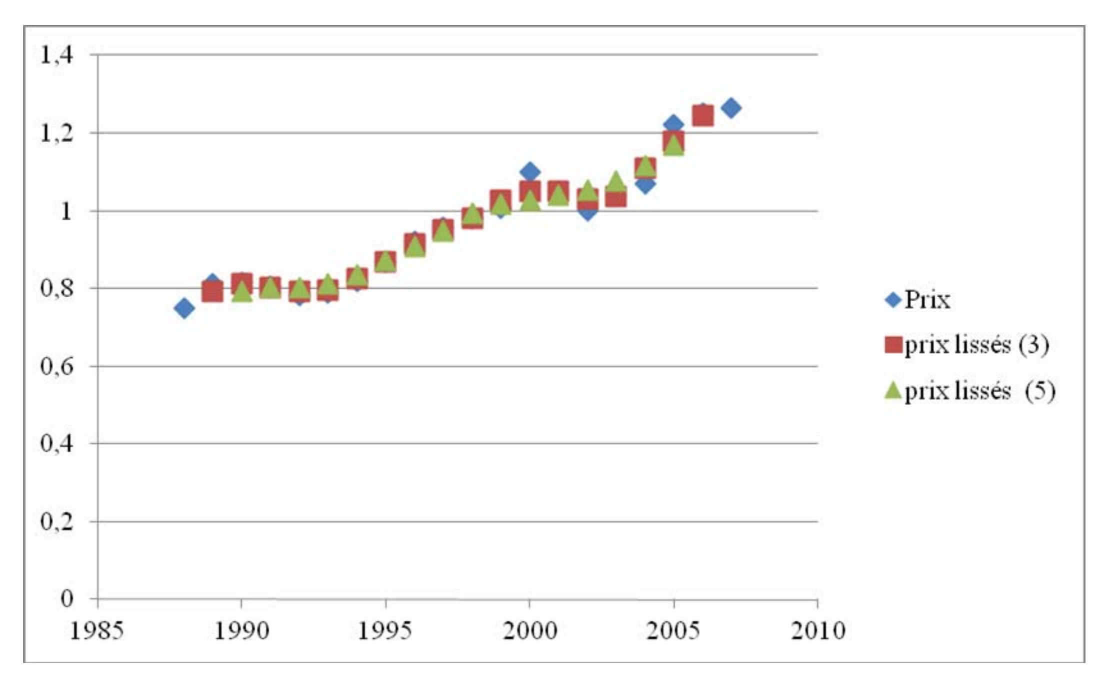
Par exemple :

Année	Rang	Termes	Prix	Prix lissés par moyennes mobiles de période 3
1988	0	p_0	0,749	
1989	1	p_1	0,813	La moyenne de période 3 est égale à : (0,749+0,813+0,813)/3=0,792
1990	2	p_2	0,816	0,811
1991	3	p_3	0,805	0,801
1992	…	…	0,784	…

Réaliser une telle feuille de calcul à l'aide d'un tableur. Ajouter une colonne avec la suite des prix lissés par moyennes mobiles de période 5 puis représenter graphiquement dans le même repère les trois suites de prix obtenues. Ces nouveaux graphiques permettent-ils de mieux mettre en correspondance certaines informations du document 3 ?

Commentaires :

Les élèves aboutissent à une représentation du type suivant :



On peut montrer aux élèves que le logiciel permet d'ajouter une courbe de tendance par moyennes mobiles directement par un clic droit sur le nuage de points de la suite initiale en précisant la période. On explique ainsi comment ont été réalisés les calculs du logiciel.

Exemple 2 : le grossiste en fleurs coupées

Comment aider un grossiste en fleurs coupées à harmoniser un peu ses prix pour éviter de trop fortes fluctuations lors de la revente de sa marchandise ?

Le tableau ci-dessous donne le prix d'achat HT moyen, en gros, d'une botte de 10 roses. Les prix sont relevés sur quatre périodes de chaque mois, de septembre 2009 à août 2010.

Périodes	Prix moyen d'une botte de roses par périodes (en euros)
Septembre	
1	1,82
2	2,02
3	2,63
4	2,27
Octobre	
5	2,23
6	2,36
7	2,61
8	3,01
Novembre	
9	3,81
10	3,01
11	2,92
12	2,93
Décembre	
13	3,82
14	4,01
15	4,22
16	5,82
Janvier	
17	4,51
18	4,52
19	5,13
20	4,57
Février	
21	5,01
22	12,08
23	5,04
24	6,02

Périodes	Prix moyen d'une botte de roses par période (en euros)
Mars	
25	6,03
26	5,04
27	4,11
28	3,53
Avril	
29	2,54
30	2,64
31	2,73
32	2,83
Mai	
33	2,84
34	3,04
35	4,11
36	3,81
Juin	
37	3,01
38	2,10
39	2,22
40	2,15
Juillet	
41	2,21
42	2,09
43	1,83
44	1,73
Août	
45	3,02
46	3,31
47	3,52
48	2,50

1. Illustrer l'évolution de cette suite de prix à l'aide d'un nuage de points réalisé à l'aide d'un tableur. Exploiter la représentation graphique de cette suite pour décrire certaines composantes économiques du cours de la botte de roses et les interpréter (mouvements saisonniers sur 12 mois, fêtes, coûts en énergie pour la production,…).

2. Le grossiste cherche à lisser davantage ses prix, sur la quinzaine, voire sur le mois. Proposer une stratégie permettant de l'aider.

3. Le grossiste s'octroie un taux de marge commerciale brute de 33,3% pour la revente. Le lissage des prix à la quinzaine ou au mois lui est-il favorable, défavorable ou sans effet ?

Jeux de nombres

De nombreux jeux de nombres, dont s'emparent facilement les élèves, génèrent des suites numériques. Captivants et synonymes de curiosité, ces jeux facilitent le développement des compétences pour la formation des élèves. L'activité présentée ci-dessous a pour but d'aborder les modes de génération d'une suite. Sans grande difficulté, elle permet aux élèves d'investir rapidement le sujet. Attrayante, elle apporte beaucoup en termes d'investigation tout en renforçant le calcul mental. Avant de se lancer dans la conjecture, les élèves observent différentes suites de nombres, ce qui leur permet de conceptualiser différentes natures de suites en les comparant. Cette activité permet aussi de favoriser l'oral. La partie algorithmique renforce le raisonnement et la logique.

Le travail demandé aux élèves est réalisé en deux temps :

1. Une lecture active de l'énoncé suivie d'une recherche individuelle. Le professeur accompagne l'élève dans son travail d'investigation, puis donne la parole aux élèves pour une analyse critique des résultats qu'ils ont proposés.
2. Dans un deuxième temps, l'activité sollicite une démarche algorithmique. Le professeur termine sa séance en demandant aux élèves d'écrire l'algorithme dans le langage de leur choix, de le programmer puis de le tester afin de valider les conjectures émises.

Problématiques développées : P2, P3, P6 et P7.
Série : toutes séries.
Place dans la progression : avant le cours sur les suites.

Objectifs pédagogiques	Approcher la notion de suites numériques, en variant les supports et les outils. Amener la notation indicielle des termes d'une suite.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus.
Connaissances	Les notions d'algorithmique de la classe de seconde.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel puis collectif. Utilisation de la calculatrice.

Énoncé de l'exercice

On considère le jeu de nombres suivant :

On choisit un nombre entier entre 1 et 99.
À chaque étape, on le remplace par la somme des carrés de ses chiffres.

Exemple : Je choisis n=7.

Étape 1: 49

Étape 2: 97…

1. Poursuivre la procédure pour n = 7.
2. Recommencer avec n = 4.
3. Faire un essai avec un autre entier de votre choix.
4. Comparer les résultats avec ceux obtenus par d'autres élèves de la classe.
5. Émettre une conjecture sur les suites de nombres obtenus.

6. Voici un algorithme :

```
Variables
        q, r, n et s
Entrée
        Saisir le nombre entier n
Traitement
        Affecter 0 à s
        Tant que n > 0
                q prend la partie entière de n/10
                r prend la valeur n – 10q
                s prend la valeur s + r^2
                n prend la valeur q
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher s
```

- Expliquer le rôle de cet algorithme.
- Compléter cet algorithme afin qu'il puisse valider la conjecture émise.

Évolution de cellules cancéreuses

Cette activité est tirée de documents écrits par Dominique Barbolosi (Université Paul Cézanne).

Problématiques développées : P2, P3 et P7..
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Résoudre un problème issu d'un phénomène discret. Utiliser les TICE.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'oral
Connaissances	Représentation graphique d'un nuage de points. Réaliser une feuille de calcul à l'aide du tableur.
Logiciels	Tableur, calculatrice, logiciel de programmation.
Modalités de gestion de classe	Activité en autonomie.

Tout cancer débute par la production d'une cellule cancéreuse. Au cours du temps, cette cellule va produire un ensemble de cellules filles appelé tumeur. On observe que le temps de doublement T d'une tumeur cancéreuse (c'est-à-dire le temps mis par une tumeur donnée pour doubler son nombre de cellules) est sensiblement constant et dépend du type de cancer. Ce temps de doublement peut être évalué sur des cellules prélevées dans la tumeur et mises en culture. Par exemple, pour un cancer du sein, T=14 semaines ; pour certains cancers du poumon T=21 semaines ; pour les cancers du colon et du rectum, T=90 semaines.

Évolution d'une tumeur sans traitement

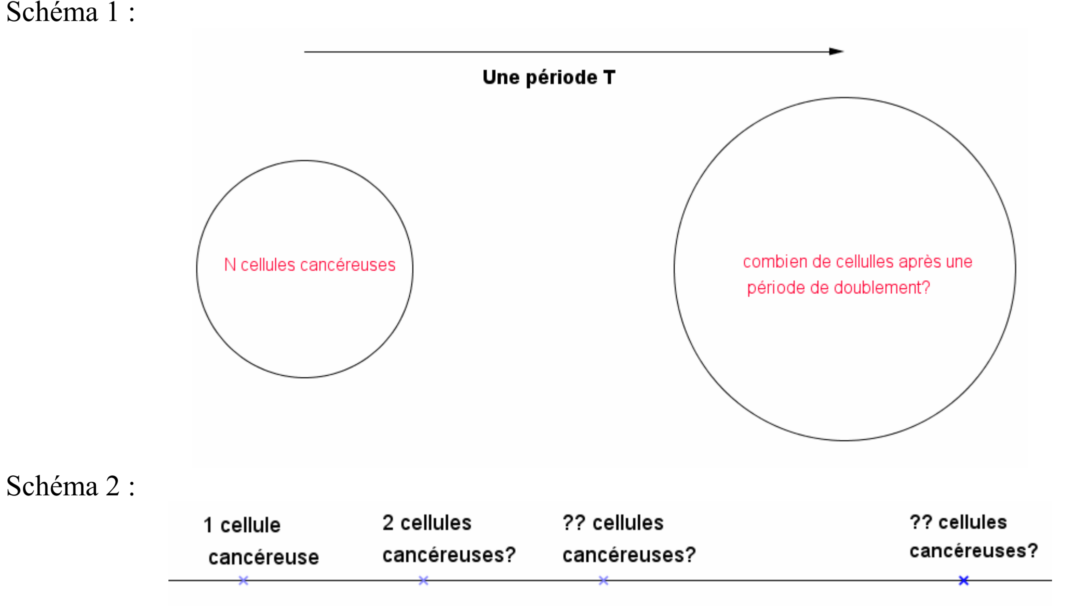
On fait l'hypothèse qu'une cellule cancéreuse apparaît dans l'organisme d'un individu.
On cherche comment connaître le nombre de cellules cancéreuses qui composent une tumeur dont le temps de doublement T est connu à la fin de chaque période.

Modélisation

Voici deux schémas :

Schéma 1 :

Schéma 2 :



1. À l'aide d'un tableur, réaliser et compléter la feuille de calcul suivante :

	A	B
1	période	nombre de cellules cancéreuses
2	0	1
3	1	2
4	2	4
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

2. À l'aide du tableur, représenter le nuage de points correspondant à l'évolution du nombre de cellules cancéreuses.

3. Compléter le tableau suivant :

Période	0	1	2	3	….	*n* périodes
Nombre de cellules cancéreuses	1	2	…	…	….	…
Nombre de cellules cancéreuses	u_0	u_1	…	…	….	u_n

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de cellules cancéreuses n période(s) après la naissance de la première cellule cancéreuse. On a donc $u_0 = 1$.

Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Remarque : cette situation peut également être exploitée pour introduire les suites géométriques, mais l'activité privilégie ici un mode de génération numérique et graphique.

Découverte de la tumeur

Actuellement, la plus petite tumeur cancéreuse détectable est constituée de 10^9 cellules, ce qui correspond à peu près à une tumeur d'une masse égale à 1 gramme.

Question : si on découvre aujourd'hui une tumeur ayant 10^9 cellules, peut-on savoir quand est apparue la première cellule cancéreuse ?

Méthode 1 : utiliser un tableur.

Méthode 2 : à l'aide d'un algorithme

```
Variables
    n, u
Initialisation
    n prend la valeur 0
    u prend la valeur 1
Traitement
    Tant que u < … Faire
        n prend la valeur n + 1
        u prend la valeur …
    Fin du Tant que
Sortie
        Afficher n
```

1. Compléter l'algorithme afin qu'il puisse donner une réponse à la question posée.
2. Coder l'algorithme complété à l'aide de la calculatrice, puis l'exécuter. Conclure.

Prolongements possibles

Piste 1

Après le traitement d'un cancer du sein (T=14 semaines), il est d'usage de surveiller la personne traitée sur une période de 5 ans. Sachant qu'un traitement chirurgical peut laisser en résidu indétectable une masse tumorale de 10^3 cellules, expliquer l'origine du choix de 5 ans comme période de surveillance d'un cancer du sein après traitement.

Piste 2

Pour le cancer du colon (T=90 semaines), on préconise un dépistage à partir de 50 ans. Un individu développe une cellule cancéreuse à l'âge de 20 ans. Le dépistage proposé est-il cohérent ? Justifier la réponse.

Population de pies bavardes

Nous allons, dans cette section, nous pencher sur une espèce d'oiseaux, la pie bavarde. C'est une population d'oiseaux très présente en Europe ainsi qu'en Amérique du Nord, surtout dans les provinces de l'Ouest. Il existe une grande population de pies bavardes en Alsace, région de l'est de la France, dans une grande réserve naturelle.

Partie A : Essais de modélisation

Problématiques développées : P2, P3 et P6
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : après l'introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	B2I lycée : le tableur. Rechercher de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur.
Logiciel	Tableur.
Modalités de gestion de classe	Travail de groupe.

Activité

Un groupe de biologistes a relevé pendant quatre ans, le premier janvier de chaque année depuis 2000, le nombre de pies vivant sur une île d'une superficie de 60 km^2.

Il a obtenu les résultats suivants :

Année	Population
2000	300
2001	270
2002	243
2003	220

Les mesures ont été stoppées pendant quelques années, puis ont repris en 2010. On comptait 105 pies sur l'île le premier janvier 2010.

1. Entrer les données dans une feuille de calcul.
2. Proposer une modélisation de la situation à l'aide d'une suite (p_n).
3. En utilisant ce modèle, quel serait la population en 2010 ?
4. Peut-on valider cette modélisation ?

Les biologistes ont admis que le nombre d'oiseaux diminuait de 10% chaque année, à cause des prédateurs et de la régulation des naissances et des décès.

Quelle est dans ce cas la nature de la suite (p_n) ?

Partie B : Premier modèle d'évolution - les biologistes n'interviennent pas.

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6, P7 et P8.
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : après l'introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	B2I lycée : le tableur. Rechercher de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur. Les notions algorithmiques de la classe de seconde
Logiciels	Tableur, logiciel de programmation
Modalités de gestion de classe	Devoir à la maison et (ou) travail de groupe.

Fiche élève

Les deux questions posées à la classe sont :

- Comment évolue la population de pies ?
- En quelle année la population disparaît-elle de l'île si la situation perdure ?

Fiche professeur

Ces questions permettent de mettre en œuvre une démarche expérimentale.

Dans un premier temps, le travail est mené à l'aide d'un tableur.

Celui-ci permet de constater que la population décroît et de déterminer en quelle année cette espèce d'oiseaux aura disparu de l'île. On peut envisager d'utiliser une courbe de tendance.

Le recours à une méthode algorithmique dans un second temps, permet au professeur de proposer des énoncés différenciés, répondant aux besoins de chaque apprenant.

Énoncé 1

1. Interpréter l'algorithme ci-dessous.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

```
Initialisation
        pop ← 105
        n prend la valeur 0
Traitement
        Tant que pop >= 1 Faire
                pop ← pop × 0,9
                n ← n + 1
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher « la population aura disparu en 2010 + n »
```

Énoncé 2

1. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie l'année où la population aura disparu.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

```
Initialisation
        pop ← …
        n prend la valeur 0
Traitement
        Tant que pop >= 1 Faire
                pop ← …
                n ← …
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher « la population aura disparu en … »
```

Énoncé 3

1. Écrire un algorithme qui calcule et affiche en sortie l'année où la population aura disparu.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

Partie C : Deuxième modèle d'évolution - les biologistes interviennent.

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6, P7 et P8.
Série : S.
Place dans la programmation : après la notion de suite géométrique et le sens de variation d'une suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	Interpréter un algorithme. Compléter un algorithme. Modifier un algorithme. Émettre des conjectures. Mobiliser ses connaissances. Analyser de manière critique un document. Utiliser les quantificateurs.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur.
Logiciels	Tableur, logiciel de programmation
Modalités de gestion de classe	Recherche par groupes, avec éventuellement une différenciation portant sur des questions plus ou moins détaillées selon les groupes.

Fiche élève

Pour tenter de modifier la situation, les biologistes décident d'installer un nombre a d'oiseaux de cette espèce le premier janvier de chaque année suivant l'année 2010.
Ils estiment que le risque d'extinction est évité si la population se stabilise autour de 200 oiseaux sur l'île.

1. Partie expérimentale

1.A. Modifier la feuille de calcul établie dans la partie B afin de tenir compte de ce changement.
On pourra noter la valeur de a dans une cellule particulière et on prendra ici $a = 5$.

1.B. Quelle conjecture peut-on émettre quant à l'évolution du nombre d'oiseaux vivant sur l'île ?

1.C. Les biologistes éviteraient-ils ainsi l'extinction de l'espèce ?

1.D. Reprendre les questions *a*., *b*. et *c*. avec les valeurs $a = 10$, $a = 20$ puis $a = 30$.

1.E. Combien doivent-ils installer au minimum d'oiseaux chaque année pour éviter l'extinction ?

1.F. Combien doivent-ils installer au minimum d'oiseaux chaque année pour que le nombre de pies vivant sur l'île retrouve au bout d'un certain nombre d'années sa valeur de l'an 2000 ?

2. Justification

Caroline a répondu correctement à la question 1.E, elle amorce une recherche supplémentaire avec le tableur. Un extrait de sa feuille de calcul est représenté ci-après.
Pour tout entier naturel n, on note q_n le nombre d'oiseaux vivant sur l'île le premier janvier $2010 + n$ lorsque les biologistes décident d'installer 20 oiseaux le premier janvier de chaque année suivant l'année 2010.

	A	B	C	D	E
1	n	q_n	q_n-200	quotient	a= 20
2	0	105	-95	0,9	
3	1	114,5	-85,5	0,9	
4	2	123,05	-76,95	0,9	
5	3	130,75	-69,26		

2.A. Pour tout entier naturel n, exprimer q_{n+1} en fonction de q_n.

2.B. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = q_n - 200$.

2.C. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
Exprimer alors, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n : $q_n = 200 - 95\times(0,9)^n$

4. Démontrer que la suite (q_n) est croissante.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $q_n < 200$.

Pour aller plus loin

On se propose de déterminer le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n > n_0$, q_n appartienne à l'intervalle]199 ;200[.

Pierre propose à Caroline un algorithme ainsi que sa programmation en langage *Scilab* correspondante. Il affirme qu'en exécutant le programme, elle aura répondu à la question :

Initialisation

  n prend la valeur 0

  $q \leftarrow 200 - 95\times(0,9)^n$

Traitement

  Tant que $q < 199$ Faire

    $n \leftarrow n + 1$

    $q \leftarrow 200 - 95\times(0,9)^n$

  Fin du Tant que

Sortie

    Afficher la valeur de n_0

```
n=0 ;
q=200-95*0.9^n ;
while q<=199
  n=n+1 ;
  q=200-95*0,9^n ;
end
afficher('la première valeur de n pour laquelle q_n est ..
compris strictement entre 199 et 200 est égale à '+string(n))
```

1. Interpréter cet algorithme.
2. Coder l'algorithme et l'exécuter.
3. Caroline dit alors à Pierre : « On obtient bien une valeur de n_0 pour laquelle q_{n_0} appartient à l'intervalle]199 ; 200[, mais pourquoi es-tu certain que pour les valeurs de n plus grandes que n_0 la propriété sera encore vérifiée ? ».
4. Répondre alors à la question de l'énoncé.
5. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il détermine le premier entier naturel n0 tel que, pour tout entier naturel $n>n_0$, $q_n \in$]199,9 ; 200[.
Répondre à la même question avec $q_n \in$]199,99 ; 200[.
6. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il détermine le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n>n_0$, $q_n \in$]200 – λ ; 200[, où λ est un réel strictement positif saisi en entrée à l'exécution de l'algorithme.

Que peut-on en déduire quant à la limite de q_n lorsque n tend vers + ∞ ?

Fiche professeur

La question sur le nombre minimal d'oiseaux à installer chaque année pour que le nombre de pies vivant sur l'île retrouve au bout d'un certain nombre d'années la valeur de l'an 2000 peut faire l'objet d'un problème ouvert dont il est possible de demander la démonstration.

Ce travail peut faire l'objet d'un exposé oral.

5. Accompagnement personnalisé

Cartes de jeux

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6 et P7.
Série : série S.
Place dans la progression : tout au long de l'année.

Objectifs pédagogiques	Apprendre à chercher de façon ludique. Utiliser différents outils pour résoudre un problème. Mettre en commun différentes démarches de résolution. Privilégier le travail en groupes. Découvrir la spécialité mathématique en Terminale.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l'oral. Prendre des initiatives.
Connaissances	Celles du programme de seconde ou de première.
Modalités de gestion de classe	Accompagnement Personnalisé.

Description du jeu de cartes

Chaque carte présente un problème court et ouvert, réclamant une réponse (qui peut-être multiple) numérique, approchée ou exacte. Pour résoudre ce problème, l'utilisation de l'informatique et/ou de l'algorithmique sont souvent nécessaires, utiles, mais quelques rares fois inutiles.

Les sujets des problèmes sont variés et couvrent la plus grande part possible du programme de 1èreS.

Les élèves construisent leur démarche en autonomie ; ils choisissent eux-mêmes les logiciels qu'ils comptent utiliser.

Les cartes sont classées suivant la difficulté de résolution :

Cartes vertes : Niveau élémentaire, pour être accessible à tous.
Cartes bleues : Niveau intermédiaire, pour atteindre une maîtrise des outils et des démarches.
Cartes rouges : Niveau supérieur, pour approfondir les démarches.
Cartes noires : Niveau très difficile, pour le plaisir du challenge.

Mises en œuvre possibles

Lors d'une séance, chaque élève prend une carte de la couleur de son choix. Il doit alors résoudre le problème qu'elle présente pour en choisir une autre, et ainsi de suite.
On peut aussi penser à une utilisation en classe entière, en travail en binôme, à la condition de disposer d'un ordinateur pour chaque groupe.

Les énoncés peuvent simplement servir de banque d'énoncés d'exercices utilisant l'outil informatique.

On peut enfin imaginer un concours entre deux classes (ou groupes) : chacune se voit remettre un paquet de cartes, le challenge consistant alors pour chaque classe à résoudre le maximum de cartes dans le temps imparti.

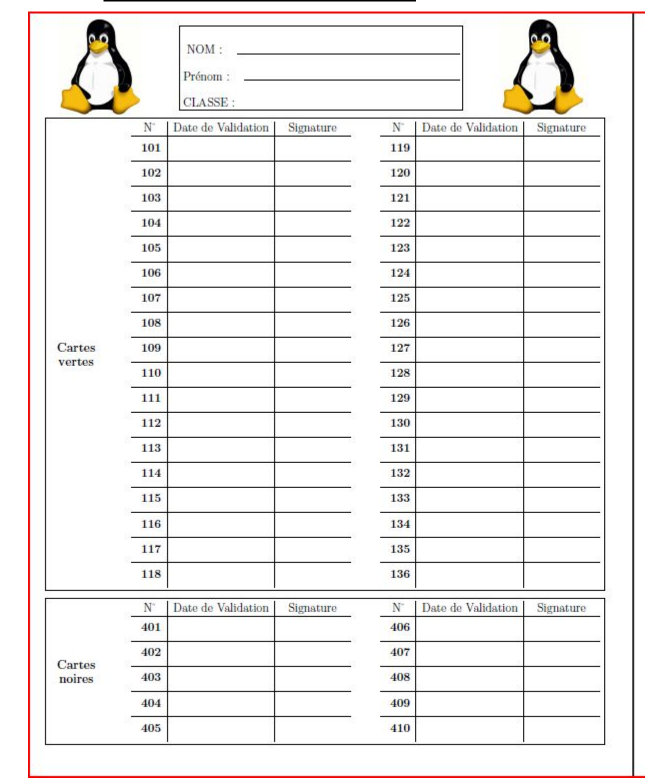
Remarques

La demande du professeur peut être de seulement donner la (ou les) réponse(s) exacte(s), ou bien un compte-rendu expliquant la démarche suivie. On peut imaginer une narration de recherche pour certaines des situations proposées.

Pour l'évaluation, chaque élève dispose d'une feuille de positionnement qui lui permet de se situer dans la maîtrise des outils informatiques.

Annexes

Fiche de suivi individuelle



NOM :

Prénom :

CLASSE :

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
	101			119		
	102			120		
	103			121		
	104			122		
	105			123		
	106			124		
	107			125		
	108			126		
Cartes vertes	109			127		
	110			128		
	111			129		
	112			130		
	113			131		
	114			132		
	115			133		
	116			134		
	117			135		
	118			136		

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
	401			406		
	402			407		
Cartes noires	403			408		
	404			409		
	405			410		

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
	201			217		
	202			218		
	203			219		
	204			220		
	205			221		
	206			222		
	207			223		
Cartes bleues	208			224		
	209			225		
	210			226		
	211			227		
	212			228		
	213			229		
	214			230		
	215			231		
	216			232		

	N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
	301			313		
	302			314		
	303			315		
	304			316		
	305			317		
Cartes rouges	306			318		
	307			319		
	308			320		
	309			321		
	310			322		
	311			323		
	312			324		

Les principales sources dont sont issus les problèmes

Torneo de Computación y Matemática (CyM), Argentine : www.oma.org.ar/nacional/cym/index.htm

Clubes Cabri, Argentine : www.oma.org.ar/cabri/index.htm

Le concours Alkhawarichti de l'APMEP Lille : http://defiapmep.free.fr/calculs/

Le projet Euler : http://eulerdz.toile-libre.org/index.php

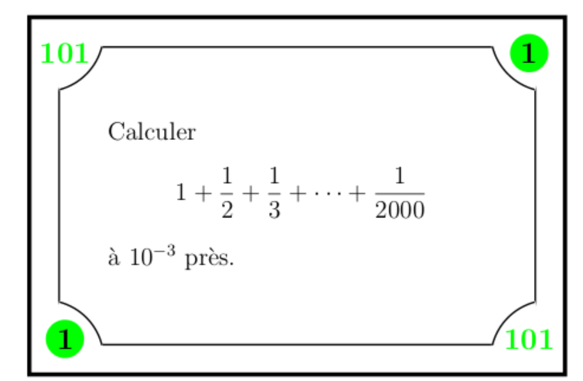
Five hundred mathematical challenges (MAA)

L'épreuve expérimentale de mathématiques en terminale S (IREM Bordeaux)

Introduction de la notion de paramètre au lycée avec un logiciel de géométrie dynamique (IREM)

Bulletin vert (Exercices de-ci, de-là, APMEP)

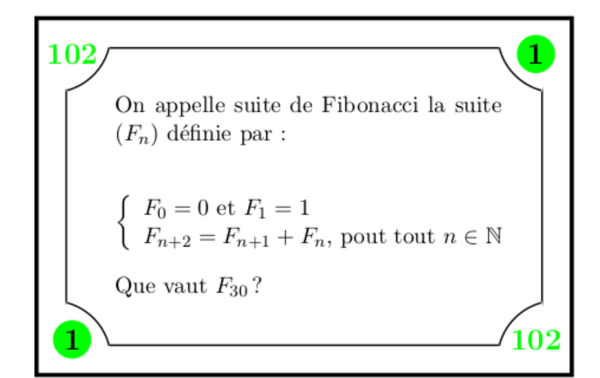
Quelques exemples de cartes


101 — 1

Calculer

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2000}$$

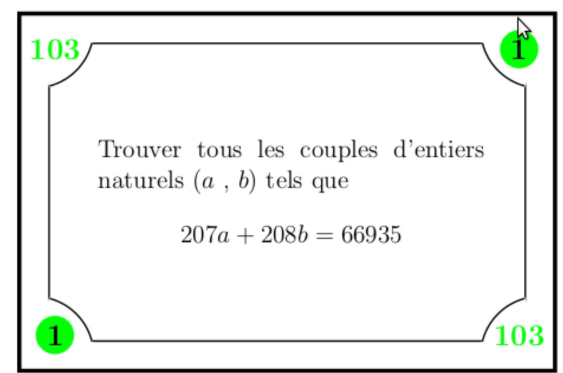
à 10^{-3} près.


102 — 1

On appelle suite de Fibonacci la suite (F_n) définie par :

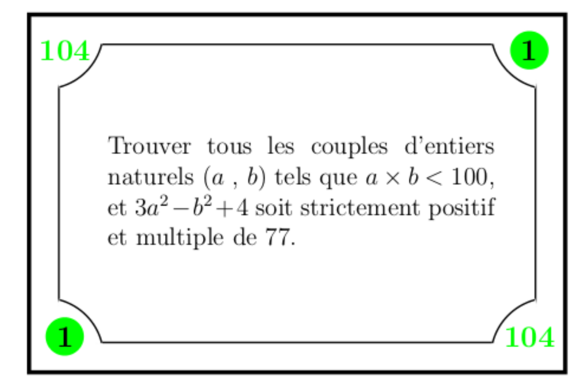
$$\begin{cases} F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ pout tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Que vaut F_{30} ?

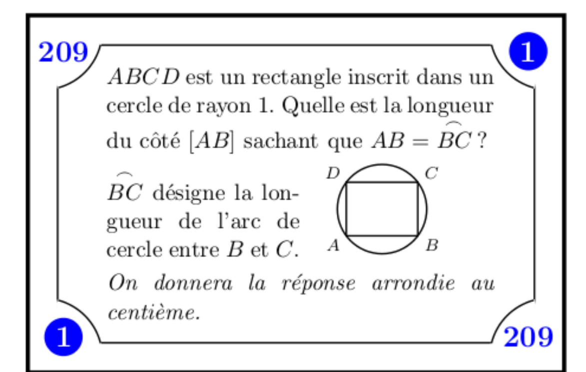

103 — 1

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a\ ,\ b)$ tels que

$$207a + 208b = 66935$$


104 — 1

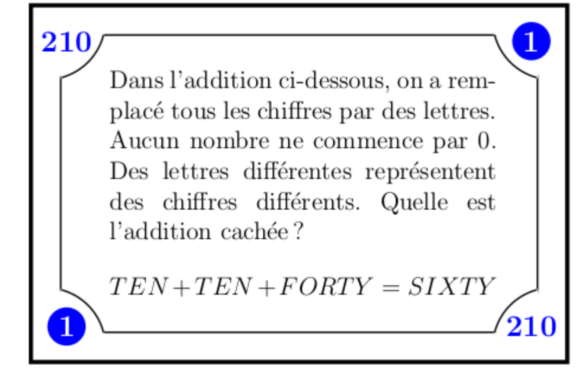
Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a\ ,\ b)$ tels que $a \times b < 100$, et $3a^2 - b^2 + 4$ soit strictement positif et multiple de 77.


209 — 1

$ABCD$ est un rectangle inscrit dans un cercle de rayon 1. Quelle est la longueur du côté $[AB]$ sachant que $AB = \widehat{BC}$?

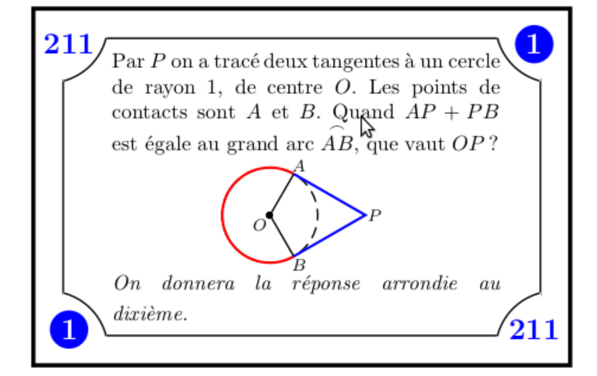
$\widehat{BC}$ désigne la longueur de l'arc de cercle entre B et C.

On donnera la réponse arrondie au centième.


210 — 1

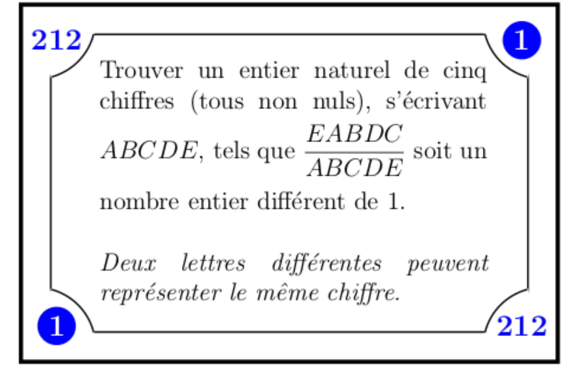
Dans l'addition ci-dessous, on a remplacé tous les chiffres par des lettres. Aucun nombre ne commence par 0. Des lettres différentes représentent des chiffres différents. Quelle est l'addition cachée ?

$$TEN + TEN + FORTY = SIXTY$$


211 — 1

Par P on a tracé deux tangentes à un cercle de rayon 1, de centre O. Les points de contacts sont A et B. Quand $AP + PB$ est égale au grand arc $\widehat{AB}$, que vaut OP ?

On donnera la réponse arrondie au dixième.


212 — 1

Trouver un entier naturel de cinq chiffres (tous non nuls), s'écrivant $ABCDE$, tels que $\dfrac{EABDC}{ABCDE}$ soit un nombre entier différent de 1.

Deux lettres différentes peuvent représenter le même chiffre.



Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe terminale
générale et technologique

Mathématiques
Série S

Enseignement de spécialité

juin 2012

Table des matières

Introduction

Un enseignement qui prend appui sur la résolution de problèmes

Le programme de l'enseignement de spécialité de la terminale scientifique réintroduit l'algèbre linéaire au lycée. Mais l'algèbre linéaire du lycée des années 1980 s'appuyait sur les vecteurs du plan et de l'espace, et l'introduction des espaces vectoriels. L'entrée proposée aujourd'hui est matricielle : il s'agit de faire jouer un rôle à des tableaux de nombres, lorsqu'ils sont particulièrement adaptés à l'écriture et à la résolution de certains problèmes.

La première partie du présent document présente donc des problèmes où l'introduction des matrices vient « naturellement » et apparaît comme une simplification d'écriture et de lecture. Le vocabulaire nouveau est introduit en situation. Les définitions et les théorèmes auxquels il est nécessaire de faire référence ne sont pas sortis du contexte du problème, au moins dans un premier temps.

Une petite mise en ordre des notions nouvelles est proposée dans la seconde partie. Des définitions convenables et des théorèmes bien rédigés sont en effet indispensables au jalonnement des avancées mathématiques. Les professeurs sont invités, conformément à la recommandation du programme, à ne pas démarrer directement par la présentation des contenus théoriques exposés dans la seconde partie, mais à essayer la démarche proposée consistant à introduire les notions dans le cadre de problèmes à résoudre. Cette démarche semble aujourd'hui susceptible d'accrocher des élèves qu'il s'agit de conquérir et de convaincre de l'intérêt pour eux de la poursuite d'études scientifiques.

La base de connaissances introduite en seconde partie permet ensuite une présentation d'autres contenus du programme, en se situant de nouveau dans le contexte de problèmes. Ainsi la troisième partie développe plus complètement certains thèmes mentionnés comme exemples dans le programme et ouvre des perspectives pour aborder d'autres sujets. On y trouvera notamment des connexions possibles avec la partie « arithmétique » du programme.

Des liens vers des ressources sont régulièrement proposés. Il s'agit dans certains cas d'outils permettant de se libérer de quelques phases de calcul dont la conduite et l'achèvement éloigneraient trop les élèves du problème traité. On doit pouvoir insister le temps qu'il faut sur certains points de calcul dont la maîtrise est un réel objectif de l'enseignement, quitte à s'en remettre à d'autres moments aux outils dont on dispose aujourd'hui pour pouvoir concentrer l'attention des élèves sur le problème à résoudre et les raisonnements nécessaires pour y parvenir.

I. Quelques problèmes faisant apparaître des matrices

Dans cette partie, le vocabulaire spécifique aux matrices et les opérations sur les matrices ne sont pas supposés connus. Lorsque la nécessité s'en fait sentir, des matrices sont introduites, sur lesquelles on peut faire des opérations (le produit de Cayley notamment, couramment utilisé sous le simple nom de produit, et qui est celui proposé par la calculatrice scientifique). La partie II proposera une étude plus systématique, mais la recommandation du programme est de commencer par des résolutions de problèmes motivant une introduction des matrices et non par une introduction ex nihilo de ces dernières et encore moins de l'algèbre linéaire.

A. Un problème à deux compartiments

1. Le problème

On conserve dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires qui ne peuvent se trouver que dans deux états physiologiques désignés par A et B. On désigne par a_n et b_n les effectifs – exprimés en milliers d'individus − des deux sous-populations (correspondant à chacun des deux états A et B) à l'instant n. Des observations menées sur une assez longue période permettent d'estimer que 95% des unicellulaires se trouvant à l'instant n dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant $n + 1$, non plus que 80% de ceux se trouvant à l'instant n dans l'état B ce qui se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}2b_n \\ b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}8b_n \end{cases} \quad (*)$$

L'effectif total s'élève à 500 000 individus.

1 La population à l'instant 0 satisfait $a_0 = 375$ Faire le calcul des effectifs a_n et b_n pour $n \leq 50$.
Peut-on faire une conjecture sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) ?
Effectuer de nouveaux essais en prenant d'autres valeurs initiales (mais un effectif total identique).

2 Quel est le comportement de la suite de terme général $\alpha_n = a_n – 400$? Conclure.

2. Commentaires sur le problème

Ce problème a été proposé dans le cadre d'une épreuve pratique de mathématiques.

Les élèves utilisaient un tableur pour conjecturer la nature des suites (a_n) et (b_n). À l'étape 36, si on fait abstraction des erreurs de calcul dues au logiciel, le système est stable : il y a 400 000 êtres dans l'état A et 100 000 dans l'état B.

Pour répondre à la question suivante, il suffit de faire entrer dans les calculs le fait que la population totale est conservée, autrement dit que, pour tout n : $a_n + b_n = 500$.

Le système $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}2b_n \\ b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}8b_n \end{cases}$ a les mêmes solutions que le système $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}75a_n + 100 \\ b_n = 500 - a_n \end{cases}$, dont les solutions (ce sont des couples de suites) s'obtiennent explicitement en faisant apparaître la suite (géométrique) de terme général $\alpha_n = 400 – a_n$.

n	*a* indice *n*	*b* indice *n*
0	375	125
1	381,25	118,75
2	385,9375	114,0625
3	389,453125	110,546875
4	392,0898438	107,9101563
5	394,0673828	105,9326172
6	395,5505371	104,4494629
7	396,6629028	103,3370972
8	397,4971771	102,5028229
9	398,1228828	101,8771172
10	398,5921621	101,4078379
11	398,9441216	101,0558784
12	399,2080912	100,7919088
13	399,4060684	100,5939316
14	399,5545513	100,4454487
…	…	…
…	…	…
…	…	…
…	…	…
31	399,9966516	100,0033484
32	399,9974887	100,0025113
33	399,9981165	100,0018835
34	399,9985874	100,0014126
35	399,9989405	100,0010595
36	399,9992054	100,0007946

3. D'autres façons d'écrire le problème

On peut schématiser le système de relations (*) par : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, donnant ainsi une signification au symbole × utilisé ici pour représenter l'action d'un tableau carré (une *matrice carrée d'ordre 2*) sur un couple de réels écrits en colonne (une *matrice-colonne*).

Le produit des matrices utilisable sur la calculatrice fonctionne ainsi et on pourrait écrire que, pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

Cette *puissance n-ième* de matrice peut-elle s'exprimer explicitement ?

Cette question n'est pas abordée ici. Notons que des simplifications sont certainement envisageables comme le laissent penser les résultats obtenus sur la suite (α_n). En effet, si on pose $\beta_n = b_n - 100$, on obtient le système : $\begin{cases} \alpha_n = 0{,}75^n \alpha_0 \\ \beta_n = 0{,}75^n \beta_0 \end{cases}$.

On en déduit que : $\begin{cases} \alpha_n = 400 - 0{,}75^n \times 25 \\ \beta_n = 100 + 0{,}75^n \times 25 \end{cases}$

ce qui montre que la répartition de la population des êtres unicellulaires se rapprochera au fil du temps de 400 000 individus dans l'état A et de 100 000 individus dans l'état B.

B. Étude, gestion et prévision économiques

1. Des tableaux de nombres pour la gestion

Voici les productions (en milliers) de deux usines de cycles appartenant à une même enseigne pour le premier semestre de l'année 2010 :

Premier semestre 2010

	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	12,99	13,20	5,58	1,53	1,95
Usine 2	4,62	4,98	2,16	0,51	0,78

Si on veut faire entrer les données de ce tableau dans un enchaînement de calcul, on les regroupe dans le tableau de nombres suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 12{,}99 & 13{,}20 & 5{,}58 & 1{,}53 & 1{,}95 \\ 4{,}62 & 4{,}98 & 2{,}16 & 0{,}51 & 0{,}78 \end{pmatrix}$$, appelé **matrice**.

Cette matrice a 2 lignes et 5 colonnes. On dit que cette matrice est de format (2,5). Elle contient 10 éléments, appelés « **coefficients de la matrice** ». Pour repérer un coefficient d'une matrice, on indique son **indice de ligne** puis son **indice de colonne**, les lignes se comptant du haut vers le bas et les colonnes de la gauche vers la droite.

La disposition générale des coefficients de la matrice A est donc la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{a_{23}} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{a_{23}}$ désigne le terme de la 2ème ligne et de la 3ème colonne : $a_{23} = 2{,}16$.

La production de l'usine 1 pour le premier semestre 2011 peut être représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 12{,}99 & 13{,}20 & 5{,}58 & 1{,}53 & 1{,}95 \end{pmatrix}$ appelée « **matrice ligne de format (1,5) ».**

La production des VTT adultes dans les deux usines est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 12{,}99 \\ 4{,}62 \end{pmatrix}$, appelée **« matrice colonne de format (2,1) ».**

Les productions (en milliers) des deux usines de cycles pour le second semestre de l'année 2010 sont les suivantes :

Second semestre 2010

	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	11,79	15,84	4,38	1,29	1,59
Usine 2	3,78	4,14	2,40	0,51	0,66

Ces données sont représentées par la matrice $A = \begin{pmatrix} 11{,}79 & 15{,}84 & 4{,}38 & 1{,}29 & 1{,}59 \\ 3{,}78 & 4{,}14 & 2{,}40 & 0{,}57 & 0{,}66 \end{pmatrix}$.

La matrice C représentant la production annuelle pour ces deux usines est obtenue en ajoutant termes à termes les coefficients des deux matrices A et B. La matrice C est, par définition, la somme des matrices A et B. On note : $C = A + B$.

Si l'on appelle c_{ij} l'élément de la i-ième ligne et j-ième colonne de la matrice C, on a, pour tout i égal à 1 ou 2 et j compris entre 1 et 5 : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$C = \begin{pmatrix} 24,78 & 29,04 & 9,96 & 2,82 & 3,54 \\ 8,40 & 9,12 & 4,56 & 1,08 & 1,44 \end{pmatrix}.$$

On a alors pour tout i égal à 1 ou 2 et j compris entre 1 et 5 : $b_{ij} = c_{ij} - a_{ij}$.

Par définition, la matrice B est la différence des matrices C et A : $B = C - A$

Ces opérations sont réalisables sur des matrices de même format.

La matrice D qui représente la production moyenne par mois dans ces deux usines est obtenue en divisant chacun des coefficients c_{ij} par 12. Ainsi $D = \begin{pmatrix} 2,065 & 2,42 & 0,83 & 0,235 & 0,295 \\ 0,70 & 0,76 & 0,38 & 0,09 & 0,12 \end{pmatrix}$.

On note $D = \frac{1}{12} C$.

2. Élaboration d'un indice de prix

Une association de consommateurs compare les prix de cinq produits p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 distincts dans trois magasins différents. Les observations fournissent les données suivantes :

Prix des produits à l'unité en euros

	Produit p1	Produit p2	Produit p3	Produit p4	Produit p5
magasin 1	1	5	2	3	4
magasin 2	1,1	4,7	1,8	3,1	3,8
magasin 3	0,9	5,1	1,9	3,2	4

On observe qu'on peut stocker les prix des produits sous la forme d'un tableau à 3 lignes et 5 colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1,1 & 4,7 & 1,8 & 3,1 & 3,8 \\ 0,9 & 5,1 & 1,9 & 3,2 & 4 \end{pmatrix}$$

On note ce tableau (matrice) A. Pour tout couple d'entiers (i, j) où i est compris entre 1 et 3 et j compris entre 1 et 5, le coefficient de la matrice A qui se trouve à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est noté a_{ij} et représente ici le prix unitaire du produit p_j dans le magasin i.

On écrit : $A = (a_{ij})$.

Pour comparer la dépense d'une ménagère selon les magasins, on considère un « panier » indiquant pour chaque produit la quantité achetée.

Un panier est ainsi décrit par la donnée de cinq entiers, par exemple, 2, 1, 3, 3, 2 ce qui signifie que la ménagère a acheté deux produits de type 1, un de type 2, trois de type 3, …

Le panier d'une ménagère peut donc être représenté sous la forme d'un tableau à 5 lignes et 1 colonne :

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix}$$

Le prix Π d'un panier dans chacun des 3 magasins se calcule alors de la façon suivante :

$\Pi_1 = q_1 \times 1 + q_2 \times 5 + q_3 \times 2 + q_4 \times 3 + q_5 \times 4 = q_1 \times a_{11} + q_2 \times a_{12} + q_3 \times a_{13} + q_4 \times a_{14} + q_5 \times a_{15}$

$\Pi_2 = q_1 \times a_{21} + q_2 \times a_{22} + q_3 \times a_{23} + q_4 \times a_{24} + q_5 \times a_{25}$

$\Pi_3 = q_1 \times a_{31} + q_2 \times a_{32} + q_3 \times a_{33} + q_4 \times a_{34} + q_5 \times a_{35}$

On peut traduire les relations précédentes par l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix}$$

ce qui définit le produit de la matrice A par la matrice colonne Q. Dans notre exemple :

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 29{,}2 \\ 30{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1{,}1 & 4{,}7 & 1{,}8 & 3{,}1 & 3{,}8 \\ 0{,}9 & 5{,}1 & 1{,}9 & 3{,}2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Gestion des admissions et sorties dans un hôpital

On estime que les patients admis dans un certain service d'un hôpital peuvent se trouver dans l'un des 4 états suivants : 1. Soins réguliers, 2. Chirurgie, 3. Soins intensifs, 4. Sortie.

Cette estimation est décrite par le tableau suivant, dans lequel sont indiquées les probabilités de passage d'un des états à un autre dans un intervalle de 24 heures (probabilités obtenues par modélisation des fréquences observées sur une longue période).

Tableau de circulation des malades entre les services :

	1. Soins réguliers	**2. Chirurgie**	**3. Soins intensifs**	**4. Sortie**
1. Soins réguliers	0,6	0,2	0	0,2
2. Chirurgie	0,1	0	0,8	0,1
3. Soins intensifs	0,5	0	0,33	0,17
4. Sortie	0	0	0	0

Ce tableau se lit de la manière suivante : un malade se trouvant un jour en soins réguliers a la probabilité 0,6 de se trouver le lendemain en soins réguliers, 0,2 de se trouver en chirurgie, une probabilité nulle de se trouver en soins intensifs et la probabilité 0,2 de sortir etc.

Les informations chiffrées précédentes peuvent être stockées sous la forme d'un tableau (matrice) à 4 lignes et 4 colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}33 & 0{,}17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons qu'un certain jour, la distribution des patients suivant les quatre états possibles s'écrive $X = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Le lendemain, la nouvelle distribution $X' = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ des nombres de malades par état d'hospitalisation (les m_i) est obtenue grâce au système suivant :

$$\begin{cases} m_1 = 12 \times 0,6 + 5 \times 0,1 + 6 \times 0,5 + 3 \times 0 \\ m_2 = 12 \times 0,2 + 5 \times 0 + 6 \times 0 + 3 \times 0 \\ m_3 = 12 \times 0 + 5 \times 0,8 + 6 \times 0,33 + 3 \times 0 \\ m_4 = 12 \times 0,2 + 5 \times 0,1 + 6 \times 0,17 + 3 \times 0 \end{cases}$$

qui donne $X' = \begin{pmatrix} 10,7 & 2,4 & 6 & 3,9 \end{pmatrix}$.

Ce résultat (dans lequel on ne doit pas se formaliser de trouver des dixièmes d'êtres humains) peut se traduire par l'égalité matricielle suivante :

$$X' = XM = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,33 & 0,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons qu'au jour 0, dix patients soient admis en soins réguliers et qu'il n'y ait aucun patient en cours de traitement. On note $X_0 = (10 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0)$ la répartition des malades le jour 0 et X_k la répartition des malades au $k^{\text{ième}}$ jour, k entier positif.

Supposons également que 10 patients soient admis chaque jour.

Le processus se déroule de la manière suivante :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = X_1 M + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_0 M^2 + X_0 M + X_0$$

Les calculs confiés à un tableur montrent que la situation tend à se stabiliser.

Jour	soins réguliers	chirurgie	soins intensifs	sortie
	10	0	0	0
1	16	2	0	2
2	19,8	3,2	1,6	3,4
3	23	3,96	3,093333	4,546666
4	25,742666	4,6	4,199111	5,511555
5	28,005155	5,148533	5,079703	6,308385
6	29,857798	5,601031	5,812061	6,962501
7	31,380812	5,971559	6,418178	7,500339
8	32,634732	6,276162	6,916640	7,943014
9	33,666776	6,526946	7,326476	8,307336
10	34,5159989	6,733355	7,6637162	8,607129
	…	…	…	…
	…	…	…	…
19	37,778916	7,526399	8,959652	9,759018
20	37,899815	7,555783	9,007670	9,801698
21	37,999302	7,579963	9,047183	9,836819
22	38,081169	7,599860	9,079698	9,865720
23	38,148537	7,616233	9,106454	9,889503
24	38,203972	7,629707	9,128472	9,909073
25	38,249590	7,640794	9,146589	9,925177
26	38,287128	7,649911	9,161498	9,938429
27	38,318018	7,657425	9,173767	9,949334
28	38,343437	7,663603	9,183863	9,958307

On pourrait continuer le calcul littéral précédent, pour aboutir à l'égalité suivante.

Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, $X_n = X_0\,(M^n + M^{n-1} + \ldots + M^2 + M + I)$, , où I désigne la matrice identité d'ordre 4 (de format (4,4), dont les coefficients sont tous nuls sauf sur la diagonale principale où ils sont tous égaux à 1).

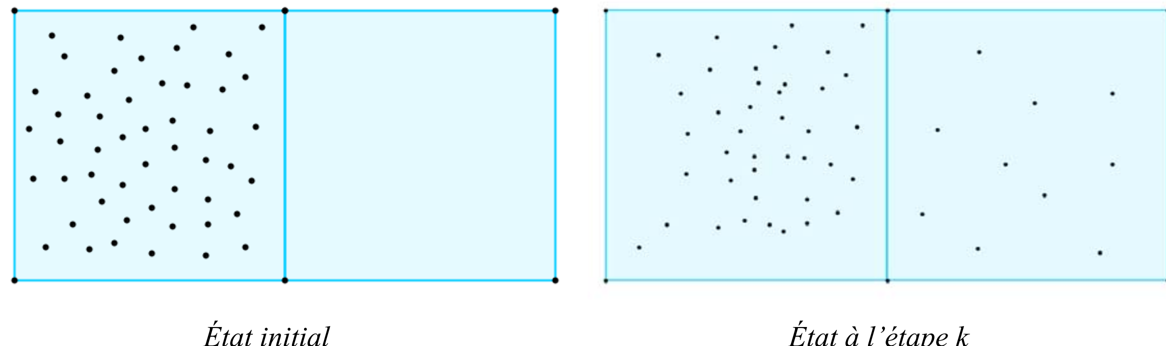
C. Le modèle d'urnes de T. & P. Ehrenfest

1. Présentation du problème

Ce modèle simplifié de diffusion d'un gaz à travers une membrane poreuse fut proposé en 1907 par les physiciens autrichiens Tatiana et Paul Ehrenfest pour décrire en termes de physique statistique les échanges de chaleur entre deux systèmes portés initialement à une température différente. Il permit ainsi de mieux comprendre le phénomène thermodynamique et de lever un paradoxe :

- d'un point de vue macroscopique, un système thermodynamique évolue naturellement et irréversiblement de façon que son entropie (quotient de la variation de chaleur par la température) soit maximum,
- mais d'un point de vue microscopique, on peut remarquer que les mouvements des particules sont réversibles.

Le but est de modéliser la répartition au cours du temps de N molécules de gaz à l'intérieur d'un récipient divisé en deux compartiments séparés par une membrane poreuse.



État initial — *État à l'étape k*

Description du modèle :

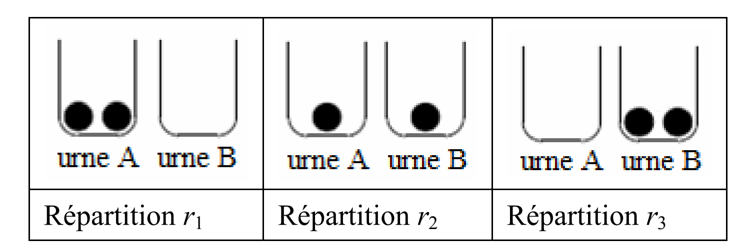
On modélise mathématiquement par l'expérience aléatoire suivante.

On considère 2 urnes A et B, et N boules numérotées de 1 a N.

Initialement, toutes les boules se trouvent dans l'urne A. Ensuite, aux étapes 1, 2, 3,… on tire au hasard, de façon équiprobable, un nombre entre 1 et N, et on change d'urne la boule correspondante.

2. Étude du cas N = 2

A chaque étape, la répartition dans les urnes A et B est l'une des trois suivantes :



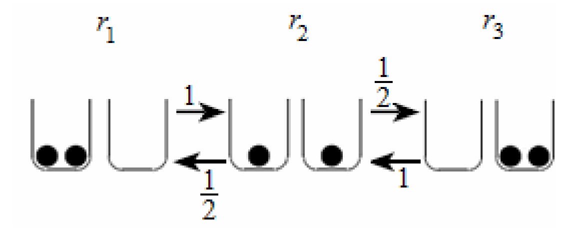
Répartition r_1	Répartition r_2	Répartition r_3

a) Introduction d'une matrice

Notons : R_1 l'événement « la répartition est r_1 » ;

R_2 l'événement « la répartition est r_2 » ;

R_3 l'événement « la répartition est r_3 ».



En notant, pour tout i et j de $\{1, 2, 3\}$; $p_{ij} = p_{R_i}(R_j)$, on a alors :

$p_{12} = 1, p_{21} = \frac{1}{2}, p_{23} = \frac{1}{2}, p_{32} = 1$ et $p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{13} = p_{31} = 0$

Ces données peuvent être stockées sous la forme d'un tableau (matrice carrée de format (3,3)) :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit k un nombre entier naturel non nul. On note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne B à l'instant $k > 0$. On a bien sûr $X_0 = 0$ et pour tout entier $k > 0, X_k \in \{0, 1, 2\}$

Notons : A_k l'événement « à l'étape k, la répartition est r_1 », autrement dit « $X_k = 0$ » ;

B_k l'événement « à l'étape k, la répartition est r_2 », autrement dit « $X_k = 1$ »;

C_k l'événement « à l'étape k, la répartition est r_3 », autrement dit « $X_k = 2$ ».

On a alors : $p(A_{k+1}) = p(A_{k+1} \cap A_k) + p(A_{k+1} \cap B_k) + p(A_{k+1} \cap C_k)$

$= p(A_k)\,p_{A_k}(A_{k+1}) + p(B_k)\,p_{B_k}(A_{k+1}) + p(C_k)\,p_{C_k}(A_{k+1})$.

Or $p_{A_k}(A_{k+1}) = p_{11}$, $p_{B_k}(A_{k+1}) = p_{21}$ et $p_{C_k}(A_{k+1}) = p_{31}$.

D'où : $p(A_{k+1}) = p_{11}p(A_k) + p_{21}p(B_k) + p_{31}p(C_k)$.

On établit des relations analogues pour $p(B_{k+1})$ et $p(C_{k+1})$. On obtient finalement le système suivant :

$$\begin{cases} p(A_{k+1}) = p_{11}p(A_k) + p_{21}p(B_k) + p_{31}p(C_k) \\ p(B_{k+1}) = p_{12}p(A_k) + p_{22}p(B_k) + p_{32}p(C_k) \\ p(C_{k+1}) = p_{13}p(A_k) + p_{23}p(B_k) + p_{33}p(C_k) \end{cases}$$

En notant $V_k = (p(A_k)\ p(B_k)\ p(C_k))$ pour tout entier k strictement positif, le système de relations précédent correspond à l'égalité matricielle $V_{k+1} = V_kP$.

A l'étape initiale, la répartition est r_1, donc $V_0 = (1\ \ 0\ \ 0)$.

A l'issue de la première étape, la répartition est r_2 et $V_1 = V_0P = (0\ \ 1\ \ 0)$.

On établit par récurrence que :

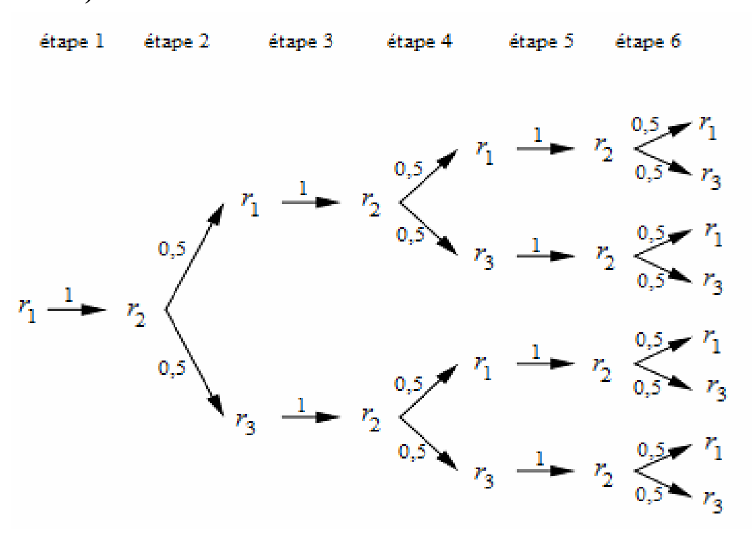
- pour tout entier naturel k non nul : $V_k = V_0 P^k$
- $P^{2k} = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et que $P^{2k+1} = P$ pour tout entier $k \geq 1$.

On en déduit facilement que :

- pour tout entier k impair, $V_k = (0 \quad 1 \quad 0)$, ce qui correspond au fait qu'à tout instant impair, la répartition est toujours r_2
- pour tout entier k pair, non nul, $V_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ce qui correspond au fait qu'à tout instant pair, la répartition est soit r_1 soit r_3.

Le calcul de l'espérance de X_k conduit à $E(X_k) = 1$, pour tout entier naturel k, ce qui signifie qu'au bout de k étapes, le nombre moyen de boules dans l'urne B est égal à 1. La répartition des boules dans les deux urnes a tendance à s'équilibrer.

b) Utilisation d'un arbre



A la $k^{\text{ième}}$ étape, on obtient les arbres suivants :

Si k est impair	Si k est pair
$r_1 \xrightarrow{1} r_2$ $r_3 \xrightarrow{1} r_2$	$r_2 \xrightarrow{0,5} r_1$ $r_2 \xrightarrow{0,5} r_3$

On retrouve alors les résultats du paragraphe précédent.

Remarque :

Le recours au calcul matriciel n'est vraiment utile que pour un grand nombre de particules mais le cas où $N = 2$ permet d'appréhender le problème en expliquant l'utilisation des matrices et en comparant les résultats obtenus avec ceux que l'on obtient avec l'utilisation d'un arbre.

c) Calcul du temps de retour moyen dans le cas $N = 2$

Considérons un processus de diffusion correspondant à $2n$ étapes et notons T_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'étapes pour revenir à l'état initial.

D'après l´étude précédente, on a :

$p(T_n = 1) = 0, p(T_n = 3) = 0$ et, pour tout entier naturel k, $p(T_n = 2k+1) = 0$;

$p(T_n = 2) = \frac{1}{2}, p(T_n = 4) = \frac{1}{4}$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p(T_n = 2k) = \frac{1}{2^k}$.

Calculons l'espérance de T_n :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{2n} k\, p(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n} 2k\, p(T_n = 2k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}$$

Calculons cette somme de deux façons différentes.

- Première méthode

On calcule successivement les sommes géométriques :

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}, \ldots, \sum_{k=n-1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$ et $\sum_{k=n}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$

En ajoutant ces sommes, on obtient :

$$E(T_n) = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

- Deuxième méthode

On considère la fonction définie sur **R** par $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{2^k}$. On peut également écrire :

$$f(x) = \frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} - 1}{\frac{x}{2} - 1} - 1 \text{ si } x \neq 2 \text{ et } f(2) = n.$$

Pour $x \neq 2$, les deux expressions de $f(x)$ permettent d'exprimer $f'(x)$ de deux façons différentes. On obtient alors deux expressions de $f'(1)$, ce qui permet de calculer $E(T_n)$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} E(T_n) = 4$. On revient donc en moyenne à l'état initial au bout de 4 étapes.

Remarque :

Il est intéressant de constater que si $N = 2$, le processus est réversible.

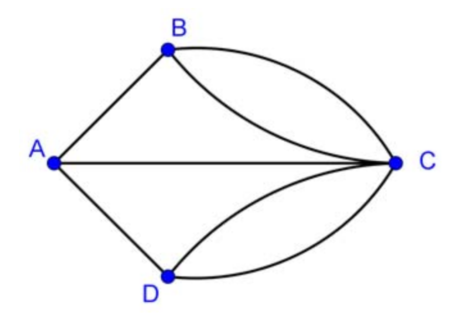
Cette étude est reprise et complétée dans la partie III.

D. Représentation d'un graphe. Notion de connexité

1. Parcourir un graphe

Chacun connaît l'histoire du parcours impossible empruntant une et une seule fois les sept ponts de la ville de Koenigsberg (aujourd'hui Kaliningrad), ponts reliant les rives (B et D) du fleuve qui traverse la ville, la Pregel, aux deux îles (A et C) que celle-ci forme, et les deux îles entre elles.

On dit que Léonard Euler (1707 – 1783) résolut le problème et mit en évidence l'absence de solution. L'humanité l'avait résolu en pratique avant lui, mais le génie d'Euler fut de fabriquer des mathématiques avec cette question, c'est-à-dire de donner des définitions donnant naissance à des théorèmes réutilisables dans d'autres situations.



Les ponts de Koenigsberg

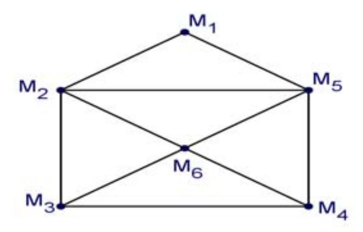
Le problème des ponts de Koenigsberg consiste en fait à savoir si un certain *graphe* est *eulérien* (c'est-à-dire si on peut en parcourir toutes les arêtes sans passer deux fois sur la même).

Voici quelques définitions.

Un graphe (non orienté) à *n* sommets est une suite finie de points distincts (M_1, M_2, …, M_n), appelés **sommets,** et d'**arêtes**, dont les extrémités sont des sommets. On considérera ici qu'il n'existe pas de **boucle**, c'est-à-dire d'arête ayant pour extrémités le même sommet, et qu'il n'existe pas non plus de point **isolé**, c'est-à-dire relié à aucun autre point.

Une **chaîne** de longueur $p \geq 2$ reliant M_i à M_j est une suite de sommets $\left(S_1, S_2, ..., S_p, S_{p+1}\right)$ telle que $S_1 = M_i$, $S_{p+1} = M_j$, et que, pour tout entier *k* compris entre 1 et *p*, il existe une arête reliant S_k à S_{k+1}. Dans le graphe associé au problème des Ponts de Koenigsberg, il n'existe pas de chaîne de longueur 1 reliant B à D.

Dans le graphe ci-dessous, (M_5, M_1, M_2) est une chaîne de longueur 2 reliant M_5 à M_2, (M_5, M_4, M_6, M_2) en est une de longueur 3, (M_5, M_6, M_4, M_2) une de longueur 4, etc.



Un graphe en forme d'« enveloppe »

Il n'existe pas de chaîne de longueur 1 reliant M_5 à lui-même, mais il en existe une de longueur 2 : (M_5, M_1, M_5). D'ailleurs, quand le graphe ne contient pas de point isolé (ce qui est notre hypothèse de travail), il existe toujours une chaîne reliant un point à lui-même.

Un graphe est dit **connexe** quand, deux points quelconques étant donnés, il existe une chaîne qui les relie.

2. Matrice d'adjacence d'un graphe

Un graphe à n sommets est caractérisé par les arêtes qui relient certains sommets entre eux. On peut donc représenter un graphe à n sommets (M_1, M_2, …, M_n) par un tableau à n lignes et n colonnes dans lequel, à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, on écrit 0 si aucune arête ne relie M_i et M_j, et 1 si une arête les relie. Ainsi pour le graphe précédent (« l'enveloppe »), on obtient le tableau suivant :

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
M1	0	1	0	0	1	0
M2	1	0	1	0	1	1
M3	0	1	0	1	0	1
M4	0	0	1	0	1	1
M5	1	1	0	1	0	1
M6	0	1	1	1	1	0

En notant $a_{i\,j}$ le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, on définit un tableau à 6 lignes et 6 colonnes (matrice de format (6, 6)), appelée matrice d'adjacence du graphe :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice précédente contient de nombreux zéros, traduisant l'absence d'arêtes reliant certains sommets du graphe. Par exemple, à la lecture de la matrice, on peut dire qu'il n'y a pas d'arête reliant les sommets M_2 et M_4.

Afin d'étudier la connexité d'un graphe, on peut s'intéresser à l'existence de chaines de longueur 2 entre deux sommets.

Soient i *et* j deux entiers compris entre 1 et n (ici $n = 6$). L'existence d'une chaine de longueur 2 entre les sommets M_i et M_j correspond à l'existence d'au moins un indice k tel que $a_{i\,k} \neq 0$ et $a_{k\,j} \neq 0$ c'est-à-dire tel que $a_{i\,k}\, a_{k\,j} \neq 0$.

On observe alors que le nombre $b_{i\,j} = \sum_{k=1}^{k=6} a_{ik} a_{k\,j}$ est la somme de six termes dont chacun est le produit de deux nombres choisis parmi 0 et 1 ; à chacun des termes non nuls de cette somme est associée une chaîne de longueur 2 joignant M_i et M_j et une seule. Leur somme est donc le nombre de chaînes de longueur 2 joignant M_i et M_j.

Les coefficients $b_{i\,j}$ définissent une nouvelle matrice B et les n^2 relations précédentes peuvent se traduire par la relation matricielle suivante :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} = A^2$$

qui définit le produit de la matrice A par elle-même.

Numériquement, la relation s'écrit ici :

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\\1&1&0&1&0&1\\0&1&1&1&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\\1&1&0&1&0&1\\0&1&1&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1&2\\1&4&1&3&2&2\\1&1&3&1&3&2\\1&3&1&3&1&2\\1&2&3&1&4&2\\2&2&2&2&2&4\end{pmatrix}$$

On peut ainsi lire dans la matrice de droite qu'il y a 3 chaînes de longueur 2 joignant le sommet M_3 au sommet M_5.

On peut ensuite définir les puissances successives de la matrice d'adjacence A et montrer par récurrence que, pour tout entier $p > 1$, les coefficients de la matrice A^p donnent les nombres de chaînes de longueur p allant d'un sommet du graphe à un autre.

3. Lire la connexité d'un graphe sur sa matrice d'adjacence

Le calcul numérique précédent a pour résultat une matrice B dont aucun coefficient n'est nul, ce qui signifie que chaque fois qu'on se donne deux sommets, il existe une chaîne de longueur 2 qui les relie. On peut donc conclure que le graphe de l'« enveloppe » est connexe.

Cela pouvait, bien sûr, se voir mais il faut imaginer des graphes possédant un grand nombre de sommets où « voir » n'est plus aussi évident.

Ce qui précède montre surtout qu'**un graphe peut être donné par sa matrice**.

En consultant les puissances successives de la matrice d'adjacence, on peut savoir s'il y a des chaînes de longueur 2, 3, … reliant tel sommet à tel autre. Mais jusqu'où calculer pour établir la connexité d'un graphe dans un cas quelconque ?

Considérons un graphe à n sommets ($n \geq 2$). Si une chaîne de longueur n ne passe pas par tous les sommets du graphe, alors elle passe au moins deux fois par le même sommet et on peut réduire la « boucle » qu'elle formait. Cet argument montre que pour étudier la connexité, il suffit de pousser la recherche jusqu'à la puissance n-ième. D'où le résultat suivant :

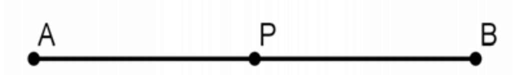
un graphe associé à une matrice d'adjacence A de format (n, n) (on dit aussi matrice carrée d'ordre n) est connexe si et seulement si, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, il existe un entier p compris entre 1 et n tel que le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A^p soit non nul.

E. Marches aléatoires

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement à long terme d'une marche aléatoire. Il s'agit de calculer les probabilités pour le héros d'une marche aléatoire dans un réseau de se trouver après n pas en tel ou tel sommet (ou nœud) du réseau.

1. Marche aléatoire sur un segment

Le personnage se déplace d'un sommet à l'autre du graphe ci-dessous. S'il est en A ou en B, il ne peut aller qu'en P, s'il est en P, il peut aller en A ou en B avec des probabilités que nous considérons comme identiques.



On peut représenter la situation par une matrice M (dite de transition) qui indique non les arêtes existantes comme dans les matrices d'adjacence, mais les probabilités de passage d'un sommet à un

autre. Les ***matrices de transition*** ne sont pas systématiquement symétriques. La matrice M ci-dessous représente la marche dans le réseau (A, P, B).

$$\begin{array}{c} \\ A \\ P \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & P & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les coefficients figurant sur chaque ligne donnent les probabilités de passage du sommet qui donne son nom à la ligne à celui qui donne son nom à la colonne. La diagonale ne contient de ce fait que des 0.

Pour aller de A à A en deux pas, le personnage peut aller de A à A puis de A à A (les probabilités sont 0 et 0), ou de A à P puis de P à A (probabilités 1 et ½), ou de A à B puis de B à A (probabilités 0 et 0). La probabilité pour qu'il aille de A à A en deux pas est donc : $0\times 0+1\times\frac{1}{2}+0\times 0=\frac{1}{2}$.

Pour aller de A à B en deux pas, le personnage peut aller de A à A puis de A à B (probabilités 0 et 0), ou de A à P puis de P à B (probabilités 1 et ½), ou de A à B et de B à B (probabilités 0 et 0). La probabilité pour qu'il aille de A à B en deux pas est donc : $0\times 0+1\times\frac{1}{2}+0\times 0=\frac{1}{2}$.

La première probabilité s'obtient en additionnant terme à terme les produits des coefficients de la ligne correspondant aux déplacements partant de A par ceux de la colonne correspondant aux déplacements arrivant en A.

La seconde s'obtient en faisant la somme des produits terme à terme des coefficients de la « ligne A » par ceux de la « colonne B ».

En itérant le procédé on obtient la probabilité de chacun des trajets de deux pas. Cela revient à calculer le produit de la matrice précédente (notée M) par elle-même, c'est-à-dire la matrice M^2. Les coefficients qui figurent dans cette matrice M^2 sont les probabilités pour que le personnage situé au sommet qui donne son nom à la colonne se soit trouvé deux coups auparavant au sommet qui donne son nom à la ligne.

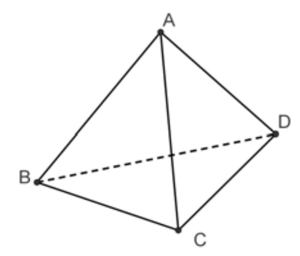
On obtient :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad et \quad M^3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que $M^3 = M$.

On peut interpréter ce résultat : par exemple, partant du sommet A, le personnage est sûrement en P après un nombre impair de pas, en B ou en A avec des probabilités $\frac{1}{2}$ après un nombre pair de pas.

2. Marche aléatoire aux sommets d'un tétraèdre



À la différence de la situation précédente, dans la marche aux sommets d'un triangle comme dans la marche aux sommets d'un tétraèdre, on peut passer, à chaque étape, de tout sommet donné à tout autre sommet donné.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, la matrice de transition (donnant les probabilités de passage d'un sommet à un autre) s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

On peut démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice M s'écrit :

$$M^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & v_n & v_n \end{pmatrix}$$

où les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) sont : $u_n = \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ et $v_n = \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$.

La lecture de ces matrices de transition est naturellement la même qu'au paragraphe précédent : le coefficient générique – celui situé sur la ligne i et la colonne j – de la matrice M^n donne la probabilité qu'une chaîne de longueur n permette de passer du sommet i au sommet j (on peut supposer que les sommets A, B, C, D sont numérotés 1, 2, 3, 4). Il n'y a pas d'ambiguïté dans ce cas, la matrice est symétrique (les puissances d'une matrice symétrique sont symétriques).

Les différences entre les différentes probabilités s'estompent rapidement : s'il n'est pas possible de passer d'un sommet à lui-même en un pas, les probabilités d'aller d'un sommet quelconque à un sommet quelconque sont très voisines dès que n est grand. En effet, la limite commune des deux suites (u_n) et (v_n) est $\frac{1}{4}$.

3. Un retour en arrière est-il possible ?

Ayant quitté un sommet du tétraèdre, au bout de combien de pas aléatoires le personnage peut-il compter y revenir ?

Soit X la variable aléatoire donnant, pour chaque marche, ce nombre de pas.

On a : $P(X=1)=0$, $P(X=2)=\frac{1}{3}$, $P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$. En effet, pour que le personnage soit en A, par exemple, après n pas sans y avoir été dans aucune de ses positions précédentes, il est nécessaire qu'à chacun de ses déplacements précédents il soit passé d'un sommet qui n'était pas A à un autre qui n'était pas A non plus, choisissant donc l'un de deux sommets sur trois possibles.

On peut vérifier par récurrence que $P(X=n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\times\frac{1}{3}$, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et observer que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} P(X=k)\right)=1$$

La variable X suit donc une loi géométrique.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche4.jsp

F. Pertinence d'une page web[1]

1. De la recherche dans une bibliothèque à la recherche dans un graphe

Un moteur de recherche doit fournir à chaque utilisateur une liste de pages où apparaissent des mots-clés donnés dans la requête de celui-ci. On peut avoir l'idée de classer les milliards de pages disponibles dans un ordre permettant le tri à partir des mots-clés fournis. Cela demande des moyens de stockage considérables et la réorganisation continuelle (en temps réel, comme on dit) de ces archives. Il faut de plus assurer aux milliers de requêtes simultanées des réponses rapides, mais aussi des réponses fiables.

Un moteur de recherche copie dans un premier temps les pages web sur des milliers d'ordinateurs et les trie par ordre alphabétique des mots clés. La première idée simple consisterait pour chaque requête à fournir la liste de pages contenant le (ou les) mots clés de la requête. Mais il y en a des dizaines de milliers ! Aussi l'ordre alphabétique n'apparaît pas le meilleur pour assurer un service rapide et de qualité. Les pages référencées pour le client doivent donner une idée aussi juste que possible de l'information disponible au moment de la requête et faire apparaître en premières citations celles qui y répondent le mieux, les plus *pertinentes*.

Le web n'est pas une simple bibliothèque de pages web. Les pages web comportent des *liens* qui permettent d'accéder directement de l'une à d'autres. On peut donc considérer le web comme un graphe orienté, dont chaque page web est un sommet et chaque lien est un arc. L'idée pour déterminer la pertinence d'une page en lien avec un mot clé va être de s'appuyer sur l'existence de ces liens, en partant de l'idée basique que plus une page est citée, plus elle est *pertinente*.

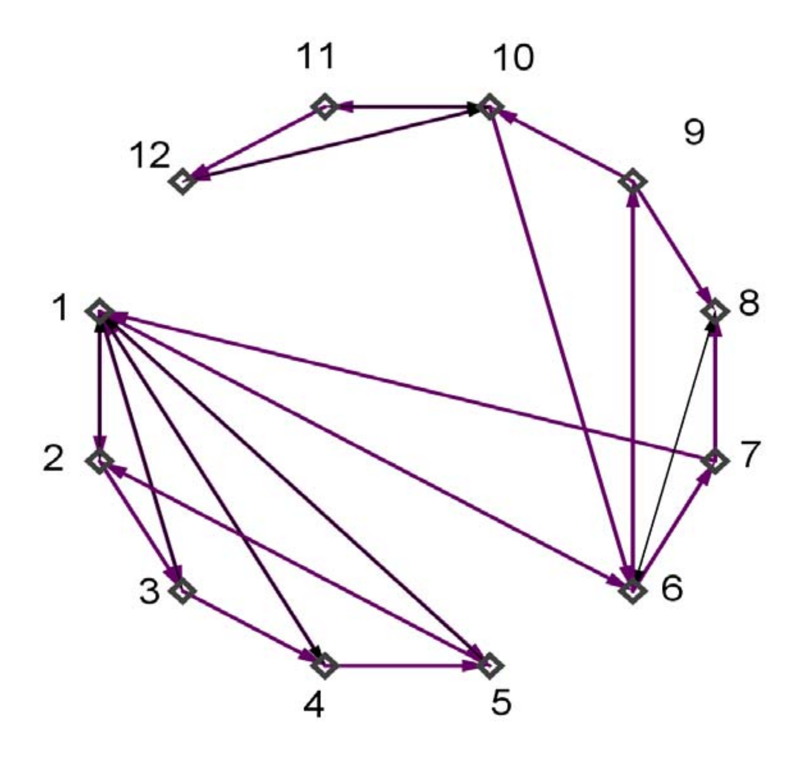
Dans la suite, les pages web sont numérotées 1, 2, …, i, …, n et un lien de la page i vers la page j est noté $i \to j$.

Ainsi on cherche à attribuer à chacune des pages une mesure de pertinence (un nombre réel ≥ 0).

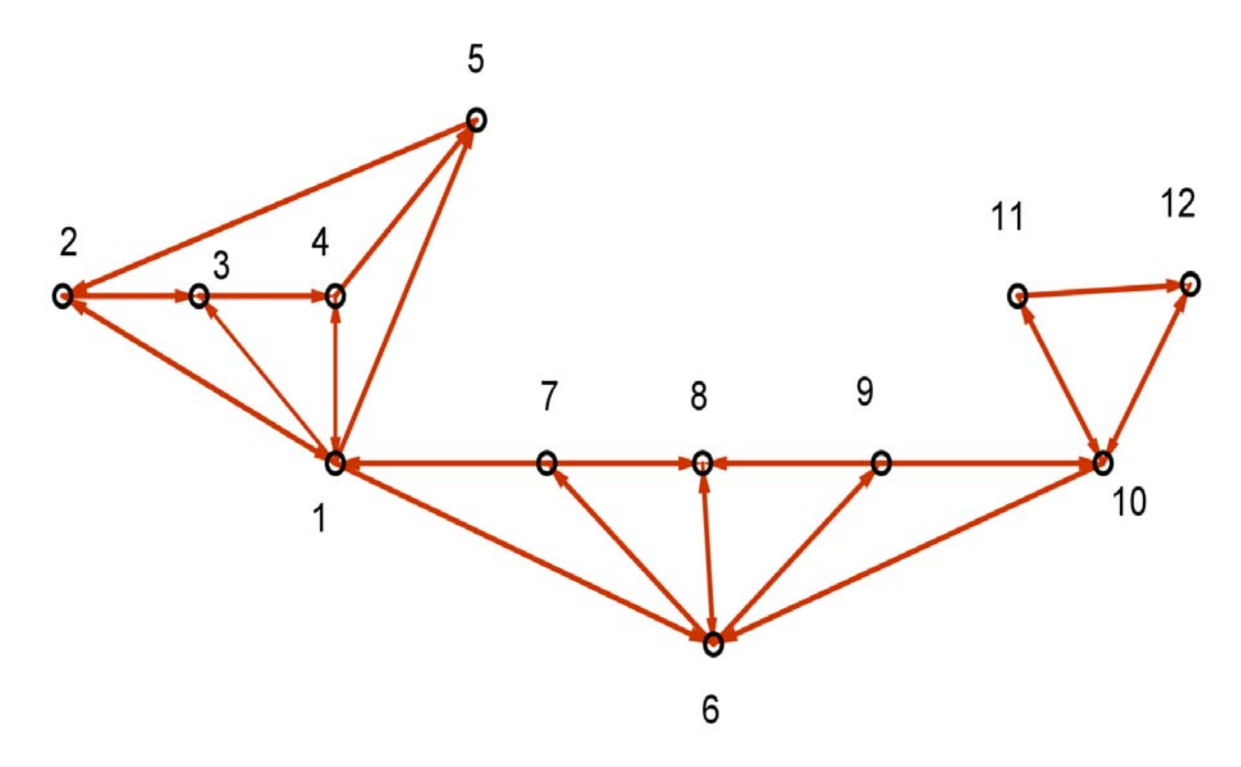
[1] Ce paragraphe est largement inspiré d'un texte de Mickael Eisermann, disponible à l'adresse suivante : www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/enseignement

2. Un exemple

Pour la suite, nous allons considérer un exemple excessivement simple avec seulement 12 pages web et les liens suivants :



Le graphe ci-dessus, qui ne comporte pourtant que 12 sommets, n'est pas très lisible. Les sommets les plus « fréquentés » n'y sont pas facilement identifiables.



Une nouvelle représentation de ce graphe, plus « buissonnante » à défaut d'être arborescente, met mieux en évidence l'importance des sommets 1, 6 et 10, vers lesquels « pointent » un nombre élevé d'autres sommets.

3. Mesurer la pertinence

Dans ce qui suit, on note μ_j la mesure de pertinence de la page j, pour tout entier j compris entre 1 et n, nombre de pages web disponibles à l'instant considéré, en rapport avec la requête considérée.

- Comptage naturel des liens

A chaque page j, on associe le nombre de liens $i \to j$ qui pointent vers elle.

Dans notre exemple, les pages 6 et 10 reçoivent chacune 3 liens, tandis que la page 7 en reçoit 1. On obtient donc : $\mu_6 = 3$, $\mu_{10} = 3$ et $\mu_7 = 1$.

Mais ce comptage n'est pas suffisamment discriminant et il est de plus très facile à manipuler, puisqu'il suffit de créer des « fausses » pages pointant vers la page i pour en augmenter l'importance.

- Comptage pondéré

On peut tenter de pondérer les liens : certaines pages émettent beaucoup de liens ce qui d'une certaine façon diminue leur poids.

Notons, pour chaque entier i, λ_i le nombre de liens émis par la page i.

On peut alors définir la mesure de pertinence de la page j en comptant le nombre de liens pondérés qui pointent vers elle :

$$\mu_j = \sum_{i \to j} \frac{1}{\lambda_i}$$

Dans notre exemple, $\mu_6 = 1{,}53$, $\mu_{10} = 2$ et $\mu_7 = 0{,}333$

Mais cette mesure présente toujours le même risque d'être manipulée.

- Comptage récursif

La pertinence d'une page est renforcée par la pertinence des pages qui pointent vers elle et elle est diminuée par la dispersion éventuelle des liens issus de ces dernières.

En reprenant la pondération précédente, on peut définir la pertinence d'une page j de la façon suivante :

$$\mu_j = \sum_{i \to j} \frac{1}{\lambda_i} \mu_i \quad (*)$$

Le risque de manipulation consistant en l'ajout de pages vides de sens est ici annulé puisqu'une telle page recevrait une mesure de pertinence nulle.

Avec le graphe présenté dans le paragraphe précédent, on obtient par exemple :

$$\mu_7 = \frac{1}{3}\mu_6 \,,\ \mu_{12} = \frac{1}{2}\mu_{11} + \frac{1}{3}\mu_{10} \text{, etc.}$$

On obtient ainsi un système d'équations linéaires.
On réécrit les formules (*) pour tout entier i compris entre 1 et n avec des coefficients notés $a_{i\,j}$, le coefficient $a_{i\,j}$ valant $\frac{1}{\lambda_i}$ si la page i pointe vers la page j, 0 sinon. On obtient ainsi le système linéaire de n équations à n inconnues (les μ_i). :

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j}\mu_i \quad 1 \le j \le \mathrm{n}$$

Les coefficients $a_{i\,j}$ définissent une matrice à n lignes et n colonnes (de format (n, n)), que l'on peut noter A.

Le système linéaire de n équations précédent correspond à l'équation matricielle suivante :

$$W = WA,$$

où W est une matrice ligne à n colonnes (format (1, n), dont les coefficients sont les μ_j :

$$W = (\ \mu_1\ \ \mu_2\ \dots\ \mu_n\ )$$

« Il n'y a plus qu'à » résoudre ce système, sauf que dans le cas du web il y a des milliards d'inconnues. Dans notre exemple, on obtient une matrice de format (12,12).

4. Pertinence et probabilités

Dans le système d'équations ($\mu_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j}\mu_i \quad 1 \leq j \leq \mathrm{n}$) précédent, on peut remarquer la propriété suivante des coefficients $a_{i\,j}$:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} a_{i\,j} = 1$$

En fait, pour un indice i fixé (c'est-à-dire dans la ligne i de la matrice) tous les coefficients non nuls sont égaux à l'inverse du nombre de liens émis par la page i, ce nombre correspondant également de ce fait à l'inverse du nombre de coefficients non nuls de la ligne i.

Les coefficients $a_{i\,j}$ (tous positifs ou nuls) peuvent donc s'interpréter comme la probabilité, pour un « surfeur » qui se trouverait à la page i de suivre le lien qui l'amènerait à la page j. Cette probabilité est définie de la manière suivante : si λ_i liens sont issus de la page i, la probabilité pour que le surfeur aléatoire du web passe de la page i à une des pages vers lesquelles elle pointe est $\frac{1}{\lambda_i}$, la probabilité pour qu'il se dirige vers une autre est 0.

Notons X_p la variable aléatoire indiquant la position (numéro de page) du surfeur aléatoire après p clics. On a :

$$P(X_{p+1} = j) = \sum_{i=1}^{n} P_{[X_p = i]}(X_{p+1} = j) \cdot P(X_p = i) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} P(X_p = i)$$

En notant U_p la matrice ligne à n colonnes admettant $P(X_p = i)$ pour coefficient à la colonne i pour tout entier i compris entre 1 et n, les relations précédentes peuvent se traduire par la relation matricielle suivante :

$$U_{p+1} = U_p A$$

On en déduit par récurrence que, pour tout entier p strictement positif, $U_p = U_0 A^p$, avec U_0 donnant la position du surfeur aléatoire au départ (U_0 est donc une matrice ligne à n éléments tous nuls sauf un qui vaut 1 et dont l'indice correspond au numéro de la page de départ).

Toutefois, il peut arriver que certaines pages ne comportent aucun lien vers d'autres pages ; dans ce cas, lorsque le surfeur aléatoire arrive sur l'une d'entre elles, il lui est impossible de la quitter. La ligne de la matrice correspondant à cette page ne comporte alors que des 0. Afin de remédier à ce défaut et sans doute coller mieux à la réalité, on introduit la possibilité de quitter à tout instant une page quelconque pour se diriger vers une autre choisie au hasard, et ce avec une probabilité égale à c.

Dans ces conditions, le modèle correspond au système de relations suivant pour tout entier p strictement positif et tout entier i compris entre 1 et n (puisque $\sum_{j=1}^{n} P(X_p = j) = 1$) :

$$P(X_{p+1} = j) = \frac{c}{n} + (1-c) \sum_{i=1}^{n} P_{[X_p = i]}(X_{p+1} = j) \cdot P(X_p = i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c}{n} + (1-c) a_{i\,j} \right) \cdot P(X_p = i)$$

qui se traduit par la relation matricielle suivante (pour tout entier $p > 0$) : $U_{p+1} = U_p \left[\frac{c}{n} J + (1-c) A \right]$

où J désigne la matrice carrée de format (n, n) dont tous les coefficients sont égaux à 1. Notons $B = \frac{c}{n}J + (1-c)A$.

On a alors, pour tout entier p strictement positif, $U_p = U_0B^p$.

Il resterait à prouver que la suite de matrice (B^p) converge (dans un sens à préciser) lorsque l'entier p tend vers l'infini et expliquer comment récupérer les mesures de pertinence $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

La relation de récurrence précédente peut également se traduire par la relation de récurrence matricielle suivante :

$$U_{p+1} = (1 - c)U_pA + L$$

où L désigne la matrice ligne définie par : $L = \frac{c}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}$.

Le paragraphe **5.** donne des indications sur l'étude d'une telle suite matricielle.

Remarque :

La matrice transposée d'une matrice M est la matrice $\widetilde{M}$ dont les colonnes sont égales aux lignes de la matrice M.

Par exemple, si $M = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ alors $\widetilde{M} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ et si $L = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ alors $\widetilde{L} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

On peut également vérifier que, pour tout couple (A, B) de matrices « multipliables », on a :

$$\widetilde{AB} = \widetilde{B}\,\widetilde{A}.$$

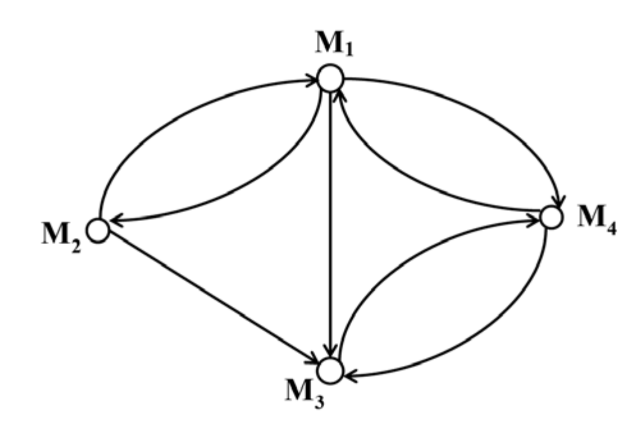
La relation matricielle $U_{p+1} = (1 - c)U_pA + L$ est équivalente à la relation matricielle obtenue en passant aux matrices transposées :

$$U_{p+1} = (1 - c)U_pA + L \Leftrightarrow \widetilde{U}_{p+1} = (1-\mathrm{c})\widetilde{A}\,\widetilde{U}_p + \widetilde{L}$$

où $\left(\widetilde{U}_p\right)$ est une suite de matrices colonnes et $\widetilde{L}$ une matrice colonne également, de même format.

Il n'est pas question de traiter ici le cas général. Nous allons nous contenter d'observer ce qui se passe sur un exemple élémentaire.

Dans l'exemple ci-dessous, le graphe représente les liens existant entre quatre pages web numérotées de 1 à 4 (M_1, M_2, M_3, M_4) :



La matrice A associée à ce graphe, telle que définie dans le paragraphe précédent, est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

On observe ici que la matrice n'est pas symétrique contrairement à la matrice d'adjacence définie dans la partie *d.* Cela tient au fait qu'ici le graphe est orienté.

On peut montrer que les puissances de la matrice A ont pour limite la matrice L ci-dessous. On a alors, quelle que soit la situation initiale U_0, $U_0 L = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$

En conséquence, on attribue aux pages 1, 2, 3, 4 les indices de pertinence respectifs $\frac{3}{13}, \frac{1}{13}, \frac{4}{13}$ et $\frac{5}{13}$.

$$L = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

Dans le deuxième modèle, avec $c = 1 / 5$, on obtient la matrice :

$$B = \frac{1}{20} J + \frac{4}{5} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{19}{60} & \frac{19}{60} & \frac{19}{60} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{17}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

On démontre que les puissances de la matrice B conduisent à une matrice limite et à des indices de pertinence qui sont $\frac{135}{572}, \frac{323}{2860}, \frac{171}{572}$ et $\frac{1007}{2860}$, à comparer aux indices trouvés précédemment.

Page	1	2	3	4
Sans saut aléatoire	0,23	0,08	0,31	0,38
Avec saut aléatoire	0,24	0,11	0,3	0,35

Ressource : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/pertinence/pertinence.jsp

5. Indications pour l'étude de la suite matricielle (U_p)

On commence par chercher un « point fixe » c'est-à-dire une matrice ligne H vérifiant la relation matricielle $H = (1 - c)HA + L$, c'est-à-dire $H = (I_n - (1 - c)A)^{-1}L$ si la matrice inverse existe.

On peut montrer (et nous l'admettons) que la matrice $(I_n - (1 - c)A)$ est toujours le cas ici car la matrice A est une matrice à coefficients positifs ou nuls tels que la somme des coefficients d'une quelconque de ses lignes vaut 1 (appelée matrice stochastique).

On pose $V_p = U_p - H$ et on obtient la relation $V_{p+1} = (1 - c)V_pA$ puis par récurrence la relation explicite $V_p = (1 - c)^p V_0 \cdot A^p$ ce qui donne $U_p = (1 - c)^p(U_0 + H) \cdot A^p + H$.

Indications pour prouver la convergence de la suite

On peut démontrer que le produit de deux matrices stochastiques l'est également et donc la matrice A^p l'est aussi.

On peut le démontrer à la main sur des matrices carrées d'ordre 2. Dans le cas général, on commence par remarquer que, pour toute matrice B à coefficients positifs, on a :

B stochastique $\Leftrightarrow BX = X$ où X est la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.

Donc si B et C sont des matrices stochastiques alors on a $(BC)X = B(CX) = BX = X$ ce qui prouve que BC est une matrice stochastique.

La matrice A^p est donc une matrice stochastique ce qui implique que tous ses coefficients sont entre 0 et 1 et donc que tous les coefficients de la matrice $(1 - c)^p A^p$ tendent vers 0.

La relation $V_p = (1 - c)^p V_0 \cdot A^p$ prouve que tous les coefficients de la matrice ligne V_p s'expriment comme une combinaison linéaire (à coefficients constants) des coefficients de la matrice $(1 - c)^p V_0 \cdot A^p$ donc ont tous pour limite 0. On en déduit, de façon intuitive et naturelle, que la suite matricielle (V_p) a pour limite la matrice colonne nulle et que la suite (U_p) a donc pour limite H, la notion de convergence restant intuitive.

G. Traitement de l'image

1. Numériser des images… imager les nombres



On a extrait l'image ci-contre d'une photographie d'Alan Turing disputant une course de 3 miles en 1946. Cette photographie a été reproduite sur un site web consacré à l'un des « inventeurs » de l'informatique dont l'adresse est donnée ci-dessous. Elle a donc été « numérisée », c'est-à-dire transformée en une suite de 0 et de 1. Le rectangle est décomposé en un certain nombre de petits carrés, et à chacun de ces carrés a été attribué un nombre qui représente une nuance de gris. La finesse de la décomposition (le nombre de carrés) est la *définition* de l'image. La définition de cette image particulière n'est pas bonne : on devine les *pixels* (mot fabriqué avec les débuts des mots anglais *picture element*).

Toute image n'utilisant que le noir et le blanc peut ainsi être représentée par un tableau contenant autant de cases que l'image contient de pixels, chacune de ces cases étant occupée par 0 ou 1. L'image est donc représentée par une matrice dont tous les éléments sont 0 ou 1.

L'adresse du site consacré à Turing est : http://www.turing.org.uk/turing/scrapbook/run.html

2. Opérations sur les images

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On transforme la matrice A associée à l'image de gauche en remplaçant 1 par 0 et 0 par 1, on obtient la matrice B, associée à l'image de droite, qui est le négatif de l'image de gauche.

On peut également coder des images en nuances de gris en attribuant à chaque pixel un nombre compris entre 0 et 1, proche de 1 si la case est gris foncé, proche de 0 si elle est gris clair. On peut également définir l'image négatif de l'image de départ en lui associant la matrice dont les éléments sont les compléments à 1 des éléments de la matrice de départ.



Les deux images ci-dessus sont le négatif l'une de l'autre. D'autres critères peuvent être enregistrés dans les éléments de la matrice associée à une image, la luminosité par exemple. Une multiplication de tous les éléments de la matrice représentant la luminosité par un même facteur modifie la luminosité de l'ensemble.

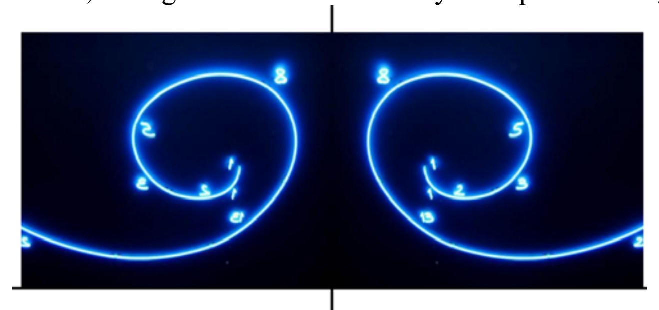
Si deux images ont le même format et la même définition (associées aux matrices A et B), il est possible de leur faire correspondre leur *somme*, associée à la somme des matrices qui les définissent, en convenant qu'un coefficient supérieur à 1 donne un pixel de couleur noire. On peut aussi leur faire correspondre leur *différence*, avec cette fois la convention que tout pixel associé à un nombre négatif est blanc, ou restituer l'image positive $|A - B|$ en particulier pour différentier les images et faire apparaître la trame des contours, horizontaux, verticaux, obliques.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image1.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image2.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image4.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image6.jsp,

Le logiciel Scilab peut également permettre des opérations sur les images, en lien avec les matrices. L'annexe 1 fournit quelques compléments à ce propos.

3. Comment modifier la forme d'une image ?

On se propose de transformer l'image de droite en sa symétrique par rapport à l'axe vertical, l'image de gauche. Pour cela, il suffit de représenter le symétrique de tout pixel de l'image de droite. Chaque pixel étant d'une seule couleur, l'image obtenue est bien la symétrique de l'image de départ.



Des photos de la spirale de Fibonacci dans le métro de Naples se trouvent à l'adresse suivante : www.danpiz.net/napoli/trasporti/StazioneVanvitelli.htm, page d'un site touristique sur Naples.

4. <u>Des matrices pour réaliser des transformations</u>

À tout point du plan, de coordonnées (x, y) données dans un repère (que nous choisirons orthonormal pour que l'action sur les figures soit mieux visible), on peut associer un autre point, de coordonnées (x', y') définies par l'action d'une matrice carrée $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ce qui s'écrit :

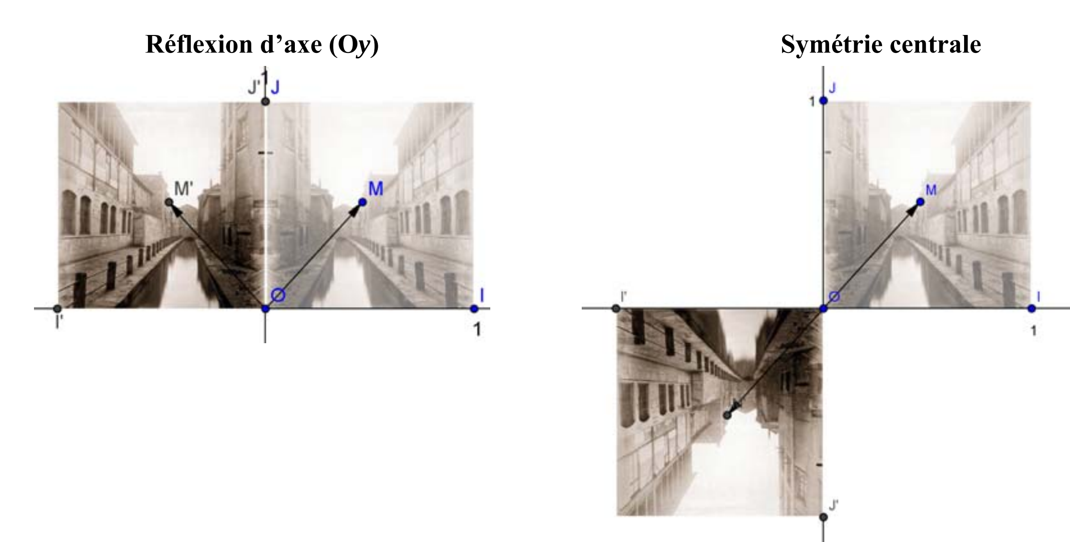
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ ou encore } \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}.$$

Si, par exemple, $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 0$, les coordonnées x et y d'un point quelconque sont transformées en $-x$ et y, qui sont les coordonnées de son symétrique par rapport à l'axe vertical.

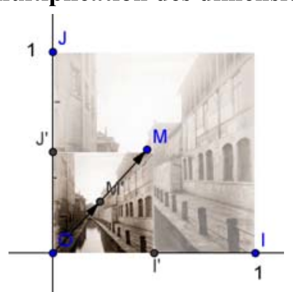
Les images suivantes fournissent sur une vue de la Bièvre aux Gobelins extraite d'une carte postale d'époque, des exemples d'actions d'une matrice sur une image.

Exercice : Trouver les coefficients correspondants.

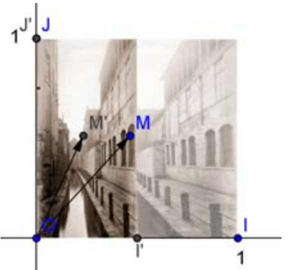
Réflexion d'axe (O*y*) **Symétrie centrale**



Réduction (multiplication des dimensions par 0,5)



Affinité orthogonale de base l'axe (O*y*) de rapport 0,5



II. Définitions et premiers calculs avec des matrices

Dans cette partie, le vocabulaire spécifique aux matrices, les opérations sur les matrices et quelques résultats théoriques sont présentés après une introduction « intuitive » des notions dans le cadre de la résolution de problèmes comme dans les exemples proposés dans la première partie. Dans la partie III, d'autres problèmes seront résolus et on s'autorisera alors l'utilisation des matrices et la référence directe aux résultats théoriques énoncés dans la partie II.

A. Matrices. Opérations

1. Quelques définitions, quelques notations

Deux entiers naturels m et n étant donnés non nuls, on appelle matrice de format (m, n) tout tableau rectangulaire de $m \times n$ éléments, disposés sur m lignes et n colonnes. Dans les situations abordées ici, les éléments en question sont des nombres réels.

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ peut aussi être notée $A = \left(a_{i\,j}\right)$, la notation $a_{i\,j}$ désigne le coefficient (l'élément, le terme) situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. C'est le *coefficient générique* de la matrice A.

Lorsque $m = n$, on dit que la matrice est *carrée* (carrée d'ordre n si nécessaire). Les éléments $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{n-1,n-1}, a_{nn}$ sont les éléments de la *diagonale principale* de la matrice.

La ***matrice identité d'ordre n*** est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de ceux situés sur la diagonale principale qui sont égaux à 1. Elle est **souvent notée I_n**.

L'égalité ne peut intervenir qu'entre deux matrices A et B de même format : elle signifie que, pour tout indice i et pour tout indice j, $a_{i\,j} = b_{i\,j}$. Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est dite *matrice nulle* (mais deux matrices nulles qui n'ont pas le même format ne sont pas égales).

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/coefficient1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/baseeuler/recherche_fiche.jsp?theme=4

2. Addition, produit par un scalaire

On peut faire la somme de deux tableaux de nombres ayant même nombre de lignes et de colonnes en procédant par addition place par place. C'est ce procédé qui est retenu pour définir l'addition de matrices de même format. Dire que les matrices A, B et C, de format (m, n), sont telles que $C = A + B$, c'est dire que :
pour tout entier i compris entre 1 et m, pour tout entier j compris entre 1 et n, $c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j}$.

On peut de même multiplier tous les éléments d'un tableau de nombres par un même nombre (pour appliquer une taxe, par exemple). C'est ce procédé qui est utilisé pour multiplier une matrice A par un *scalaire* λ (un nombre réel). On note λA la matrice obtenue. On a donc (avec une simplification de la notation) : $\lambda A = (\lambda a_{i\,j})$.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/somme1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit4.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/pdf/somme1.jsp

http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/somme2.jsp

3. Produits de matrices

Dans la partie I, nous avons rencontré :

- des produits de matrices de format (m, n) par des matrices colonnes de format (n, 1) tel :

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 29,2 \\ 30,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1,1 & 4,7 & 1,8 & 3,1 & 3,8 \\ 0,9 & 5,1 & 1,9 & 3,2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

- des produits de matrices lignes de format (1, m) par des matrices de format (m, n) tel :

$$\begin{pmatrix} 10,7 & 2,4 & 6 & 3,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,33 & 0,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- et des produits de matrices carrées par elles-mêmes, illustré par le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, soit A une matrice de format (m, n) et B une matrice de format (n, p). Le produit de A par B est la matrice C de format (m, p), notée AB, dont, pour tout i compris entre 1 et m et pour tout j compris entre 1 et p, l'élément c_{ij} est la somme des produits terme à terme des éléments de la i-ième ligne de A par les éléments de la j-ième colonne de B : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Par exemple le produit d'une matrice de format $(2, 3)$ par une matrice de format $(3, 4)$ donne une matrice de format $(2, 4)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

L'utilisation du logiciel Scilab, qui dit si oui ou non la multiplication est possible, peut être extrêmement intéressante.

Il peut également être riche d'enseignements de différencier les produits de Hadamard (produit termes à termes de deux matrices) et produit de Cayley précédemment défini, ce que permet aussi le logiciel Scilab

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/pdf/produit3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/pdf/produit2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit5.jsp

4. Propriétés du produit des matrices carrées d'ordre n

Nous nous intéressons à présent au produit des matrices carrées d'ordre n. Ce produit *n'est pas commutatif*, ce qui signifie que, dans le cas $n = 2$ par exemple, il existe des couples de matrices (A, B) tels que $AB \neq BA$. Voici un exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Certaines matrices ne sont pas inversibles pour ce produit. On a, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}.$$

On observe sur cet exemple que le produit de deux matrices distinctes par une même matrice donne deux matrices identiques.

En revanche les propriétés d'*associativité* (effectuer BC puis multiplier à gauche par A revient au même qu'effectuer AB puis multiplier à droite par C) et de *distributivité par rapport à l'addition* (le produit de A par la somme de B et C est la somme des produits de A par B et de A par C) font de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 un cadre assez confortable pour les calculs.

Enfin on peut vérifier que, pour toute matrice A carrée d'ordre n, $AI_n = I_nA = A$.

B. Les matrices sont-elles inversibles ?

Nous avons vu que le produit des matrices carrées d'ordre 2 n'est pas commutatif. Le problème de la recherche d'un inverse pour une matrice donnée M s'exprime donc de la manière suivante : existe-t-il une matrice N telle que : $N \times M = M \times N = I_2$?

Nous avons vu que les matrices ne sont pas toujours inversibles : en effet, il existe des matrices A, B et C telle que $A \times B = A \times C$, bien que B soit distincte de C. Ce résultat met en évidence la non inversibilité de la matrice A (sinon on pourrait multiplier par l'inverse de A et obtenir $B = C$). En vertu de la *distributivité* évoquée plus haut, il vient $A \times (B - C) = O_2$ (O_2 matrice nulle d'ordre 2) ; il y a donc des *diviseurs de O* dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

Condition pour qu'une matrice carrée d'ordre 2 soit inversible

On se donne une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et on cherche s'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $A \times B = B \times A = I_2$.

La première égalité s'écrit : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}z & a_{11}y + a_{12}t \\ a_{21}x + a_{22}z & a_{21}y + a_{22}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient deux systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_{11}y + a_{12}t = 1 \\ a_{21}y + a_{22}t = 0 \end{cases}.$$

Les seconds membres des équations de chacun de ces deux systèmes nous indiquent que la condition nécessaire pour qu'ils admettent des solutions (et en l'occurrence, ce sera un couple de solutions unique) s'écrit : $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ (D)

La quantité $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ est appelée *déterminant* de la matrice A. On vérifie que si le déterminant est non nul et si on pose $= \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{pmatrix}$, les produits AB et BA sont tous les deux égaux à I_2. La condition (D) est donc une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité.

La matrice B est appelée matrice inverse de la matrice A et on la note A^{-1}.

C. Puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3

Les problèmes rencontrés dans la première partie nous ont amenés à calculer des puissances de matrices. On peut faire les calculs avec une calculatrice pour des matrices de petite taille et des puissances raisonnables, on peut faire les calculs à l'aide d'un logiciel pour des puissances explicites, à l'aide d'un logiciel de calcul formel pour obtenir, dans les bons cas, des formules « closes », donnant l'expression des coefficients en fonction de l'exposant, mais il est plus difficile d'obtenir, dans le cas général, ce que nous avons appelé des *limites*.

1. Quelques matrices particulières

a) Les matrices triangulaires

Les matrices triangulaires ont des puissances triangulaires.

Considérons par exemple la matrice $T = \begin{pmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Une telle matrice est dite triangulaire supérieure, car ses coefficients situés sous la diagonale principale sont nuls.

On obtient : $T^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ad+bd & af+de+cf \\ 0 & b^2 & be+ec \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$. On pourrait poursuivre par une démonstration par récurrence pour prouver que, pour tout entier p strictement positif, T^p est une matrice triangulaire supérieure.

Les matrices *strictement triangulaires* comme $U = \begin{pmatrix} 0 & d & f \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont leurs puissances nulles à compter de la troisième au plus. En effet : $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ed \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U^3 = O_3$. Les matrices dont les puissances

sont nulles à partir de l'une d'entre elles sont dites *nilpotentes.*
Une application des matrices triangulaires est présentée au II. F.

b) Les matrices diagonales

Les matrices diagonales (dont tous les coefficients non situés sur la diagonale principale sont nuls) ont des puissances diagonales dont les coefficients sont les puissances des coefficients initiaux.

c) Les matrices « creuses »

D'une façon générale, les matrices « **creuses** », celles dont beaucoup de coefficients sont nuls, sont recherchées, car cette particularité permet de gagner du temps de calcul machine. Ce gain de temps est aussi dû à la possibilité de réaliser des produits de matrices « par blocs ».

Considérons les matrices $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 8 & -4 \\ 11 & 0 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 7 & 2 & -8 \end{array}\right)$ et $B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 2 & 11 \\ 1 & -5 & 7 & 2 \end{array}\right)$. Les lignes horizontales ou verticales tracées font apparaître des matrices :

$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$.

Par exemple, $A_{11}=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$, $B_{22}=\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$. Les produits envisagés ayant tous un sens (il y a compatibilité entre les tailles des matrices à multiplier à chaque étape), on souhaite écrire que :

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Et, constatant que les sommes de produits de matrices sont elles aussi réalisables :

$$AB=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 32 \\ 11 & 57 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -19 & 6 \\ 88 & 33 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -12 & 80 \\ -10 & -55 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -1 & -21 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & -33 \\ -8 & 48 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ -43 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 69 & 51 \\ -55 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad AB=\begin{pmatrix} -2 & 52 & -31 & 86 \\ 11 & 57 & 78 & -22 \\ 9 & -41 & 49 & 51 \\ -9 & 27 & -95 & 3 \end{pmatrix}$$

Beaucoup de systèmes de calcul numérique travaillent, en interne, sur des listes ordonnées ou sur des tableaux. Si ces tableaux contiennent beaucoup de 0, les calculs seront plus faciles et sans doute plus justes, mais pas forcément moins longs si on n'a pas pris en compte l'abondance de ces 0.

Dans les situations de problèmes « à compartiments », par exemple, il est fréquent qu'à partir d'un état on ne puisse passer qu'à un état voisin, ce qui se traduit par une matrice de transition contenant beaucoup de 0.

Mais il y a naturellement des situations, très nombreuses, dans lesquelles les premières puissances d'une matrice ne laissent pas conjecturer la forme de sa puissance n-ième. On peut alors avoir recours à la diagonalisation, évoquée dans le paragraphe qui suit.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/puissance2.jsp

2. Diagonalisation éventuelle d'une matrice carrée d'ordre 2

Les **matrices** considérées dans ce paragraphe sont toutes **à coefficients réels**.

Nous adoptons la définition suivante :

on dit **qu'une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice carrée P inversible et des réels α et β tels que** $\boldsymbol{P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1}}$ **.**

Compte-tenu de ce qui a été dit sur les matrices diagonales, on voit que, si la matrice A peut s'écrire :

$$A = P \times D \times P^{-1},$$

où D est diagonale, alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1},$$

ce qui facilite considérablement les calculs.

Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit diagonalisable. Notons $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible réalisant l'égalité $A = P \times D \times P^{-1}$.

L'égalité $A = P \times D \times P^{-1}$ est équivalente à l'égalité $A \times P = P \times D$ qui donne :

$$A \times P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a + a_{12}c & a_{11}b + a_{12}d \\ a_{21}a + a_{22}c & a_{21}b + a_{22}d \end{pmatrix} = P \times D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & b\beta \\ c\alpha & d\beta \end{pmatrix}$$

Considérons les matrices colonnes $V = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

On observe que l'égalité $A \times P = P \times D$ est équivalente au système suivant : $\begin{cases} AV = \alpha V \\ AW = \beta W \end{cases}$.

Par ailleurs, on a vu précédemment que la matrice P est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ ce qui équivaut à dire que les vecteurs (a, c) et (b, d) ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire que les matrices colonnes V et W ne sont pas proportionnelles.

Remarque :

On observe que si les matrices colonnes V et W ne sont pas proportionnelles, alors nécessairement elles sont toutes deux non nulles.

En conclusion, on peut énoncer la condition nécessaire et suffisante suivante :

Une matrice carrée A d'ordre 2 (à coefficients réels) est diagonalisable si et seulement s'il existe deux réels α et β (non nécessairement distincts) et deux matrices colonnes à coefficients réels non proportionnelles V et W telles que $AV = \alpha V$ et $AW = \beta W$.

Les réels α et β (s'ils existent) s'appellent les valeurs propres de la matrice A.

Remarque :

Les matrices carrées d'ordre 2 ne sont pas toutes diagonalisables.

En effet, si on écrit la matrice A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dire que le produit de la matrice A par la matrice colonne V non nulle est proportionnel à V, c'est dire qu'il existe un réel λ et un couple de réels non tous les deux nuls (v_1, v_2) tels que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Cette dernière condition traduit aussi l'existence de réels λ, v_1 et v_2 tels que :

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)v_1 + a_{12}v_2 = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22}-\lambda)v_2 = 0\end{cases}.$$

Si le déterminant du système d'équations linéaires en v_1 et v_2 écrit ci-dessus n'est pas nul, alors il n'a que le couple nul comme solution, ce qui ne satisfait pas l'hypothèse.

L'hypothèse exige donc que ce déterminant soit nul, c'est-à-dire que :

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

L'existence des matrices colonnes V et W exige donc que l'équation du second degré en λ ci-dessus admette des solutions réelles, ce qui n'est pas toujours le cas, c'est pourquoi on peut dire que **les matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels ne sont pas toutes diagonalisables.**

Considérons par exemple la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour elle, l'équation en λ s'écrit $\lambda^2 + 1 = 0$, qui n'admet pas de solutions réelles. Donc la matrice J n'est pas diagonalisable.

On pourrait également vérifier que la matrice $H = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ pour laquelle l'équation en λ s'écrit $\lambda^2 = 0$ n'est pas non plus diagonalisable, mettant ainsi en évidence le fait que l'existence de solutions de cette « équation en λ » est une condition nécessaire non suffisante de diagonalisabilité.

D. Traitement matriciel des suites de Fibonacci

On s'intéresse dans ce paragraphe à la suite de Fibonacci, définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1, \text{ et, pour tout entier } n : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n .$$

1. Recherche d'une formule « close » pour le terme général



Spirale de Fibonacci dans le métro de Naples

On peut écrire, avec des notations à présent mieux maîtrisées :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

La matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ peut être écrite comme le produit PDP^{-1}, où :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Un raisonnement par récurrence donne, pour tout n : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$,

ou encore :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Tous calculs faits, pour tout n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Certains pourraient trouver ce résultat étonnant, remarquant que, du fait de la définition, tous les termes de la suite sont entiers. Pour se convaincre que la formule ci-dessus donne bien des entiers, il suffit de comparer les termes d'ordre pair et les termes d'ordre impair des puissances à développer.

2. Trouve-t-on toujours une combinaison linéaire de suites géométriques ?

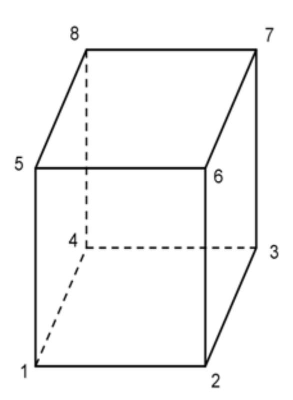
Nous avons écrit le terme général de la suite de Fibonacci de premiers termes 1 et 1 comme une combinaison linéaire des termes de deux suites géométriques.

Les calculs précédents sont adaptables à toute suite u dont les deux premiers termes sont donnés, et telle qu'il existe deux réels a et b pour lesquels pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, pourvu que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ associée soit diagonalisable.

E. Retour sur les marches aléatoires

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons de nouveau à des marches aléatoires, dans le but de montrer qu'on peut, dans certains cas, découvrir des formules de récurrence pour déterminer les puissances n-ièmes de matrices de forme particulière.

Marche aléatoire sur un cube



Dans la marche aléatoire aux sommets d'un cube, le personnage peut passer à chaque étape d'un sommet à un des trois sommets voisins. Nous supposons qu'il y a équiprobabilité dans les passages d'un sommet à un autre. On associe à cette situation la matrice de transition suivante dans laquelle le coefficient situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est la probabilité qu'un mouvement partant du sommet i s'achève au sommet j.

Cette matrice est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les particularités de cette matrice (elle est *symétrique*, c'est-à-dire symétrique par rapport à la diagonale principale, elle est décomposable en quatre blocs dont deux sont la matrice identité d'ordre 4) permettent de trouver intuitivement la forme de sa puissance n-ième.

On peut prouver par récurrence l'existence de quatre suites (u_n), (v_n), (w_n), (x_n), dont les termes sont les coefficients de la matrice M^n de la forme suivante :

$M^n = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$, où A, B, C et D sont les quatre matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ v_n & u_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} w_n & v_n \\ v_n & w_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} v_n & w_n \\ w_n & v_n \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} x_n & w_n \\ w_n & x_n \end{pmatrix}$$

Après calculs, on obtient :

$$u_n = \frac{1+(-1)^n}{8} \times \frac{3^n+3}{3^n} \qquad w_n = \frac{1+(-1)^n}{8} \times \frac{3^n-1}{3^n}$$

$$v_n = \frac{1-(-1)^n}{8} \times \frac{1+3^n}{3^n} \quad \text{et} \quad x_n = \frac{1-(-1)^n}{8} \times \frac{3^n-3}{3^n}$$

III. L'outil matrices à l'œuvre : compléments et exemples

Dans cette partie, nous serons amenés à utiliser des propriétés des matrices, ou des représentations matricielles de situations sans revenir sur ce qui a été développé dans la partie II. Tous les résultats ne sont pas établis, et ce point n'est pas nécessairement précisé chaque fois. Certaines des applications proposées devraient motiver les élèves et, espérons-le, susciter des vocations : aider les élèves à affirmer leur choix d'études supérieures scientifiques longues est le but de l'enseignement de spécialité mathématiques.

A. Matrices en arithmétique

1. Cryptographie : le chiffrement de Hill

a) Introduction et principe

Dans les plus anciens systèmes de cryptographie, chaque lettre est remplacée par une autre lettre, toujours la même. Les premières améliorations consistèrent à remplacer une lettre donnée par une autre, choisie en fonction de la place de la lettre à coder dans le texte de départ (en utilisant un mot-clef, par exemple). Le système de Hill (Lester S. Hill, *Concerning certain linear transformation apparatus of cryptography*, in American mathematical monthly, vol 38, (1931), p135 – 154) transforme des chaînes de caractères de longueur donnée, chaque lettre étant alors transformée en fonction de sa valeur et de sa place dans la chaîne de caractères.

On se donne un entier naturel n supérieur ou égal à 2. Le texte à chiffrer est découpé en blocs successifs de n lettres. S'il y a un reste, on peut compléter arbitrairement le texte ou l'amputer du bloc incomplet. Les lettres de chaque bloc sont remplacées par des nombres (généralement A = 0, B = 1, C = 2, …, Z = 25), et à chaque bloc de lettres est associée une matrice colonne B_i à n lignes. On se donne une matrice carrée M d'ordre n, appelée *matrice de chiffrement*, connue de l'expéditeur et du destinataire du message, à coefficients entiers naturels. Le produit $C_i = MB_i$ est une matrice colonne qui peut à son tour être transformée en une suite de n lettres, chacun de ses éléments étant ramené à son reste *modulo* 26 puis transformé en la lettre correspondante de l'alphabet. Pour décoder, il faudra faire le chemin inverse (si toutefois la suite des deux opérations produit de la colonne par la matrice suivie de détermination du reste *modulo* 26 est « inversible »).

b) Exemple

Utilisons la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Soit à chiffrer le texte CODAGE DE HILL. Le découpage en blocs de deux lettres et leur transformation en matrices colonnes donne : $\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Les matrices colonnes obtenues par l'action de M sur les matrices colonnes précédentes sont :

$\begin{pmatrix} 74 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 54 \\ 53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 \\ 77 \end{pmatrix}$, qui, *modulo* 26, donnent : $\begin{pmatrix} 22 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Le texte crypté est donc WK GJ GI AZ CB ZZ. Nous verrons par la suite comment le décrypter.

Utilisons la matrice $N = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Soit à chiffrer le texte AMER. Les mêmes procédés donnent les matrices colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$, transformées en $\begin{pmatrix} 24 \\ 96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 148 \end{pmatrix}$, ou encore en $\begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}$, le texte

crypté est donc YS YS, ce qui pose un problème puisque deux groupes de deux lettres différents ont été cryptés de la même manière. On perçoit ici les difficultés que va soulever le décryptage…

c) Réversibilité du cryptage

Si les deux matrices colonnes, produits respectifs de deux matrices colonnes distinctes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont formées d'éléments ayant respectivement même reste modulo 26, on peut écrire :

$$\begin{cases} ax + by \equiv aX + bY \mod 26 \\ cx + dy \equiv cX + dY \mod 26 \end{cases},$$

On suppose par exemple que x et X sont distincts. Le système précédent conduit, en vertu des propriétés des congruences, à $(ad - bc)(x - X) \equiv 0 \mod 26$.

Cette relation exprime le fait que 26 est un diviseur de $(ad - bc)(x - X)$, or $(x - X)$ est en valeur absolue strictement inférieur à 26 et non nul. Les diviseurs premiers de 26 (2 et 13) ne peuvent donc tous deux diviser $(x - X)$. Il s'ensuit que $(ad - bc)$ et 26 ne sont pas premiers entre eux.

La condition « (ad- bd) est premier avec 26 » est donc une condition nécessaire pour que deux blocs de deux lettres différents soient cryptés différemment.

Nous admettons que cette condition est suffisante pour assurer le décryptage de tout message.

d) Exemple de décodage

La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est certes inversible, mais sa matrice inverse, telle qu'elle a été définie précédemment ne répond pas au problème posé, mais ses coefficients vont être une aide pour répondre au problème posé. En effet, on trouve :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Pour assurer le décryptage, on cherche une matrice N à coefficients entiers telle que les coefficients des matrices MN, NM et I_2 soient congrus modulo 26.

Le calcul précédent de M^{-1} fait apparaître que :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = 7\mathrm{I}_2.$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer l'inverse de 7 modulo 26, c'est-à-dire un entier u tel que $7u \equiv 1$ mod 26. Comme 7 et 26 sont premiers entre eux, il existe un unique entier u compris entre 0 et 25 et on trouve $u = 15$.

On a donc $15 \times 7 \equiv 1$ mod 26 ce qui se traduit par 15 est l'inverse de 7 modulo 26.

La matrice inverse modulo 26 de $M=\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 4\end{pmatrix}$ est donc la matrice $M'=15\begin{pmatrix}-4 & 5\\3 & -2\end{pmatrix}$. Cette matrice est égale à $\begin{pmatrix}18 & 23\\19 & 22\end{pmatrix}$ modulo 26.

Le texte crypté, scindé en blocs de deux lettres est WK GJ GI AZ CB ZZ.

Les rangs correspondants sont $\begin{pmatrix}22\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\25\end{pmatrix}$.

Le bloc décrypté est obtenu en multipliant M'par chacune des matrices colonnes précédentes et en retenant le résultat modulo 26, soit :

$$\begin{pmatrix}626\\638\end{pmatrix}\begin{pmatrix}315\\312\end{pmatrix}\begin{pmatrix}292\\290\end{pmatrix}\begin{pmatrix}575\\550\end{pmatrix}\begin{pmatrix}59\\60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1025\\1025\end{pmatrix}$$

ce qui donne, modulo 26

$$\begin{pmatrix}2\\14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$$

et qui permet de retrouver le texte initial CODAGEDEHILL.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/crypto/hill1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/inverse8.jsp

2. Approximation des nombres réels

a) Quelques rappels sur les fonctions homographiques

Nous nous intéressons aux fonctions homographiques à coefficients entiers définies sur $\mathbf{R}^+$, c'est-à-dire aux fonctions f définies sur $\mathbf{R}^+$ pour lesquelles il existe des entiers naturels a, b, c, et d tels que, pour tout réel positif x, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Parmi ces fonctions, certaines sont constantes (celles pour lesquelles $ad-bc=0$), certaines sont affines (celles pour lesquelles $c=0$).

Il peut donc y avoir débat d'auteurs sur la définition.

Pour l'instant, nous nous contentons **d'écarter la situation $c = d = 0$,** pour laquelle il n'y a tout simplement pas de fonction. On peut aussi observer que le quadruplet (a,b,c,d) servant à caractériser une fonction comme homographique n'est pas unique. Bref, nous ne travaillons pas dans un cadre assuré. La propriété intéressante, que nous souhaitons utiliser pour cette étude, est qu'une fonction homographique à coefficients entiers naturels est monotone sur $\mathbf{R}^+$ et prend toutes les valeurs comprises entre $\dfrac{b}{d}$ et $\dfrac{a}{c}$ si elle est croissante, toutes les valeurs comprises entre $\dfrac{a}{c}$ et $\dfrac{b}{d}$ si elle est décroissante (on peut aussi dire que le sens de variation est donné par le signe de $ad-bc$).

b) Le calendrier : approximation d'un rationnel par un rationnel « plus simple »

Au début de l'année 2000, **l'année tropique** (intervalle de temps séparant deux passages du soleil dans la même position sur son orbite apparente – l'écliptique) était mesurée à **365,242 190 517 jours.**

Comment faire varier le nombre (entier) de jours dans une année sans bouleverser les habitudes de vie ?

C'est la question que des gouvernants ont eu à résoudre (en Égypte antique, à Rome sous Jules César, en Europe au XVIe siècle).

Les égalités suivantes, obtenues en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$1000\,000\,000 = 4 \times 242\,190\,517 + 31\,237\,932$$
$$242\,190\,517 = 7 \times 31\,237\,932 + 23\,524\,993$$
$$31\,237\,932 = 1 \times 23\,524\,993 + 7\,712\,939$$
$$23\,524\,993 = 3 \times 7\,712\,939 + 386\,176$$
$$7\,712\,939 = 19 \times 386\,176 + 375\,595$$
$$386\,176 = 1 \times 375\,595 + 10\,581$$

permettent d'écrire

$$\frac{242190517}{1000000000} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{1+\cfrac{10581}{375595}}}}}}}$$

Remarque : On peut naturellement poursuivre l'algorithme, mais cela n'aurait pas de lien avec l'objectif, qui est de fournir des approximations permettant de fabriquer un calendrier. Le calendrier grégorien prévoit d'ajouter 97 jours tous les 400 ans (1 jour tous les 4 ans sauf pour les millésimes multiples de 100 mais pas de 400). Rappelons que le rapport entre la durée de l'année tropique et celle du jour sidéral – durée de la rotation de la Terre sur elle-même – subit des variations telles qu'il est illusoire de les prévoir sur plusieurs milliers d'années.

Comme dit précédemment, pour tout réel positif x, $\frac{1}{x+4}$ est compris entre 0 et $\frac{1}{4}$. L'ajout d'un jour tous les quatre ans à l'année calendaire est donc exagéré. Si on poursuit les calculs, on peut écrire : $\frac{242\,190\,517}{1000\,000\,000} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+y}} = \frac{y+7}{4y+29}$, ce qui permet d'affirmer que $\frac{242\,190\,517}{1000\,000\,000}$ est supérieur à $\frac{7}{29}$.

Ajouter 7 jours tous les 29 ans à l'année calendaire n'est pas suffisant. Poursuivons les calculs à l'étape suivante :

$\frac{242\,190\,517}{1000\,000\,000} = \frac{7z+8}{29z+33}$ montre que $\frac{8}{33}$ est une nouvelle approximation, meilleure que $\frac{1}{4}$ bien qu'encore exagérée.

Les fractions suivantes, $\frac{31}{128}$ et $\frac{597}{2465}$ sont successivement des approximations par défaut et par excès des modifications à apporter au calendrier pour s'approcher du rapport entre la durée de l'année tropique et celle du jour sidéral. Les valeurs approchées fournies sont (d'un certain point de vue qui sera développé dans la partie III) les meilleures possibles, mais on ne retrouve pas parmi elles les $\frac{97}{400}$ du calendrier grégorien.

Il est possible d'écrire ces calculs autrement : chaque nouvel « étage » de la fraction écrite plus haut peut être interprété comme l'intervention d'une fonction homographique. En appelant f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, on peut écrire :

$\frac{242\,190\,517}{1000\,000\,000} = f_4 \circ f_7 \circ f_1 \circ f_3 \circ f_{19} \circ f_1\left(\frac{10\,581}{375\,595}\right)$. Cette décomposition montre que les approximations trouvées le sont sous forme irréductible, et alternativement par excès et par défaut (les fonctions qu'on compose sont toutes décroissantes).

Il est possible de placer les coefficients des fonctions homographiques intervenant dans des tableaux, de sorte que, f_n étant représentée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, $f_n \circ f_p$ le serait par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ n & 1+np \end{pmatrix}$, forme qui illustre le fait que $f_n \circ f_p$ est différente de $f_p \circ f_n$ dès que n et p sont différents.

c) L'exemple de $\sqrt{2}$

Le nombre $\sqrt{2}$ est la solution positive de l'équation $x^2 - 2 = 0$, qui peut encore s'écrire $x = \dfrac{x+2}{x+1}$, puisque -1 n'en est pas solution. Ce nombre est donc sa propre image par l'application de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ qui donne de tout réel positif l'image $\dfrac{x+2}{x+1}$. Les paragraphes précédents fournissent un premier résultat : $\sqrt{2}$ est compris entre 1 et 2. Mais on peut aussi écrire que $\sqrt{2}$ est solution de $x = \dfrac{\dfrac{x+2}{x+1}+2}{\dfrac{x+2}{x+1}+1}$, par une substitution légitime. Tous calculs faits, on obtient : $x = \dfrac{3x+4}{2x+3}$, qui nous montre cette fois que $\sqrt{2}$ est compris entre $\dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{3}{2}$. À l'étape suivante, en reprenant l'égalité $x = \dfrac{x+2}{x+1}$, on trouvera que $\sqrt{2}$ est solution de $x = \dfrac{7x+10}{5x+7}$, et que ce nombre est compris entre $\dfrac{7}{5}$ et $\dfrac{10}{7}$ (l'écart est inférieur à 3 centièmes).

d) Lien avec le produit des matrices

Les calculs précédents nous ont donné l'idée que la composée de deux fonctions homographiques est elle-même une fonction homographique. En effet, si on a :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad et \quad g(x) = \frac{a'x+b'}{c'+d'}$$

Alors on obtient par composition :

pour tout x, $$g(f(x)) = \frac{a'\dfrac{ax+b}{cx+d}+b'}{c'\dfrac{ax+b}{cx+d}+d'} = \frac{\left(a'a+b'c\right)x+a'b+b'd}{\left(c'a+d'c\right)x+c'b+d'd},$$

avec les précautions évoquées au paragraphe ***a.***).

On observe que si on associe la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à la fonction f et la matrice $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ à la fonction g, alors la matrice BA est précisément la matrice associée à la fonction $g \circ f$.

Cela fournit une technique de calcul des coefficients de la composée de deux fonctions homographiques.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique4.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique5.jsp

e) Le cas du nombre d'Or

Le nombre d'or, noté Φ, est la racine positive de l'équation $x^2 = x+1$. Il peut également être considéré comme un *point fixe* de l'application *f*, définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

La fonction *f* est décroissante sur $[1,+\infty[$ et prend des valeurs comprises entre 1 et 2. Φ étant un point fixe de cette fonction, on peut obtenir un premier encadrement : $1 \leq \Phi \leq 2$.

La relation $f \circ f(\Phi) = f(\Phi) = \Phi$ montre que Φ est compris entre les extremums de la fonction $f \circ f$. Comme, pour tout *x* élément de $[1,+\infty[$, $f \circ f(x) = \dfrac{\dfrac{x+1}{x}+1}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{2x+1}{x+1}$, on déduit que :

$$\frac{3}{2} \leq \Phi \leq 2$$

Nous avons donc amélioré l'approximation par défaut de Φ. L'itération suivante consiste à composer une fonction croissante ($f \circ f$) par une fonction décroissante *f*. On obtient une fonction décroissante fournissant une nouvelle approximation par excès de Φ. La poursuite du procédé nous donne deux *suites adjacentes* convergeant l'une et l'autre (bien sûr) vers Φ.

f) Les réduites

L'analogie matricielle introduite précédemment conduit à considérer la suite des matrices $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}a_n & b_n\\c_n & d_n\end{pmatrix}$ associées aux fonctions homographiques f^n.

Ces matrices satisfont à la relation de récurrence $\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n & b_n\\c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n+b_n & a_n\\c_n+d_n & c_n\end{pmatrix}$, où on voit poindre les suites de Fibonacci.

Le quotient du premier terme de la première colonne de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^n$ par le second est une valeur approchée de Φ, alternativement par excès et par défaut. Ces nombres sont appelés *réduites du développement en fraction continue de* Φ.

Le terme *fraction continue* lui-même provient de l'écriture possible : $\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots \ddots + \cfrac{1}{1+\Phi}}}}$.

Les réduites du développement de Φ en fraction continue sont données par le tableau :

1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	…

g) Les réduites comme « meilleures approximations rationnelles »

Plus généralement, considérons un nombre réel irrationnel positif x. Soit a_1 le plus grand entier inférieur ou égal à x. On peut écrire : $x = a_1 + u = a_1 + \frac{1}{y}$. Le nombre y est à son tour un nombre positif auquel on peut appliquer le même traitement : $x = a_1 + u = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{z}}$. Et ainsi de suite. On associe aux fonctions homographiques utilisées les matrices $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, etc., qui ont toutes pour déterminant -1. Appelons $P_n = \begin{pmatrix} N_n & \alpha_n \\ D_n & \beta_n \end{pmatrix}$ le produit des n premières. On a alors :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} N_n & \alpha_n \\ D_n & \beta_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_n a_{n+1} + \alpha_n & N_n \\ D_n a_{n+1} + \beta_n & D_n \end{pmatrix}.$$

Les quotients des éléments de la première colonne de la matrice P_n s'écrivent sous la forme de fractions irréductibles (le déterminant de P_n est 1 ou -1, on applique le théorème de Bézout) et la relation précédente montre que le produit par la matrice $\begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ fait glisser en quelque sorte la première colonne vers la droite.

Considérons deux réduites successives $\frac{N_n}{D_n}$ et $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}}$, et supposons, pour fixer les idées, que $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} > \frac{N_n}{D_n}$.

Rappelons que $N_{n+1}D_n - D_{n+1}N_n = 1$ et que $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} - \frac{N_n}{D_n} = \frac{1}{D_{n+1}D_n}$.

Considérons un nombre rationnel $\frac{X}{Y}$ compris entre les deux : $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} > \frac{X}{Y} > \frac{N_n}{D_n}$.

Notons $U = D_n X - N_n Y$ et $V = N_{n+1}Y - D_{n+1}X$.

La double inégalité précédente prouve que ces deux entiers sont strictement positifs.

On en déduit que : $X = N_{n+1}U + N_n V$ et $Y = D_{n+1}U + D_n V$ ce qui prouve que X est plus grand que N_{n+1} et Y plus grand que D_{n+1}.

Les réduites sont donc les meilleures approximations au sens suivant : toute approximation du nombre x plus précise que l'une quelconque des réduites a des termes plus grands que ceux de la réduite considérée.

Ressource : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/fractioncontinue/fraction2.jsp

B. Matrices et probabilités

1. La fougère de Barnsley

a) Des modèles de croissance pour les plantes

L'observation de la disposition des feuilles sur les tiges des végétaux, de la disposition des boutons floraux ou des étamines, a guidé l'étude mathématique puis l'élaboration de modèles de croissance. On pourra consulter utilement à ce propos H.S.M. COXETER *Introduction to geometry*, Wiley éditeur (Chapitre *Phyllotaxis*) et le classique LINDENMAYER & PRUSINKIEWICZ *The algorithmic beauty of plants*, Springer éditeur.

Ces modèles trouvent une utilité toute particulière dans l'industrie cinématographique, par exemple, le même modèle permettant de tourner au même endroit (fictif) et consécutivement une scène de printemps et une scène d'hiver.

Les probabilités sont utilisées ici pour modéliser le comportement de la nature.

b) Une transformation du plan

Les **transformations** du plan sont les **applications** (*stricto sensu*, bijectives) du plan dans lui-même. Comme un point du plan est repéré par ses deux coordonnées x et y, une transformation peut aussi être vue comme une application de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même. Par exemple,

$$f : M(x, y) \mapsto M'(x', y')$$
$$\text{où : } \begin{cases} x' = x^3 \\ y' = x + y \end{cases}$$

est une transformation du plan.

Seules celles dites **affines** nous intéressent ici. Pour une telle application, il existe des réels a, b, c, d, u et v tels que :

$$f : M(x, y) \mapsto M'(x', y')$$
$$\text{où : } \begin{cases} x' = ax + by + u \\ y' = cx + dy + v \end{cases}$$

Ce qu'on peut donc aussi écrire : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, qui peut aussi se noter $X' = AX + U$

Nous utilisons dans la suite quatre de ces transformations :

- f_1 pour laquelle $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- f_2 pour laquelle $A = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,04 \\ -0,04 & 0,85 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$
- f_3 pour laquelle $A = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,26 \\ 0,23 & 0,22 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$
- f_4 pour laquelle $A = \begin{pmatrix} -0,15 & 0,28 \\ 0,26 & 0,24 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix}$

c) La fougère de Barnsley (1988)

Voici le principe de sa construction, donné au pas à pas :

- Le premier point à dessiner est l'origine O, de coordonnées (0,0) ;
- Chacun des points suivants s'obtient en appliquant à son prédécesseur une transformation f, égale à f_1, f_2, f_3, f_4, avec les probabilités données par le tableau :

f	f_1	f_2	f_3	f_4
$P(f = f_i)$	0,01	0,85	0,07	0,07

Le principe de construction peut être conservé pour créer d'autres variétés de végétaux fictifs, dites mutantes.

*Voici le code **Scilab** de la fougère de référence, et une représentation avec 10 000 points*

```
function
point_image=transformation(point_antecedent,
choix)
  if choix == 1 then
    A = [[0,0];[0,0.16]] ; V=[0;0];
  end
  if choix == 2 then
    A = [[0.85,0.04];[-0.04,0.85]] ; V=[0;1.6];
  end
  if choix == 3 then
    A = [[0.2,-0.26];[0.23,0.22]] ; V=[0;1.6]
  end
  if choix == 4 then
    A = [[-0.15,0.28];[0.26,0.24]] ; V=[0;0.44]
  end
  point_image = A * point_antecedent + V
endfunction

nPoints = 10000
P = zeros(2,nPoints);
for i = 2:nPoints
  tirage = rand();
  if tirage < 0.1 then choix = 1;
  else if tirage < 0.86 then choix = 2;
    else if tirage < 0.93 then choix = 3;
       else choix = 4;
      end
    end
  end
  P(:,i) = transformation(P(:,i-1),choix);
end

plot(P(1,:),P(2,:),"*g");
```



Une feuille de fougère obtenue grâce au programme de gauche



Une fleur, elle aussi « programmée »
Photographie tirée de « The algorithmic beauty of plants »

Le livre « The algorithmic beauty of plants » est téléchargeable sur le site « The algorithmic botany at the University of Calgary » à l'adresse http://algorithmicbotany.org/papers/#abop

Ressource : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/barnsley/barnsley.jsp

2. Triangles rectangles pseudo-isocèles. Points à coordonnées entières sur une hyperbole

a) Triangles rectangles pseudo isocèles

Appelons triangle rectangle pseudo isocèle (en abrégé, TRPI), tout triangle rectangle dont les côtés ont pour longueurs des **entiers** $a, a+1$ et c, où c désigne la longueur de l'hypoténuse.

Par exemple, la séquence (3, 4, 5) définit un TRPI. Elle définit même le « plus petit TRPI » quand on classe les TRPI dans l'ordre croissant des valeurs de a.

Les séquences (a, a + 1, c) sont des **triplets pythagoriciens particuliers**. Mais tous les triplets pythagoriciens ne donnent pas des TRPI, à commencer par les « multiples entiers » des longueurs des côtés d'un TRPI donné comme (6, 8, 10) ou (9, 12, 15) obtenus par homothétie. Le théorème de Pythagore caractérise les TRPI par les couples (a, c) d'entiers vérifiant l'équation diophantienne :

$$a^2+(a+1)^2=c^2 \quad (**)$$

Il est alors envisageable de rechercher exhaustivement les TRPI en incrémentant progressivement a et en testant le caractère entier du nombre c qui lui est associé. Ce que nous réalisons sur le programme **Scilab** ci-dessous, balayant toutes les valeurs de a comprises entre 1 et 1000.

```
for  a = 1:1000
   c = sqrt(2*a^2+2*a+1);
   if c == floor(c) then
      disp([a,a+1,c]);
   end
end
```

On obtient quatre solutions, les triplets (3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169) et (696, 697, 985).

b) Recherche d'une expression générale

Le programme précédent fournit quatre solutions. Nous cherchons une expression générale fournissant toutes les solutions.

On définit par **récurrence** les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ par $a_0 = 0$, $c_0 = 1$ et les relations de **couplage**, valables pour tout $n \geq 0$: $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2c_n + 1 \\ c_{n+1} = 4a_n + 3c_n + 2 \end{cases}$.

Les raisons pour lesquelles on utilise ces relations sont indiquées en fin de ce paragraphe ***b***.

On peut vérifier que, si le couple (a_n, c_n) est solution de l'équation (**), le couple (a_{n+1}, c_{n+1}) est lui aussi solution, et une solution différente de (a_n, c_n). On peut également prouver que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. À partir du couple (0, 1), on obtient donc une suite de couples solutions.

On obtient en fait toutes les solutions, résultat dont la justification sort sensiblement du cadre de ce document.

Les couples (a_n, c_n) se calculent de proche en proche. Ainsi :
(a_2, c_2) = (20, 29) ; (a_3, c_3) = (119, 169) ; (a_4, c_4) = (696, 985) ; (a_5, c_5) = (4059, 5741).

Le qualificatif de « pseudo isocèles » donné à ces triangles est justifié :
a_n grandissant très vite, le quotient des longueurs des deux cathètes tend vers 1.

Éléments de justification des relations définissant les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$

A partir des calculs effectués au paragraphe ***a***, on obtient :

$a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 20$, $a_3 = 119$, $a_4 = 696$ et $c_0 = 1$, $c_1 = 5$, $c_2 = 29$, $c_3 = 169$, $c_4 = 985$.

On peut alors vérifier que : $c_2 - 6c_1 + c_0 = 0$, $c_3 - 6c_2 + c_1 = 0$, $a_2 - 6a_1 + a_0 = 2$ et $a_3 - 6a_2 + a_1 = 2$.

On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} v_0 = 1, \quad v_1 = 5 \\ \text{Pour tout } n \geq 1, \quad v_{n+2} - 6v_{n+1} + v_n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 3 \\ \text{Pour tout } n \geq 1, \quad u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n = 2 \end{cases}$$

On détermine ensuite les expressions explicites de u_n et v_n pour tout n qui permettent de déterminer le système de relations proposé au début du paragraphe ***b***.

c) Des matrices pour expliciter les solutions

La construction récurrente décrite ci-avant constitue une première avancée. Mais pour parfaire notre étude, donnons une **expression close** des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ afin d'accéder directement à chacun des TRPI.

Nous pouvons représenter l'écriture $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2c_n + 1 \\ c_{n+1} = 4a_n + 3c_n + 2 \end{cases}$ par $U_{n+1} = MU_n + V$,

où : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

On obtient successivement : $U_1 = MU_0 + V$, $U_2 = M^2U_0 + MV + V$, $U_3 = M^3U_0 + (M^2 + M + I)V$, …

avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut plus généralement obtenir par récurrence le résultat suivant :

$$\text{pour tout entier naturel } n > 0,\ U_n = M^nU_0 + \left(M^{n-1} + M^{n-2} + \ldots + M^2 + M + I\right)V$$

Pour exprimer simplement les puissances de M, on a recours à la diagonalisation (lorsqu'elle est possible). Ce procédé conduit à écrire M comme un produit : $M = PDP^{-1}$.

On peut, par exemple, choisir :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3+2\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (3-2\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On peut se demander où sont passés les nombres entiers, qui constituent le cadre de l'étude. Ils vont, ils doivent, réapparaître après ce passage, simplement destiné à permettre le calcul explicite des a_n et c_n.

On peut écrire, pour $n > 0$:

$$M^{n-1} + M^{n-2} + \cdots . + M^2 + M + I = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (3+2\sqrt{2})^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} (3-2\sqrt{2})^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

où on voit apparaître des sommes de termes de suites géométriques, et donc la fin des calculs. Finalement :

$$a_n = \frac{1+\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}$$

et

$$c_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n$$

On ne « voit » toujours pas les entiers dans ces écritures, mais on peut expliquer pourquoi a_n et c_n ainsi définis sont des entiers naturels.

3. <u>Le problème du collectionneur</u>

Un fabricant de produits alimentaires propose à ses acheteurs potentiels de constituer la carte de la France des 101 départements, chacun de ces départements étant figuré par un aimantin. Chaque conditionnement d'un certain produit contient un aimantin, les aimantins étant répartis de manière uniforme.

On se propose de déterminer le nombre moyen de boîtes qu'un collectionneur isolé, sans possibilité d'échanges avec d'autres personnes, doit se procurer pour réaliser la collection complète des départements.

a) Écriture de la matrice de transition

Nous allons représenter la situation comme une marche aléatoire entre des points situés sur une droite graduée, le point 0 représentant la situation du collectionneur n'ayant encore rien acquis, le point générique k celle du collectionneur ayant acquis k aimantins, le point 101 étant le point d'arrivée du parcours. On passe du point k au point $k+1$ avec la probabilité $\frac{101-k}{101}$, on reste au point k avec la probabilité $\frac{k}{101}$. Dans la suite, nous utiliserons n à la place de 101 pour donner un contenu un peu plus général au problème. Pour mesurer la longueur du parcours, nous utiliserons la variable p. Nous essayons d'évaluer l'espérance mathématique de la variable aléatoire mesurant le nombre d'achats nécessaires à la complétion de la collection.

La matrice de transition est une matrice carrée d'ordre $n+1$. En vertu de ce qui précède, elle ne contient d'éléments non nuls que sur la diagonale principale et sur la « sur-diagonale », si on peut dire. Elle s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & \frac{2}{n} & \frac{n-2}{n} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \frac{3}{n} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{2}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut écrire cette matrice sous la forme :

$M = \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline O & I \end{array}\right)$, où O est la matrice nulle à une ligne et n colonnes, I la matrice à un seul élément, 1, et R la matrice colonne dont tous les éléments sont nuls sauf le dernier égal à $\frac{1}{n}$.

Cela simplifierait un peu les calculs que nous ne ferons pas dans le cas général.

b) Puissances de la matrice de transition

Les calculs suivants ont été effectués avec l'outil « Matrice puissance d'une matrice » disponible sur le site http://euler.ac-versailles.fr. Les puissances 10, 20 et 30 de la matrice M ont été calculées dans le cas $n=5$. On obtient successivement :

Soit M la matrices définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et soit $k = 10$.

La matrice M^k est la matrice définie par

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1953125} & \frac{2044}{1953125} & \frac{22392}{390625} & \frac{163704}{390625} & \frac{40824}{78125} \\ 0 & \frac{1}{9765625} & \frac{4092}{9765625} & \frac{342012}{9765625} & \frac{27984}{78125} & \frac{1184304}{1953125} \\ 0 & 0 & \frac{1024}{9765625} & \frac{6963}{390625} & \frac{2794506}{9765625} & \frac{1359204}{1953125} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{59049}{9765625} & \frac{1979054}{9765625} & \frac{7727522}{9765625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1048576}{9765625} & \frac{8717049}{9765625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et soit $k = 20$.

La matrice M^k est la matrice définie par

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{19073486328125} & \frac{2097148}{19073486328125} & \frac{6967277352}{19073486328125} & \frac{1085570781624}{19073486328125} & \frac{143847569376}{152587890625} \\ 0 & \frac{1}{95367431640625} & \frac{167772}{3814697265625} & \frac{167264988}{762939453125} & \frac{174248707248}{3814697265625} & \frac{90990301641624}{95367431640625} \\ 0 & 0 & \frac{1048576}{95367431640625} & \frac{418288299}{3814697265625} & \frac{131104692906}{3814697265625} & \frac{92079356061924}{95367431640625} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3486784401}{95367431640625} & \frac{17536397494}{762939453125} & \frac{93171895169474}{95367431640625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1099511627776}{95367431640625} & \frac{94267920012849}{95367431640625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et soit $k = 30$.

La matrice M^k est la matrice définie par

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{186264514923095703125} & \frac{2147483644}{186264514923095703125} & \frac{82355164347672}{3725290298461914 0625} & \frac{2304195893041838 64}{37252902984619140625} & \frac{740448020794422 2472}{7450580596923828125} \\ 0 & \frac{1}{931322574615478515625} & \frac{4294967292}{931322574615478515625} & \frac{1235333907666012}{931322574615478515625} & \frac{36873722701817232}{745058059692382812 5} & \frac{1853424247879097456 64}{186264514923095703125} \end{pmatrix}$$

On constate que les coefficients des cinq premières colonnes sont de plus en plus faibles (on dirait qu'ils tendent vers 0), tandis que les coefficients de la dernière colonne tendent vers 1. C'est un résultat auquel on pouvait s'attendre : si le collectionneur a les moyens d'acheter autant de produits qu'il veut, on peut estimer qu'il finira par réunir la collection complète.

c) Espérance du nombre d'achats nécessaires

La variable aléatoire X dénombrant les achats à réaliser pour obtenir la collection complète peut être considérée comme la somme des variables aléatoires X_k dénombrant chacune les achats à réaliser avant d'obtenir le k-ième objet distinct alors qu'on en a déjà acquis k–1 distincts.

Soit k un entier non nul inférieur à n et soit j un entier naturel non nul. $X_k = j$ signifie qu'au j^{e} achat, le client a acheté $j - 1$ produits contenant un aimantin au moins en double parmi les $k - 1$ déjà en sa possession et qu'il a obtenu un aimantin différent parmi les $n-k+1$ autres aimantins existants. On en déduit que :

$$p(X_k) = \frac{(k-1)^{j-1}(n-k+1)}{n^j} \quad \text{soit} \quad p(X_k = j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}(1 - \frac{k-1}{n})$$

La variable X_k suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$. Son espérance mathématique est donc $E(X_k) = \frac{n}{n-k+1}$.

La somme des espérances des variables X_k est l'espérance de la variable X qui vaut donc :

$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$, ou encore $E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1}$, et, par changement d'indice : $E(X) = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

En revenant au problème initial, on trouve que le collectionneur devra en moyenne acquérir 525 produits pour compléter sa collection.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/collection/collection1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/collection/collection2.jsp

4. Retour sur le modèle d'urnes de T. & P. Ehrenfest

Etude du cas N > 2

Certains résultats, trop complexes à prouver dans le cadre de cet enseignement de spécialité, sont énoncés. Ils sont destinés à sensibiliser les élèves aux résultats que l'on peut obtenir grâce à la puissance du calcul matriciel.

Des références sont indiquées en fin de paragraphe pour permettre à ceux qui le souhaiteraient, à titre personnel, de mieux comprendre le phénomène.

a) Le cadre général

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre initial de boules dans l'urne B.

À chaque instant n $\geq$ 1, on tire au hasard, de façon équiprobable, un numéro entre 1 et N et on change d'urne la boule correspondante.

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne B à l'instant n > 0.

Ces variables aléatoires sont définies sur = $[\![0, N]\!]$.

On a pour tout couple (i, j) de $[\![0, N]\!]^2$, $p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)=\begin{cases}\dfrac{i}{N} \text{ si } j=i-1\\ \dfrac{N-i}{N} \text{ si } j=i+1\\ 0 \text{ si } |i-j|\neq 1\end{cases}$.

- L'état du processus à l'instant n + 1 ne dépend que de l'état du processus à l'instant n, c'est-à-dire du passé immédiat. Un tel processus est un processus Markovien.
- $p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$ ne dépend pas de n. On dit que le processus est homogène.
- Notons $p_{ij}=p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$ et P la matrice carrée d'ordre N + 1 admettant les p_{ij} pour coefficients. On a donc :

pour tout j de $[\![0, N]\!]$, $p(X_{n+1}=j)=\sum_{i=0}^{N} p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)\times p(X_n=i)=\sum_{i=0}^{N} p_{ij}\times p(X_n=i)$ (1)

et

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \ddots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{N} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{N-2}{N} & 0 & \frac{2}{N} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P est appelée la matrice de transition du processus.

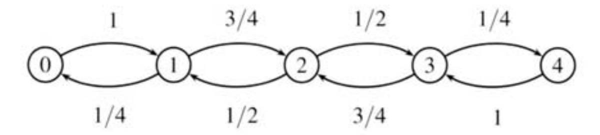
Soit pour tout n, la matrice ligne $V_n=(p(X_n=0)\ \ p(X_n=1)\ \ldots\ p(X_n=N))$.

Pour tout entier n, $V_{n+1} = V_n P$ (conséquence des relations (1) pour tout entier j de $[\![0, N]\!]$),
d'où $V_n = V_0 P^n$. Il suffit donc de calculer P^n pour estimer la répartition des boules dans les deux urnes.

b) Exemple pour 4 boules

$$E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe de transition :



$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On suppose dans cet exemple qu'à l'état initial, toutes les boules sont dans l'urne A. On a donc $V_0 = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$.

On obtient aisément $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient, à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$$P^n = \begin{pmatrix}
\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) \\
\left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+3}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+3}}\right) \\
\left(1+(-1)^n\right)\times\frac{1}{16} & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac{1}{4} & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac{1}{4} & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{1}{16} \\
\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+3}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+3}}\right) \\
\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right)
\end{pmatrix}$$

Avec $V_0 = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$, on obtient :

$$V_n = \left(\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) \quad \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{3}{8} \quad \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) \right)$$

Le nombre moyen de boules dans l'urne B au bout de n étapes est $\mathrm{E}(X_n) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Avec le temps, on aura en moyenne 2 boules dans chacune des urnes.

c) Nombre moyen de boules dans l'urne B dans le cas général

On démontre, en utilisant des espérances conditionnelles, que $\mathrm{E}(X_n) = \frac{N}{2} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \left(E(X_0) - \frac{N}{2}\right)$ (D.FOATA et A.FUCHS- Processus stochastiques, DUNOD)

Dans le cas où N est supérieur à 2, $\mathrm{E}(X_n)$ tend vers $\frac{N}{2}$. Cela signifie qu'avec le temps, il y aura à peu près autant de boules dans les deux compartiments.

d) Temps de retour à un état initial k

On peut également démontrer que le temps de retour moyen à l'état k (c'est à dire, partant de l'état de k boules dans l'urne B, on retourne pour la première fois à k boules dans l'urne B) est :

$$m_k = \frac{2^N}{\binom{N}{k}}.$$

Le temps moyen de retour à l'état où l'urne B est vide est donc égal à 2^N.

L'étude des chaines de Markov permet de prouver que l'urne retrouvera son état initial de façon quasi-certaine (résultat de Pierre BREMAUD en 1988 par application du critère de Foster à la matrice de transition). Cependant, si N est un multiple du nombre d'Avogadro, égal à $6{,}02.10^{23}$, et que chaque transition se fait en une seconde, ce temps moyen est astronomique et quasiment infini à notre échelle. On n'observe donc pas de retour à l'état initial et cette « irréversibilité » est en grande partie due à la différence entre l'échelle de temps de l'observateur et celle du temps de retour.

Ressource : *SIMULATION DE L'URNE D'EHRENFEST* Son apport à l'appropriation des concepts d'équilibre statistique, d'irréversibilité, d'entropie, de flèche du temps Alain Marie-Jeanne 1, Frédéric Beau 1, Michel Janvier 1 (2003) disponible sur http://hal.inria.fr.

C. Suites liées par une relation non linéaire

Le modèle proie-prédateur de Volterra

Le mathématicien Volterra a proposé en 1926 un modèle décrivant l'évolution conjointe des sardines et des requins constatée par des pêcheurs de l'Adriatique : les effectifs des deux espèces variaient de façon périodique en fonction du temps, avec la même période mais en étant décalées dans le temps.

On considère deux populations dont les effectifs à l'instant t sont notés $A(t)$ et $B(t)$, qui désignent respectivement le nombre de proies et le nombre de prédateurs.

On suppose qu'en l'absence de prédateurs, la population des proies aurait un taux d'accroissement constant positif noté a et qu'en l'absence de proies, la population des prédateurs aurait un taux d'accroissement constant négatif noté $-d$.

On suppose de plus que lorsque les deux populations coexistent, l'effectif $A(t)$ augmentera d'autant moins vite que $B(t)$ sera grand et que l'effectif $B(t)$ augmentera d'autant plus vite que $A(t)$ sera grand.

Le modèle le plus simple est obtenu en supposant qu'il existe deux constantes positives *b* (quantité supposée constante de proies disparaissant par prédateur et par unité de temps, appelée « pression de prédation ») et *c* (quantité supposée constante de prédateurs « apparaissant » par proies et par unité de temps, appelée « accessibilité des proies ») telles que les coefficients d'accroissement par rapport au temps sont $a - b\,B(t)$ et $-d + c\,A(t)$.

On aboutit ainsi au système (S) d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = A(t)\big(a - bB(t)\big) \\ \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = B(t)\big(-d + cA(t)\big) \end{cases}$$

Un tel système est appelé *système dynamique*. On peut aussi s'écrire $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = f\big(A(t), B(t)\big) \\ \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = g\big(A(t), B(t)\big) \end{cases}$

On appelle *trajectoire stationnaire* du système tout couple de fonctions constantes (A^*, B^*) solution du système.

1. Discrétisation

Afin de « discrétiser » le problème, on décrit les populations à des instants successifs t et $t+\delta$ à l'aide de deux suites $\left(A_n\right)$ et $\left(B_n\right)$ de premiers termes A_0 et B_0 (effectifs à l'instant 0) et telles que pour tout entier *n* :

$$\begin{cases} A_{n+1} - A_n = \delta\, A_n\left(a - bB_n\right) \\ B_{n+1} - B_n = \delta\, B_n\left(-d + cA_n\right) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} A_{n+1} = A_n\left(1 + a' - b'B_n\right) \\ B_{n+1} = B_n\left(1 - d' + c'A_n\right) \end{cases}$$

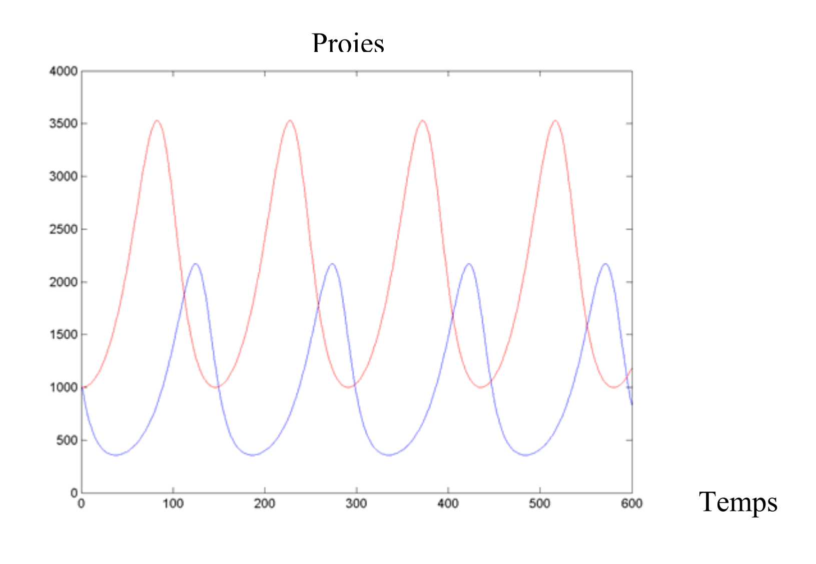
où $a' = \delta\, a$, $b' = \delta\, b$, $c' = \delta\, c$ et $d' = \delta\, d$.

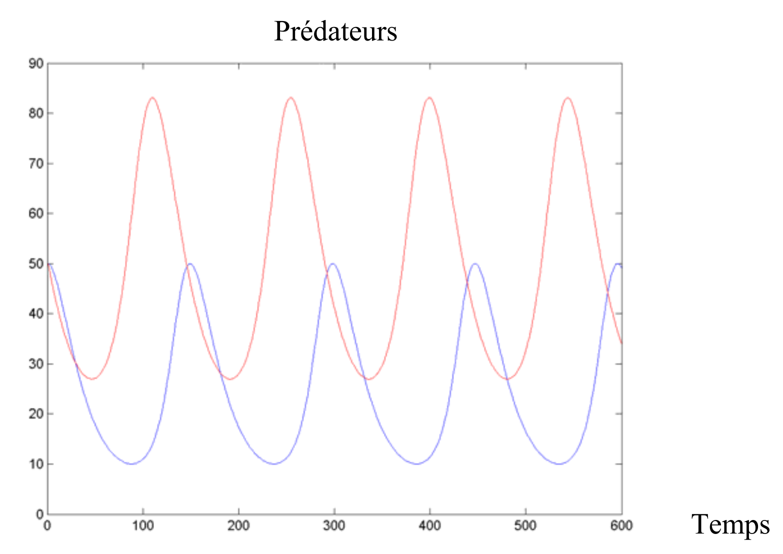
La valeur des rapports $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{d}{c}$ reste inchangée ; seules les valeurs des coefficients *a*, *b*, *c* et *d* sont modifiées. Dans la suite, on note à nouveau *a*, *b*, *c* et *d* les coefficients du système, et on s'intéresse donc à la résolution du système (S_1) :

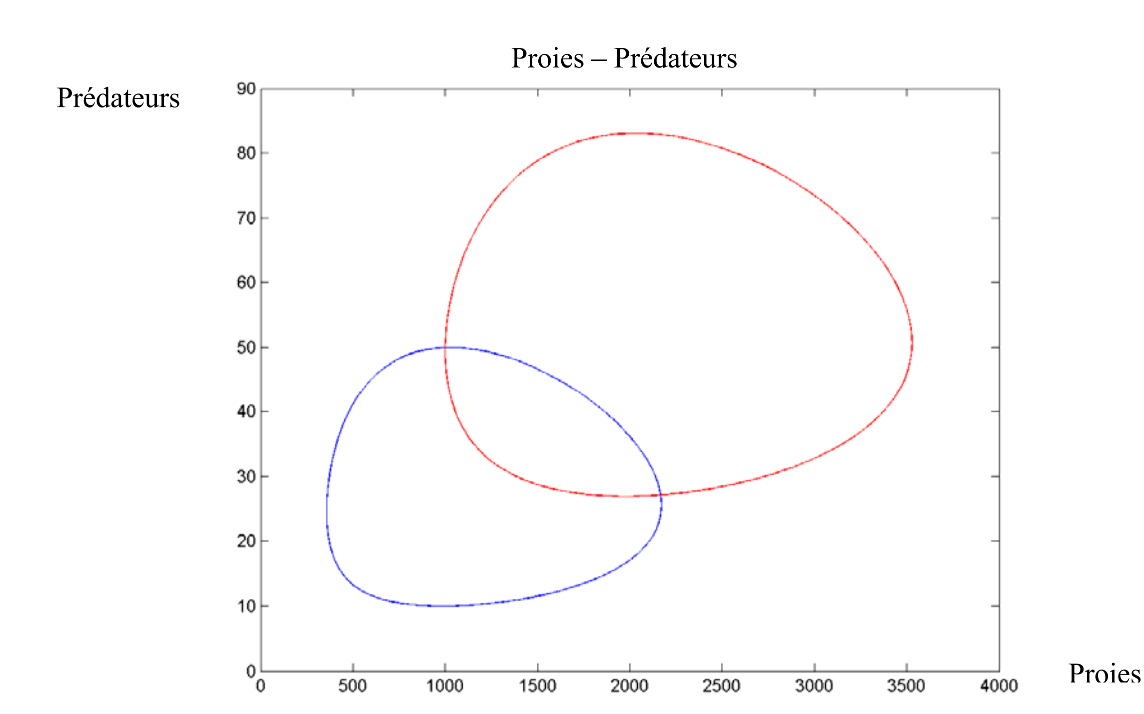
$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n\left(1 + a - bB_n\right) \\ B_{n+1} = B_n\left(1 - d + cA_n\right) \end{cases}.$$

qui fournit des résultats « satisfaisants » à condition de prendre des petites valeurs pour les coefficients *a*, *b*, *c* et *d*.

On observe qu'en faisant varier les coefficients *a*, *b*, *c* et *d*, on peut obtenir des évolutions conjointes des deux populations très différentes.
Les graphiques qui suivent représentent les évolutions simultanées des populations de proies et prédateurs. Ils sont obtenus à l'aide de la méthode d'Euler et réalisés avec le logiciel Matlab. Le nombre d'itération est 600, le pas égal à 1 et les données initiales sont 1000 proies et 50 prédateurs.
Les graphiques bleus sont obtenus avec les coefficients $a = 0{,}05$, $b = 0{,}002$, $d = 0{,}04$ et $c = 0{,}00004$ et les graphiques rouges avec les coefficients *a* =0,05, *b* = 0,001, *d* = 0,04 et *c* = 0,00002.


Proies
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
100
200
300
400
500
600
Temps


Prédateurs
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
100
200
300
400
500
600
Temps


Proies – Prédateurs
Prédateurs
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
Proies

2. **Recherche d'un équilibre**

Les effectifs des deux populations sont constantes si et seulement si $\begin{cases} A(t)\big(a - bB(t)\big) = 0 \\ B(t)\big(-c + dA(t)\big) = 0 \end{cases}$.

Ceci donne deux couples de fonctions constantes correspondant à des trajectoires stationnaires :

$$\left(A^*, B^*\right) = (0,0) \text{ et } \left(A^*, B^*\right) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right).$$

Par exemple, pour $a = 0,05$, $b = 0,001$, $d = 0,02$ et $c = 0,00002$ on obtient les valeurs suivantes :

Nombre de Proies = 1000, Nombre de Prédateurs = 50.

Il est de plus possible de caractériser une trajectoire stationnaire, qui peut être stable si une petite perturbation de A ou de B est suivie d'un retour à $\left(A^*, B^*\right)$ ou instable dans le cas contraire. Il est enfin possible de tracer le « portrait » du système dynamique en délimitant, dans le plan (A, B), les régions où les signes de A' et B' sont constants et en traçant les lieux des points où l'une des dérivées A' et B' est nulle.

3. **Linéarisation autour du point d'équilibre (d/c , a/b)**

On reprend le système (S$_1$) $\begin{cases} A_{n+1} = A_n\left(1 + a - bB_n\right) \\ B_{n+1} = B_n\left(1 - d + cA_n\right) \end{cases}$ et on se place au voisinage du point d'équilibre en posant $U_n = A_n - \frac{d}{c}$ et $V_n = B_n - \frac{a}{b}$.

On peut alors vérifier que le système (S$_1$) équivaut au système $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - \frac{bd}{c}V_n - bU_nV_n \\ V_{n+1} = \frac{ac}{b}U_n + V_n + cU_nV_n \end{cases}$.

Si on se place au voisinage du point d'équilibre, le terme U_nV_n peut être considéré comme négligeable et on peut approximer le système (S$_2$) par le système linéaire $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - \frac{bd}{c}V_n \\ V_{n+1} = \frac{ac}{b}U_n + V_n \end{cases}$ qui se traduit matriciellement par $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix}$. On aura alors $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$

On peut étudier, à l'aide d'un logiciel et pour différentes valeurs de *a, b, c* et *d*, les puissances successives de la matrice *M* et les termes successifs des suites (U_n) et (V_n).

On peut aussi revenir au système continu et se placer à nouveau au voisinage de la trajectoire stationnaire en posant $A(t) = U(t) + \frac{d}{c}$ et $B(t) = V(t) + \frac{a}{b}$.

On peut alors vérifier que le système (S) s'écrit $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{bd}{c}V(t) - bU(t)V(t) \\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{ac}{b}U(t) - cU(t)V(t) \end{cases}$.

En négligeant cette fois-ci les termes en $U(t)V(t)$, le système devient $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{bd}{c}V(t) \\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{ac}{b}U(t) \end{cases}$.

En dérivant à nouveau les deux équations du système on aboutit à $U''(t) = -ad\,U(t)$ et $V''(t) = -ad\,V(t)$.

On admet qu'il existe donc des constantes α, β, γ et δ telles que, en notant $\omega = \sqrt{ad}$ (*a* et *d* constantes positives par hypothèse), on ait:

$$U(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) \text{ et } V(t) = \gamma\cos(\omega t) + \delta\sin(\omega t).$$

Cela justifie la périodicité observée expérimentalement dans le système proies-prédateurs, la période valant ici $\frac{2\pi}{\sqrt{ad}}$.

4. Modèle perturbé

Pour rendre le modèle plus réaliste, on peut limiter les ressources alimentaires des proies, ce qui limite leur croissance. Il existe alors une constante *k* telle que le système dynamique s'écrive :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = A(t)\left(a - bB(t) - kA(t)\right) \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = B(t)\left(-d + cA(t)\right) \end{cases}.$$

Les trajectoires stationnaires correspondent alors aux points d'équilibre $(A^*, B^*) = (0,0)$ et $(A^*, B^*) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} - k\frac{d}{bc}\right)$.

En posant cette fois-ci $A(t)=U(t)+\frac{d}{c}$ et $B(t)=V(t)+\frac{a}{b}-k\frac{d}{bc}$ et en négligeant encore les termes en $U(t)V(t)$, on aboutit au système linéaire $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-k\frac{d}{c}U(t)-\frac{bd}{c}V(t) \\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{ac}{b}-k\frac{d}{b}\right)U(t) \end{cases}$ dont la matrice associée est $N=\begin{pmatrix} -k\frac{d}{c} & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac-kd}{b} & 0 \end{pmatrix}$.

On peut comme précédemment (à une ré-écriture des coefficients près) lui associer le système discrétisé linéarisé :

$$\begin{cases} U_{n+1}=\left(1-k\frac{d}{c}\right)U_n-\frac{bd}{c}V_n \\ V_{n+1}=\left(\frac{ac-kd}{b}\right)U_n+V_n \end{cases}.$$

Dans le cas où $a=0,05$, $b=0,001$, $d=0,04$ et $c=0,00004$, le point d'équilibre non trivial est $(A^*,B^*)=(1000,50-k10^6)$ et $N=\begin{pmatrix} -1000k & -1 \\ 0,002-40k & 0 \end{pmatrix}$

On peut alors faire varier k et constater, sur le système discrétisé, que pour des valeurs très petites de k, le système converge vers le point d'équilibre, lorsque les valeurs initiales sont proches de ce point d'équilibre.

Ressource : http://interstices.info/jcms/n_49876/des-especes-en-nombre?hlText=volterra

IV. Annexe : utiliser Scilab pour numériser des images

A. Les matrices

1. Écriture

Les matrices s'écrivent entre crochets [ ], en mettant des virgules entre les éléments d'une même ligne, et des points virgules entre les différentes lignes :

M = [0,0,1,1 ; 2,0,2,0 ; 1,1,1,1] donne
```
0 0 1 1
2 0 2 0
1 1 1 1
```

zeros(2,4) donne une matrice de zéros avec 2 lignes et 4 colonnes.

zones(3,4) donne une matrice de uns avec 3 lignes et 4 colonnes.

2. Opérations

Soient M1 et M2 deux matrices de même format :

- M1 + M2 donne la somme élément par élément ;
- M1 – M2 donne la différence élément par élément ;
- *k**M1 multiplie tous les éléments par le réel *k* ;
- M1 + k ajoute le réel *k* à chaque élément.

Soient M1 de format (m, n) et M2 de format (n , p) :

- M1*M2 donne le produit des matrices.

B. Les couleurs

1. Principe du codage

On utilise des matrices de nombres entre 0 et 1. À chaque élément de la matrice correspond un carré (pixel) colorié par une teinte de gris de sorte que plus le réel est proche de 1, plus le pixel dessiné est foncé.

2. Affichage du dessin en 256 teintes de gris

On définit la fonction affiche_matrice qui transforme la matrice M de nombres entre 0 et 1 en une matrice de numéros de teintes entiers compris entre 0 et 255, dans laquelle 0 correspond au noir et 255 correspond au blanc, et qui la dessine grâce à la fonction Scilab Matplot commentée ci-dessous.

```
function affiche_matrice(M)
  // Création d'une fenêtre graphique.
  f = scf();
  // On associe à la fenêtre graphique 256 teintes de gris.
  f.color_map = graycolormap(255);
  // Fond de la fenêtre blanc.
  f.background = -2;
  // Repère orthonormé.
  orthonorme;
  // On calcule (1-M) car dans la matrice M le 0 correspond au noir et le 1 au blanc,
  // on multiplie par 255 pour avoir des nombres entre 0 et 255, et on utilise la fonction
 // floor pour avoir des entiers.
```

```
   Matplot(floor((1-M)*255))
   // On enlève les axes.
   a = gca(); a.axes_visible = ["off","off","off"];
endfunction
```

C. Les transformations

Les codes Scilab correspondant à ces différentes fonctions et exemples sont fournis dans le paragraphe suivant.

Des fonctions

La fonction **negatif** donne le dessin en négatif.
La fonction **symetrique** opère une symétrie d'axe vertical.
La fonction **somme** permet de superposer des dessins.
Les fonctions **fonce1** et **fonce2** permettent de foncer le dessin de deux façons différentes.

Des exemples

Les codes « Lettres » et « Poisson » donnent des exemples de dessins même si le poisson n'est pas très ressemblant…

Le code « matrice_aléatoire » permet de générer des matrices de grande dimension avec des éléments entre 0 et 1.

D. Les codes Scilab

Les fonctions proposées utilisent certaines fonctions du module « lycée » à télécharger.

1. Pour afficher une matrice M

```
function affiche_matrice(M)
   f = scf();
   f.color_map = graycolormap(255);
   f.background = -2;
   orthonorme;
   Matplot(floor((1-M)*255))
   a = gca(); a.axes_visible = ["off","off","off"];
endfunction
```

2. Opérations

```
// Mise en négatif
function MM=negatif(M)
   MM = 1-M;
endfunction

// Symétrique
function MM=symetrique(M)
   t = taille(M); n = t(2);
   for i=1:n
      MM(:,i) = M(:,n-i+1);
   end
endfunction
```

```
// Somme
function MM=somme(M1, M2)
   MM = min(M1+M2,ones(M1));
endfunction

// Différence
function MM=difference(M1, M2)
   MM = max(M1-M2,zeros(M1));
endfunction

// Foncer en multipliant
function MM=fonce1(M)
   MM = min(2*M,ones(M));
endfunction

// Foncer en ajoutant
function MM=fonce2(M, k)
   MM = min(M+k,ones(M));
endfunction

// Lettres
S=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,1,1,1,1,0,0,0;
0,0,0,1,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,1,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,1,1,1,1,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,1,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,1,0,0,0;
0,0,0,1,1,1,1,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
L=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0.5,0.5,0.5,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;]
```

```
// Affichage d'une matrice (N, N) avec T teintes
N = 100; T = 200;
M = zeros(N,N);
for i = 1:N
   M(i,:) = tirage_entier(N,0,T-1)/(T-1);
end
affiche_matrice(M);

// Poisson
P=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0.25,0.5,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0.25,0.5,0,0,0,0,0.5,0.5,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0.25,0.25,0.5,0,0,0,0.5,0.25,0.5,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0.25,0.25,0.5,0,0,0,0.5,0.25,0.5,0,0;
0,0,0,0,0,0,0.5,0.5,0,0,0.25,0.25,0.5,0.5,0.5,0.25,0.25,0.5,0,0;
0,0,0,0,0,0.5,0.25,0,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.5,0.5,0.5,0,0,0;
0,0,0,0,0.5,0.25,0,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.5,0.25,0.5,0,0;
0,0,0,0.75,0.25,0,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,1,0.25,0.25,0.5,0.5,0.75,0.75,0,0;
0,0,0.75,0.25,0,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.5,0.5,0.5,0.75,0,0;
0,0,0.75,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.25,0.5,0.5,0.5,0.5,0.75,0.75,0.5,0.75,0,0;
0,0,0,1,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,1,0,0,0;
0,0,0,1,1,0.25,0.75,0.25,0.75,0.25,0.75,0.25,0.75,0.75,1,0.75,1,0,0,0;
0,0,1,0.75,1,1,1,0.75,0.75,0.75,0.75,0.75,1,1,1,1,0.75,1,0,0;
0,0,1,1,0,0,0,1,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0;
0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
```



Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour le cycle terminal
général et technologique

Mesure et incertitudes

juin 2012

Sommaire

Introduction

« Une erreur peut devenir exacte, selon que celui qui l'a commise s'est trompé ou non. »
Pierre Dac ; Les pensées - Ed. du Cherche Midi (1972)

Ce document a pour vocation de présenter la vision probabiliste de l'erreur, développée depuis environ trois décennies par le Bureau international des poids et mesures (BIPM) et qui a permis d'installer un consensus international dans l'expression de l'incertitude de mesure.

Il se veut être une ressource pour les enseignants de sciences physiques et de mathématiques des lycées.

Pour les enseignants de sciences physiques elle veut donner à comprendre les raisons et les mécanismes mis en œuvre derrière les formules qui sont appliquées dans les estimations de mesures de grandeur, par exemple dans le programme de première STL, www.education.gouv.fr/cid55406/mene1104103a.html en complétant ainsi les documents déjà parus : *Nombres, mesures et incertitudes* (Inspection générale Sciences Physiques et Chimiques) http://eduscol.education.fr/pid23213-cid46456/ressources-pour-le-college-et-le-lycee.html

Pour les enseignants de mathématiques, elle donnera des exemples d'utilisation des notions probabilistes enseignées au lycée, en particulier en liant la notion d'erreur à celle de variable aléatoire, celle d'incertitude-type avec celle d'écart-type.

Outre la nécessité d'une connaissance partagée sur un sujet qui relève des deux disciplines, ce domaine du calcul d'incertitude devrait donner la possibilité de travaux communs développés par les enseignants de mathématiques et de sciences physiques.

L'ambition reste cependant modeste, notamment dans les outils présentés ; une bibliographie proposée en fin de document donne des références pour ceux qui souhaiteraient approfondir le sujet, en particulier dans l'étude de l'incertitude des mesures obtenues à partir de données corrélées ou appariées ou encore dans le cas de données obtenues en faible nombre.

Vision probabiliste : pourquoi, alors qu'on travaille sur des données statistiques ? Essentiellement parce qu'on est dans une activité de modélisation et que l'on cherche à passer de quelques observations à une caractéristique de l'ensemble de toutes les observations possibles, que des données obtenues on va chercher à induire des connaissances sur des variables aléatoires, qu'à partir d'un nombre fini de données on va estimer une connaissance sur une infinité de possibilités, et en particulier qu'on va donner des renseignements sur des modèles considérés comme continus à partir d'un nombre fini d'observations. Il faut garder présent à l'esprit cette idée de modèle tout au long de ce document.

Cette brochure est conçue pour pouvoir être lue sans être arrêté par des difficultés dans des développements mathématiques qui sont renvoyés en annexe. On y trouvera également quelques compléments qui peuvent éclairer les choix faits.

I. Une vision probabiliste de l'erreur

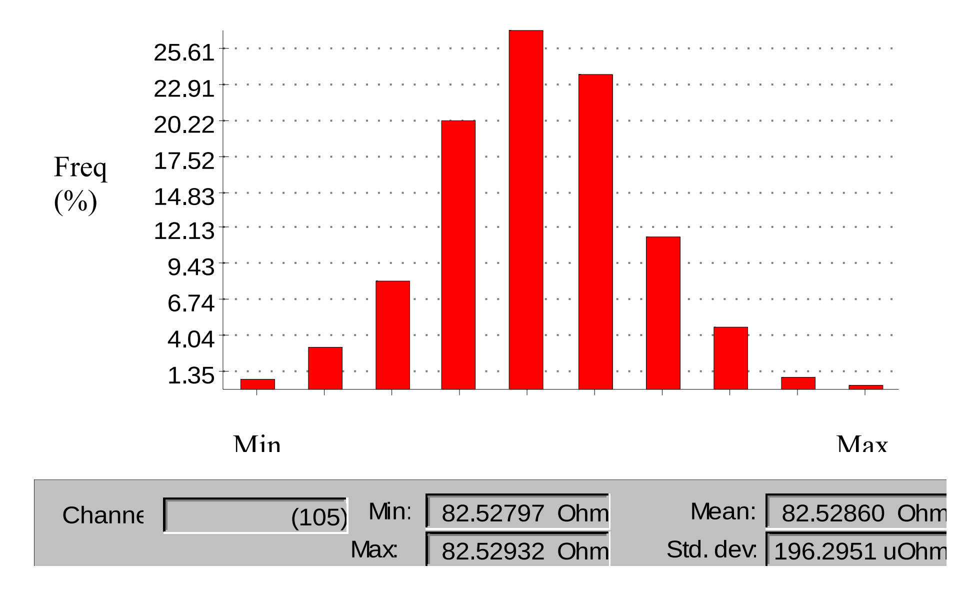
A. La notion d'erreur

1. Un exemple pour commencer

On souhaite mesurer une résistance. Le conducteur ohmique dont on souhaite mesurer la résistance est branché aux bornes d'un ohmmètre. On utilise une première technique de mesure utilisant « quatre fils » de liaison entre le conducteur ohmique et l'instrument.

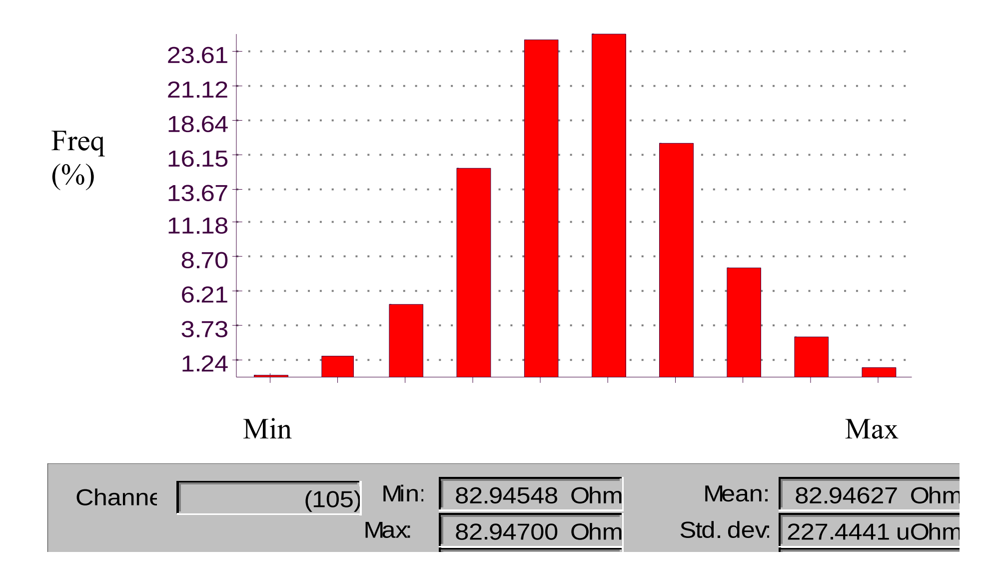
Notre instrument communique avec un ordinateur et l'on utilise un programme d'acquisition de données. Ce programme effectue 2000 mesures m de la résistance R, repère les valeurs m_{min} et m_{max}, divise l'intervalle [m_{min} ; m_{max}] en 10 intervalles (classes), calcule le nombre n de résultats dans chaque classe et affiche les résultats sous la forme d'un diagramme.

On obtient les résultats ci-dessous :



Recommençons la mesure précédente en configurant notre instrument en ohmmètre « deux fils », ce qui correspond à une mesure courante de la valeur d'une résistance.

On obtient désormais les résultats suivants :



Des questions se posent au vu de ces résultats :

1. Pourquoi une telle variabilité des résultats ?
2. Pourquoi ces deux méthodes donnent-elles des résultats différents ?
3. Et enfin, finalement quelle est **la** mesure de la résistance cherchée ?

On s'était aperçu depuis longtemps, notamment en astronomie, science qui possédait les instruments les plus précis, que :

- plusieurs mesurages d'une même caractéristique donnaient souvent des valeurs différentes,
- la répartition des résultats avait une « forme en cloche » : « *il n'y a aucun doute que les petites erreurs ont lieu plus souvent que les grandes* ».

Toute la problématique de la détermination de la mesure d'une grandeur est là : parmi tous ces résultats lequel choisir et comment estimer l'erreur qui pourrait être commise ?

2. Pourquoi une telle variabilité des résultats ?

Une série de mesures est soumise à des conditions environnementales qui modifient les résultats obtenus :

- la grandeur à mesurer n'est pas parfaitement définie, la largeur d'une table n'est pas un objet défini, la taille d'une pièce métallique dépend de sa position, la surface d'un liquide n'est pas plane, …
- les conditions environnementales évoluent (température, pression,…)
- l'instrument de mesure est source d'erreur (temps de réponse, exactitude, sensibilité)
- l'opérateur ne refait jamais la même mesure exactement dans les mêmes conditions (fatigue, erreurs de parallaxe, effet de ménisque dans une pipette…)

Une mesure comporte en général plusieurs opérations dont chacune peut être source de variabilité. Il sera important de savoir distinguer les sources de variabilité importante de celles qui sont négligeables.

Précisons quelques termes de vocabulaire du domaine de la métrologie et qui vont être employés :

Mesurage : ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur.

Mesurande : grandeur particulière soumise à mesurage (longueur, masse, intensité,…).

« Valeur vraie » d'un mesurande : mesure que l'on obtiendrait par un mesurage parfait. On ne la connaît pas et on parle également de « valeur théorique ».

Grandeur d'influence : grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage.

3. La notion d'erreur

Si y_i est le résultat d'un mesurage et y_0 la « valeur vraie » du mesurande, l'erreur sur le résultat y_i est le nombre $e_i = y_i - y_0$

Ce concept d'erreur est idéal et les erreurs ne peuvent malheureusement pas être connues exactement.

Dans la problématique qui nous intéresse on va chercher à estimer une valeur y_0 du mesurande, et à quantifier l'erreur commise sur cette estimation.

Ainsi, la démarche visée est de fournir, autour du résultat d'un mesurage, un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.

4. Comment traiter de la variabilité : la « randomisation »

Dans les années 1960, dans les livres de sciences physiques qui présentaient les « Incertitudes des mesures et calculs approchés », on cherche à définir un majorant des erreurs, et on propose des théorèmes comme « l'incertitude absolue d'une somme ou d'une différence est la somme des incertitudes absolues ». Ainsi par exemple, si l'erreur sur la dimension des côtés c d'un carré est majorée par 1mm, l'erreur sur les dimensions du périmètre p de ce même carré est majorée par 4mm. On écrit alors par exemple $c = 12\text{mm} \pm 1\text{mm}$ et on en déduit que $p = 48\text{mm} \pm 4\text{mm}$

Quelle réalité représentent ces nombres ? Une erreur de 4mm est-elle possible, plausible, probable ? C'est cette idée qui sous tend la présentation qui va être proposée ci-dessous, donnant un aperçu du calcul d'incertitude de mesures tel qu'il se pratique aujourd'hui en laboratoire ou en milieu industriel.

Cependant, contrairement à l'exemple proposé en introduction, il sera rarement possible d'effectuer 2 000 mesures d'une même grandeur et il va falloir trouver un moyen de décrire la distribution des valeurs possibles des résultats d'un mesurage.

Un mesurage comporte en général plusieurs opérations dont chacune peut être source de variabilité. L'objet de l'étude des erreurs est de pouvoir préciser cette variabilité, et une façon de le faire est d'introduire le « hasard », un hasard qui peut résulter de notre ignorance (Dutarte, Piednoir). Une manière d'interpréter les résultats est de passer par une « randomisation », c'est-à-dire qu'**on explique la variabilité de résultats déterministes (il n'y a pas d'aléatoire dans les mesures) comme s'ils étaient des réalisations d'une variable aléatoire.**

Autrement dit, on remplace la notion d'erreur accidentelle par celle d'incertitude aléatoire : la variabilité de la mesure n'est pas un « accident » évitable, mais est inhérente au processus de mesurage si celui-ci est suffisamment sensible. (Robert, Treiner)

Si l'on répète le mesurage, on obtient une série de valeurs $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ que l'on considère comme les valeurs prises par une variable aléatoire Y et une série de valeurs $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ qui sont les erreurs définies sur chacune des observations ; ces valeurs sont considérées comme celles prises par une variable aléatoire E :

L'erreur de mesure est une variable aléatoire

On peut ainsi modéliser le mesurage par : $Y = y_0 + \mathrm{E}$

L'hypothèse fondamentale du traitement probabiliste de l'erreur est que la variable E obéit à une loi de probabilité « bien définie ».

L'objet du calcul d'incertitude sera de déterminer :

- **les paramètres de la loi de probabilité de *E*.**
- **un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.**

5. Les composantes de l'erreur

On envisage traditionnellement qu'une erreur possède deux composantes, à savoir une composante **aléatoire** et une composante **systématique.**

a) Composante aléatoire de l'erreur

L'**erreur aléatoire** Δ provient des variations temporelles et spatiales **non prévisibles** de grandeurs d'influence. Les effets de telles variations appelés effets aléatoires entraînent des variations pour les observations répétées du mesurande (bien que le mesurage soit effectué dans des conditions aussi constantes que possible).

L'erreur aléatoire est liée aux conditions opératoires

Bien qu'il ne soit pas possible de compenser l'erreur aléatoire d'un résultat de mesure, elle peut être réduite en augmentant le nombre d'observations.

b) Composante systématique de l'erreur

L'**erreur systématique ε** se produit sur un résultat de mesure à partir d'un **effet reconnu** d'une grandeur d'influence ; cet effet, appelé **effet systématique**, peut être **quantifié** et s'il est significatif par rapport à la précision requise du mesurage, **une correction** est appliquée au résultat.

Si nous reprenons l'exemple de départ, lors de la deuxième série de mesures, les fils de liaison de l'instrument au conducteur ont une résistance R_f.

Dans ces conditions, l'instrument ne mesure pas R mais R + R_f. Chaque mesure m_i est systématiquement plus grande que la valeur de R (des fils de 2 m de long et de faible section ont été utilisés).

La valeur moyenne $<m>$ des N mesures est plus grande de 0,4172… ohms que dans le cas précédent, passant de 82,5286…ohms pour « quatre fils » à 82,9462…ohms pour une méthode « deux fils », cette différence étant due à cette erreur systématique. Les N mesures m_i restent dispersées autour de $<m>$ caractérisant l'erreur aléatoire.

Si on utilise cette méthode à deux fils, une correction de 0,4172… ohms sera effectuée sur chaque résultat. Rien ne nous prouve cependant qu'il n'existe pas d'autres erreurs systématiques !

En général, la correction est une opération difficile car elle nécessite une connaissance approfondie du processus de mesure afin d'identifier au mieux les causes d'erreurs puis d'estimer les corrections à apporter.

Il existe de nombreuses sources d'erreurs systématiques, comme par exemple :

- l'effet des grandeurs d'influence (température, pression,....) ;
- l'erreur de justesse des instruments (décalage du zéro par exemple, chronomètre mal calibré,…) ;
- la position de l'objet mesuré ;
- la perturbation due à la présence des instruments d'observation.

Dans la pratique, différentes méthodes sont utilisées pour détecter et évaluer ces erreurs, comme par exemple :

- mesurer la même grandeur avec un instrument différent ;
- mesurer la même grandeur avec des méthodes différentes ;
- mesurer une grandeur étalon (contrôle de la justesse) ;
- mesurer un même mesurande dans des laboratoires différents.

L'erreur systématique peut être considérée comme une erreur « constante » qui affecte chacune des observations.

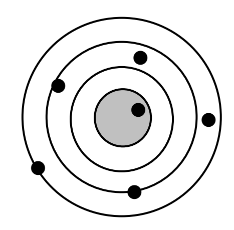
Le plus souvent on aura seulement une majoration de cette erreur « constante ».

L'erreur systématique d'un résultat de mesure ne peut être réduite en augmentant le nombre d'observations, mais par l'application d'une correction.

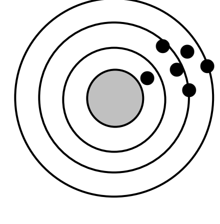
Les corrections étant faites le mieux possible, il subsiste un doute sur la valeur des corrections.

On admet que les variations de l'erreur systématique autour de la correction effectuée sont aléatoires, ce qui permet de supposer que l'erreur systématique ε **suit une loi de probabilité bien définie.**

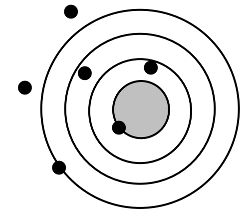
On peut illustrer ces notions d'erreurs systématique et aléatoire par le tir dans une cible :



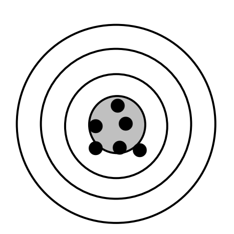
juste, mais pas fidèle
(valeurs centrées mais dispersées)
erreurs aléatoires



fidèle, mais pas juste
(valeurs décentrées mais resserrées)
erreurs systématiques



ni juste, ni fidèle
erreurs aléatoires et systématiques



fidèle et juste
erreurs faibles

Ce dessin n'est cependant qu'une vue théorique trompeuse, car en général, on ne connaît pas la cible, la dispersion nous renseigne sur les erreurs aléatoires, mais la présence d'erreur systématique est souvent difficile à déceler.

c) Modélisation du mesurage

On suppose que le résultat d'un mesurage a été corrigé pour tous les effets systématiques reconnus comme significatifs et qu'on a fait tous les efforts pour leur identification. On dit alors que la méthode de mesure est **correcte.**

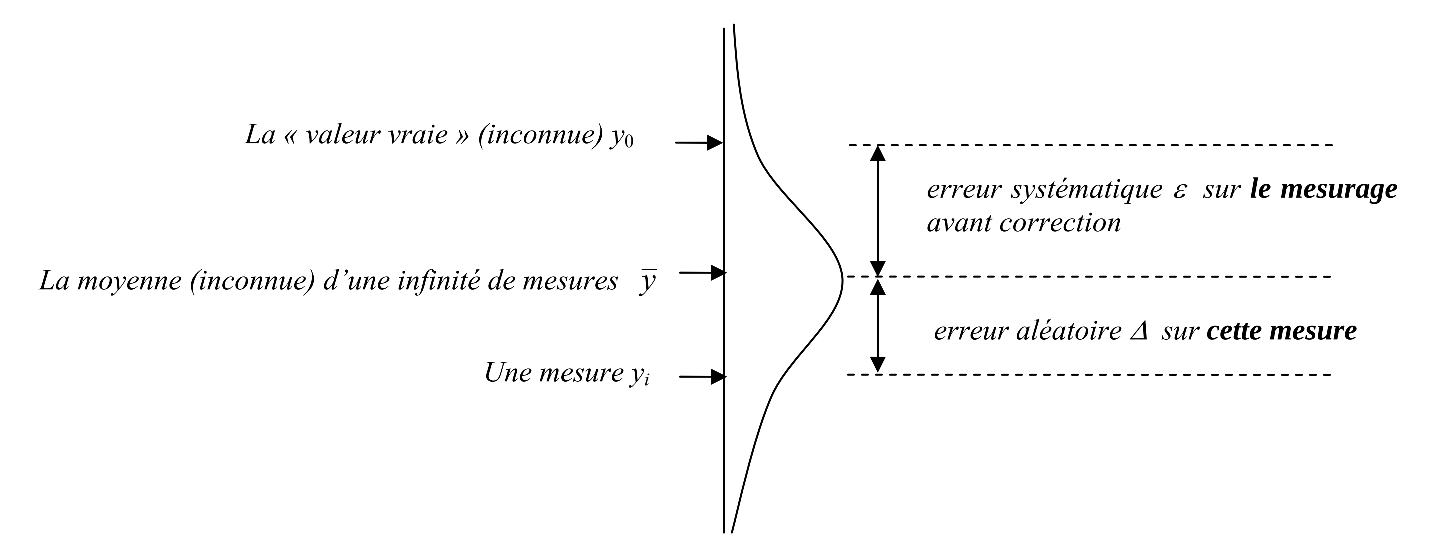
On peut donc modéliser le mesurage par : $Y = y_0 + \varepsilon + \Delta$

Si on imagine pouvoir faire une infinité de mesures (ce qui revient à considérer la distribution de toutes les mesures), **l'erreur systématique** ε sur un mesurage est le décalage entre la « valeur vraie » du mesurande et la moyenne (théorique) de l'infinité de toutes les mesures qui pourraient être effectuées.

C'est la « *moyenne qui résulterait d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans des conditions de répétabilité, moins une valeur vraie du mesurande.* » (VIM 93 ou GUM 08)

Comme on le verra plus loin (ce résultat est justifié en annexe), la moyenne est en général la meilleure estimation de la grandeur mesurée, et **l'erreur aléatoire** Δ sur un mesurage représente la différence entre cette moyenne et les résultats obtenus. C'est le « *résultat d'un mesurage moins la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans des conditions de répétabilité.* » (VIM 93)

Le schéma ci-dessous en donne une illustration :



Une hypothèse pragmatique : il n'y a pas de raison objective pour que les résultats se répartissent plus d'un côté que de l'autre de la « valeur vraie »

On fera l'hypothèse dans la suite que la méthode de mesure est correcte, ce qui se traduit mathématiquement par :

> l'espérance mathématique des variables ε et Δ est nulle et on a ainsi $E(Y) = y_0$

Donner une mesure du mesurande va nécessiter la détermination d'une estimation de l'espérance et de l'écart type (ou plus précisément de la variance) de cette variable *Y*.

B. L'incertitude

Le mot incertitude signifie doute ; l'incertitude du résultat d'un mesurage reflète l'impossibilité de connaître exactement la valeur du mesurande.

Dans cette vision probabiliste de l'erreur, le concept d'incertitude est défini en accord avec cette approche :

> **Incertitude** : paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande.

1. Notion d'incertitude-type

Nous avons vu que le mesurage peut être modélisé par une variable aléatoire *Y* d'espérance y_0 et que l'on cherche à caractériser la dispersion des valeurs que peut prendre cette variable aléatoire. Une mesure de cette dispersion peut être obtenue à partir de l'écart-type de la variable aléatoire *Y*.
La détermination de l'incertitude sur le mesurage va être exprimée en fonction de l'écart-type de la variable aléatoire *Y*.

> L'écart-type de Y est appelé **incertitude-type** sur le résultat du mesurage. On note généralement u(y) cette incertitude-type sur Y.

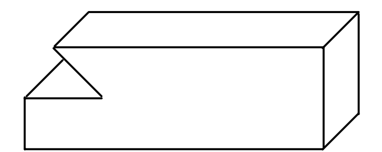
L'essentiel de la démarche va consister à déterminer la loi de probabilité suivie par *Y* (ou par *E*) et à estimer la valeur de l'écart-type de *Y* (ou de *E*).

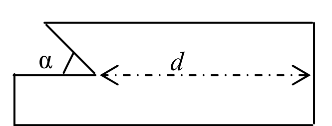
Dans l'exemple de la détermination de la résistance, la donnée des 2 000 résultats permet d'avoir une bonne approximation de la loi de la variable R (on pourrait vérifier qu'elle est gaussienne) et si on fait l'hypothèse qu'on a maîtrisé les erreurs systématiques, une estimation de l'écart-type donné par le tableur est d'environ 200μΩ.

Cependant, il n'est toujours possible d'obtenir une estimation de la grandeur par un recueil de données et Y peut dépendre de plusieurs autres variables.

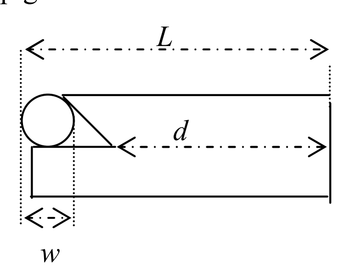
Prenons un exemple :

Avant de lancer la production en série, on veut estimer l'incertitude sur la dimension d en fond de rainure de la pièce ci-dessous.



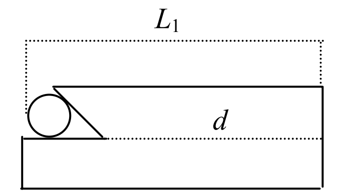


Pour déterminer d, on place une pige de diamètre w dans la rainure et on mesure une distance L

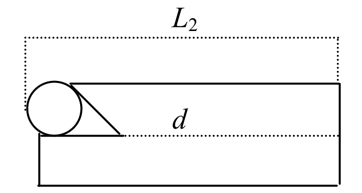


On peut montrer que $d = L - \frac{w}{2}\left(1 + \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}\right)$ et d est alors une fonction de L, w et α.

On peut s'affranchir du contrôle de la mesure de α, qui n'est pas la plus aisée. Pour cela on effectue deux séries de mesures indépendantes de la longueur L avec deux piges de diamètres différents ; avec la pige de diamètre w_1, on obtient une longueur L_1 et avec la pige de diamètre w_2, une longueur L_2.



Avec la pige de diamètre w_1



Avec la pige de diamètre w_2

En utilisant la formule déterminée précédemment, on montre alors que $d = \frac{L_1 w_2 - L_2 w_1}{w_2 - w_1}$

Cette fois d est une fonction de L_1, L_2, w_1 et w_2.

On voit apparaître une double difficulté, d'une part l'accès aux valeurs de d n'est pas direct et d'autre part les données sur les variables dont dépend d ne sont pas du même ordre ; pour certaines variables, L_1, L_2, un mesurage va donner un ensemble de données que l'on va pouvoir traiter statistiquement, alors que pour d'autres, comme w_1 et w_2 on accédera à des données proposées par le constructeur.

Bien que la problématique reste la même, à savoir se donner une idée de la distribution des valeurs que prend *d*, évaluer l'incertitude sur *d* va demander de combiner deux modes d'évaluation, l'un s'appuyant sur une analyse statistique et l'autre sur une modélisation probabiliste.

2. Différents modes d'évaluation de l'incertitude sur une grandeur

Si on fait varier la totalité des grandeurs dont dépend le résultat d'un mesurage, l'incertitude-type sur chacune des variables peut être évaluée par des moyens statistiques. Cependant, comme cela est rarement possible en pratique, l'incertitude-type sur certaines variables peut être estimée par utilisation d'un modèle probabiliste décrivant la loi de propagation de l'erreur sur cette variable.

Si une grandeur est estimée par des moyens statistiques, on dit qu'on a une évaluation de type A de l'incertitude-type sur cette grandeur.

Si une grandeur est estimée par un modèle probabiliste, on dit qu'on a une évaluation de type B de l'incertitude-type sur cette grandeur.

3. Évaluation de type A d'une incertitude-type

On suppose dans ce cas que la grandeur *X* est estimée à partir d'une série statistique (on établit par exemple une série de 15 mesures de la longueur d'une pièce)

On notera $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un *n*-échantillon de *X*, où X_i représente la variable aléatoire associée à la $i^{\text{ème}}$ mesure de la grandeur *X*. Les *n* mesures $x_1, x_2, ..., x_n$ constituent un échantillon des valeurs prises par *X*. La variable aléatoire $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ a pour espérance celle de *X* et la moyenne arithmétique des valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ est en général une bonne estimation de l'espérance *E*(*X*) de la variable *X*.

On prend donc, en général, comme estimation ponctuelle de X le nombre $\overline{x}$ *défini par :*

$$\overline{x} = \frac{x_1 + ...x_n}{n}$$

Dans l'exemple du calcul de résistance, on prend 82,5286…ohms (on réserve le débat sur les chiffres significatifs pour plus tard) comme estimation de la résistance mesurée.

Pour une grandeur *X* estimée à partir de *n* observations répétées indépendantes (ce qui signifie que les variables X_i sont indépendantes), obtenues dans les mêmes conditions de mesure, $x_1, x_2, ..., x_n$ (ce qui impliquerait que chaque opération de mesurage nécessite le démontage et le remontage du dispositif de mesure !), le nombre $s^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ est la « meilleure » estimation de la variance de *X* notée $\sigma^2(X)$.

s(*X*) représente une estimation de la dispersion $\sigma(X)$ des valeurs prises par *X* autour de la moyenne *E*(*X*).

s(X) est appelé écart-type expérimental d'une mesure ou écart-type de répétabilité.

Un résultat classique de statistique sur les lois d'échantillonnage montre que la « meilleure » estimation sur $\sigma^2(\overline{X})$, variance de la moyenne $\overline{X}$ de *X*, est $s^2(\overline{X}) = \frac{s^2(X)}{n}$

L'écart-type expérimental de la moyenne $s(\overline{X})$ est utilisé comme estimation de l'incertitude de la moyenne $\overline{X}$.

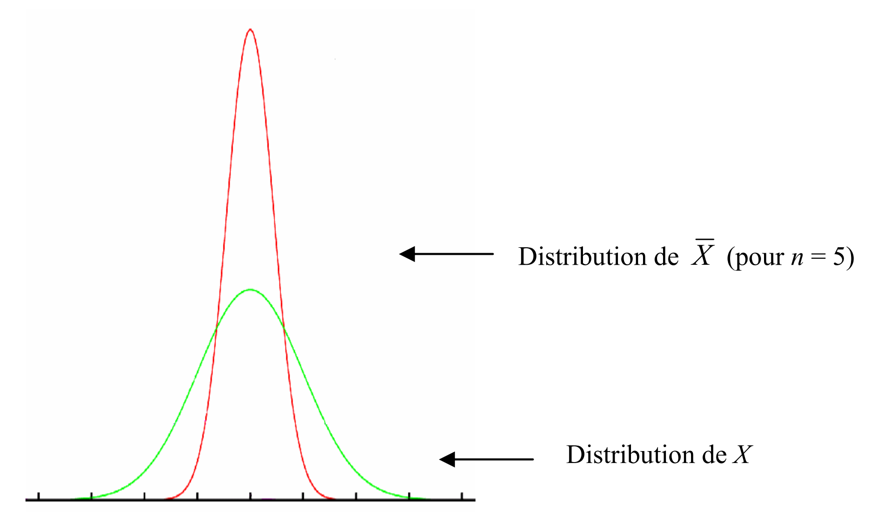
En conclusion :

> *Si une grandeur X est estimée à partir de n observations répétées indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, alors l'incertitude-type u(x) sur son estimation* $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ *est* $s(\bar{X}) = \frac{s(X)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}}$

Il faut bien comprendre ce que signifie ce résultat, c'est une des difficultés souvent rencontrée :

$\sigma(X)$ est le paramètre qui caractérise la dispersion des valeurs prises par X et caractérise l'incertitude sur **une** mesure. Si on effectue n mesures, $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots x_n}{n}$ est une moyenne parmi d'autres possibles (si on refaisait à nouveau n mesures, on obtiendrait une autre moyenne) ; c'est un résultat dans la population de l'infinité de moyennes possibles.

La théorie des probabilités montre que la distribution de l'ensemble des moyennes est bien moins dispersée (la dispersion est divisée par $\sqrt{n}$) que l'ensemble des mesures uniques. Cela confirme l'idée « pragmatique » que l'estimation à partir d'une moyenne est « meilleure » que sur une mesure seule.



Distributions comparées : X et $\bar{X}$

Cependant dans la pratique, pour des problèmes de coût, on ne pourra effectuer n mesures et on aura souvent une estimation de $s(X)$, produite dans des conditions similaires par un autre opérateur ou à un autre moment que celui de l'évaluation de l'incertitude. On fait l'hypothèse que les mesures antérieures constituent une bonne image de la dispersion des mesures attachées à la procédure employée.

La formule précédente n'est donc pas applicable.

On considère alors que l'estimation de $s(X)$ *reste l'écart-type expérimental d'une mesure.* Si on effectue p nouvelles observations indépendantes, alors on prendra $u(x) = \frac{s(X)}{\sqrt{p}}$

> *Si une grandeur X est estimée à partir de p observations répétées indépendantes* $x_1, x_2, \dots, x_p$ *et si s(X) est l'écart-type expérimental d'une mesure (obtenu auparavant à partir de n valeurs) alors l'incertitude-type u(x) sur son estimation* $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_p}{p}$ *est* $\frac{s(X)}{\sqrt{p}}$

Exemple : On effectue 20 mesures du diamètre d'un cylindre à l'aide d'un pied à coulisse et on obtient $s(X) = 0{,}018$ mm

Si l'on effectue l'évaluation de l'incertitude à partir de ces 20 observations, l'incertitude-type retenue sur la moyenne de ces 20 observations sera $u(x) = \frac{0{,}018}{\sqrt{20}}$ mm

Si on estime que cette évaluation, 0,018 mm, représente convenablement l'écart-type de la dispersion d'une mesure de ce cylindre autour de sa moyenne, on peut prendre $s(X) = 0{,}018$ mm comme l'écart-type expérimental d'une mesure établie à l'aide du même type d'instrument. C'est cette valeur qui sera utilisée pour une nouvelle mesure.

L'incertitude-type sur une mesure sera alors $u(x) = 0{,}018$ mm

L'incertitude-type sur la moyenne de trois mesures ultérieures sera alors $u(x) = \frac{0{,}018}{\sqrt{3}}$ mm

Une remarque : on voit sur cet exemple l'ambigüité qui peut surgir de cette notation $u(x)$ qui est employée pour désigner un écart-type représentant une incertitude-type sur la grandeur X, mais qui dépend de la procédure utilisée. D'où la nécessité, comme nous le verrons dans les exemples traités de bien préciser les conditions du mesurage.

Reprenons l'exemple traité de la dimension en fond de rainure.

On effectue les deux séries de dix mesures de manière indépendante et on obtient, en mm :

L1	52,36	52,35	52,34	52,35	52,36	52,34	52,35	52,35	52,36	52,34
L2	59,17	59,18	59,17	59,17	59,19	59,18	59,18	59,17	59,18	59,19

L'écart-type de répétabilité obtenu sur **une** mesure de L_1 est égal à 8,164 x 10^{-3} mm et celui sur une mesure de L_2 est égal à 7,888 x 10^{-3} mm.

Pour obtenir l'écart-type retenu **sur la moyenne** des 10 mesures de L_1, on prendrait cette même valeur $8{,}164 \times 10^{-3}$ mm divisée par $\sqrt{10}$.

4. Évaluation de type B d'une incertitude-type

Lorsque l'estimation d'une grandeur X ne peut être obtenue à partir d'observations répétées, la variance estimée $u^2(x)$ ou l'incertitude-type $u(x)$ sont évaluées par un jugement fondé sur des lois de probabilité supposées a priori.

La détermination de la loi de l'erreur est liée à la maîtrise du processus de mesure et à l'expérience de l'opérateur ; elle dépend d'un ensemble d'informations qui peuvent être :

- des résultats de mesures antérieures ;
- l'expérience ou la connaissance du comportement et des propriétés des matériaux et instruments utilisés ;
- de facteurs d'influence (température, pression,.....) ;
- des spécifications du fabricant ;
- les données fournies par des certificats d'étalonnage ou autres ;
- l'incertitude assignée à des valeurs de référence et donnée avec ces valeurs.

En annexe 4, on trouvera des exemples de lois utilisées dans les calculs d'incertitude ainsi que les incertitudes-types correspondantes. Les lois qui sont rencontrées le plus souvent sont les lois normales et les lois rectangulaires (ou uniformes).

La loi normale ou gaussienne (détaillée en annexe 6) est centrale dans la théorie des erreurs. On constate que le plus souvent, la distribution des erreurs aléatoires est normale (on ne peut pas le montrer mais on peut le vérifier par des tests de normalité), et que même si ce n'est pas le cas, la distribution des moyennes l'est généralement.

Dans l'exemple des mesures de la résistance, la forme du diagramme peut laisser penser raisonnablement que la distribution de l'ensemble des valeurs est normale.

La loi rectangulaire ou uniforme est utilisée souvent en calcul d'incertitude, lorsqu'on ne connaît qu'une majoration de l'erreur, ce qui est souvent le cas pour les erreurs systématiques.

Ainsi si on peut raisonnablement faire l'hypothèse que les erreurs se situent entre deux nombres a et b, la loi rectangulaire sur $[a, b]$ (elle vaut 1 entre a et b et 0 ailleurs) est de toutes les lois définies sur ce même intervalle $[a, b]$, celle qui a le plus grand écart-type ; pour cela on la nomme parfois la « loi du pire » en ce sens qu'on ne minimise pas l'écart-type qui caractérise l'incertitude-type.

5. Détermination d'incertitudes de type B

Le travail va être de choisir, en fonction des informations recueillies ou des connaissances des processus, la loi de probabilité qui lui semble être le mieux représentative du phénomène étudié.

Ainsi, si on sait raisonnablement que les valeurs de la grandeur X sont comprises entre $M - d$ et $M + d$, le choix de la loi de propagation de X entre $M - d$ et $M + d$ va décider de l'incertitude-type retenue :

Si on suppose que la loi est normale on prendra $u(x) = \dfrac{d}{3}$

Si on suppose que la loi est triangulaire, on prendra $u(x) = \dfrac{d}{\sqrt{6}}$

Si on suppose que la loi est rectangulaire on prendra $u(x) = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$

On remarque sur les résultats précédents que l'hypothèse d'une loi triangulaire est un bon compromis entre les lois normales et rectangulaires.

En annexe 5, on trouvera les dispositions qui, sans information supplémentaire, sont prises dans la pratique.

6. Recommandations pratiques

a) Choix des composantes de l'incertitude

Dans la pratique il existe de nombreuses sources possibles d'incertitude dans un mesurage, telle que :

- la définition incomplète du mesurande ;
- un échantillonnage non représentatif ;
- une connaissance insuffisante ou un mesurage imparfait des conditions d'environnement ;
- un biais (dû à l'observateur) dans la lecture des instruments analogiques ;
- la résolution de l'instrument ;
- des valeurs inexactes des étalons et matériaux de référence ;
- des valeurs inexactes des constantes et paramètres retenus (obtenus par des sources extérieures par exemple) ;
- des approximations dans la méthode de calcul des incertitudes ou dans le processus de mesure.

Ces sources ne sont pas nécessairement indépendantes, et certaines contribuent aux variations entre les observations répétées du mesurande dans des conditions identiques.

Il est important de ne pas compter deux fois les mêmes composantes de l'incertitude. Si une composante de l'incertitude provenant d'un effet particulier est obtenue par une évaluation de type B, elle ne doit être introduite comme composante indépendante dans le calcul de l'incertitude finale du résultat de mesure que dans la limite où l'effet ne contribue pas à la variabilité des observations répétées.

Par exemple, la résolution d'un instrument de mesure, de sensibilité adaptée au mesurage, contribue à la variabilité des observations répétées, par la précision des résultats obtenus. Par contre une erreur éventuelle de justesse de cet instrument n'y contribue pas.

b) Incertitude-type sur une grandeur

Le mesurage d'une grandeur Y peut être modélisé par Y = $y_0 + E_1 + E_2 + ...E_n$ où les variables $E_1, E_2, ..., E_n$ représentent les différentes composantes **indépendantes** de l'erreur.
Un résultat statistique montre que $u^2(Y) = u^2(E_1) + u^2(E_2) + ...u^2(E_n)$

Par exemple :

Plaçons nous dans le cas où *Y* représente le mesurage d'une pièce dans des conditions d'environnement contrôlées. On suppose qu'on effectue une série d'observations à l'aide d'un instrument de mesure et que les composantes retenues de l'erreur amènent au calcul de :

- u_A , incertitude-type déterminée statistiquement sur la série des observations ;
- u_B incertitude-type déterminée sur la justesse de l'instrument de mesure.

Alors l'incertitude retenue sur la grandeur *Y* est : $u^2(Y) = {u_A}^2 + {u_B}^2$

Dans l'exemple « fond de rainure » traité, si les mesures de longueurs sont effectuées à l'aide d'un pied à coulisse au 1/100 dont l'erreur de justesse maximale est de 30µm, alors l'incertitude sur une mesure de L_1 est :

- u_A = 0,00816 mm et
- $u_B = \dfrac{0,030}{\sqrt{3}}$ mm (instrument vérifié)

On a alors $u^2(L_1) = {u_A}^2 + {u_B}^2$ = 0,00036658…mm et on en déduit que $u(L_1)$ = 0,0190...mm
(Nous préciserons les règles d'arrondissage en fin de document)

Remarque :

L'instrument de mesure est adapté au mesurage, les erreurs attachées à la résolution de l'instrument sont prises en compte dans la variabilité des résultats des mesures.

Sinon il faudrait prendre en compte l'erreur attachée à la résolution de l'instrument de mesure. Pour s'en convaincre, il suffit d'imaginer des mesures prises avec un instrument peu précis (comme par exemple un mètre de charpentier) ; toutes les valeurs seraient identiques et l'écart-type de répétabilité égal à zéro !

II. Incertitude-type composée

Reprenons l'exemple de la détermination des incertitudes sur la dimension en fond de rainure (proposé page 8) ; on cherche à évaluer l'incertitude sur *d* défini par $d = \dfrac{L_1 w_2 - L_2 w_1}{w_2 - w_1}$, *d* est une fonction de L_1, L_2, w_1 et w_2 ; il va falloir déterminer cette incertitude en fonction des incertitudes sur L_1, L_2, w_1 et w_2, c'est-à-dire l'écart-type de la variable aléatoire modélisant *d*.

C'est l'objet de ce paragraphe.

A. Incertitude-type composée sur un mesurage

En général pour déterminer l'incertitude de mesure associée à un résultat, il faut décrire le processus de mesure et déterminer le modèle mathématique qui relie la valeur mesurée *y* du mesurande *Y* aux différentes grandeurs qui interviennent dans le processus :

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots.. X_n)$$

où les X_i sont des grandeurs mesurées, des corrections d'erreurs systématiques, des constantes physiques, des grandeurs d'influence estimées,....

On connait les lois de répartition des erreurs sur chacune des grandeurs X_i et donc l'incertitude-type $u(x_i)$ sur chacune de ces grandeurs. L'objet de ce paragraphe est de déterminer l'écart-type sur la variable *Y* qui représentera l'incertitude-type sur *Y*, appelée incertitude-type composée de *Y* et notée $u_c(y)$

B. Détermination de l'incertitude-type composée

Dans le cas général, les erreurs étant considérées comme « petites » devant les valeurs des grandeurs, on utilise la formule ci-dessous (dont on trouvera une justification en annexe 7)

Si $Y = f(X_1, X_2, \ldots.. X_n)$ avec $X_1, X_2, \ldots.. X_n$ indépendantes alors on prend généralement

$$u_c^{\,2}(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$$

où $u(x_i)$ est l'incertitude-type sur x_i et $u_c(y)$ est l'incertitude-type composée sur y

L'expression ci-dessus s'écrit également $u_c^{\,2}(y) = \sum_{i=1}^{n} (c_i u(x_i))^2$ avec $c_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mu)$ où μ représente la valeur de référence pour chacune des variables (une donnée ou une moyenne de données).

La variance composée $u_c^{\,2}(y)$ peut ainsi être considérée comme une somme de termes dont chacun représente la variance estimée de la contribution de chaque variable x_i.

Nous verrons, dans la présentation des résultats, que cette écriture permet de repérer le poids relatif de chacun des facteurs intervenant dans l'estimation de l'incertitude et ainsi prendre des décisions quant aux actions à mettre en œuvre pour diminuer cette incertitude.

Dans le cas de l'exemple de la détermination de la dimension *d* en fond de rainure, on a vu que $d = \dfrac{L_1 w_2 - L_2 w_1}{w_2 - w_1}$

On obtient :

$$c_1 = \frac{\partial d}{\partial L_1} = \frac{w_2}{w_2 - w_1} = 3, \qquad c_2 = \frac{\partial d}{\partial L_2} = \frac{-w_1}{w_2 - w_1} = -2,$$

$$c_3 = \frac{\partial d}{\partial w_1} = \frac{-(L_2 - L_1)w_2}{(w_2 - w_1)^2} = -5{,}121 \text{ et enfin } c_4 = \frac{\partial d}{\partial w_2} = \frac{(L_2 - L_1)w_1}{(w_2 - w_1)^2} = 3{,}414$$

En prenant w_1 = 8mm, w_2 = 12mm, pour valeur de L_1 la moyenne 52,35mm des 10 valeurs et pour valeur de L_2 la moyenne 59,178mm des 10 valeurs.
Et par conséquent $u_c^{\,2}(d) = (3u(L_1))^2 + (2u(L_1))^2 + (5{,}121u(w_1))^2 + (3{,}414u(w_2))^2$
Le calcul explicite de l'incertitude composée sur *d* sera effectué en fin du document.

Remarque 1 :

Le cas où les variables ne sont manifestement pas indépendantes est nettement plus délicat à traiter. C'est le cas par exemple lorsqu'on détermine à l'aide d'un même multimètre, intensité et différence de potentiel ; il est alors nécessaire d'introduire la covariance entre les couples de variables non indépendantes. On pourra alors se reporter au guide ISO sur le calcul d'incertitude qui proposera des formules à appliquer.

Dans le cas où les incertitudes sont estimées à partir d'observations, un moyen de vérifier si les variables *X* et *Y* sont indépendantes, sans avoir recours au coefficient de corrélation, est de comparer les écarts-types de *X* + *Y* et *X* – *Y* ; lorsque les résultats sont très différents, on ne peut pas considérer les variables indépendantes.

Sur l'exemple des séries de mesures de L_1 et L_2 :

L1	52,36	52,35	52,34	52,35	52,36	52,34	52,35	52,35	52,36	52,34
L2	59,17	59,18	59,17	59,17	59,19	59,18	59,18	59,17	59,18	59,19
L1 + L2	111,53	111,53	111,51	111,52	111,55	111,52	111,53	111,52	111,54	111,53
L1 – L2	– 6,81	– 6,83	– 6,83	– 6,82	– 6,83	– 6,84	– 6,83	– 6,82	– 6,82	– 6,85

On a alors var($L_1 - L_2$) = 0,01135292 et var($L_1 + L_2$) = 0,01135293

On peut remarquer que les deux variances sont très proches, ce qui incite à penser que les variables L_1 et L_2 sont indépendantes (ce qui est assez naturel car la détermination des deux dimensions nécessite un montage et démontage des piges).

Remarque 2 : si *Y* est de la forme $Y = kX_1^{p_1} X_2^{p_2} \ldots\ldots X_n^{p_n}$, un calcul simple des dérivées partielles montre qu'à partir de la formule déterminant $u_c(y)$, on peut écrire une relation déterminant l'incertitude-type composée relative $\frac{u_c(y)}{|y|}$ en fonction des incertitudes-types composées relatives $\frac{u(x_i)}{|x_i|}$. On obtient alors : $(\frac{u_c(y)}{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (p_i \frac{u(x_i)}{x_i})^2$.

III. Incertitude élargie

A. Notion d'incertitude élargie

1. Incertitude élargie

Rappelons la problématique développée :
Dans les chapitres précédents, on a modélisé la mesure d'une grandeur *Y* comme variable aléatoire, et on a déterminé une approximation de l'écart-type de cette variable que l'on a noté $u_c(y)$.

L'intention de départ est de fournir, autour du résultat d'un mesurage, un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il contienne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande *Y*.
Après l'estimation de l'écart-type de *Y*, il reste à estimer la loi de probabilité suivie par cette variable.

Idéalement, on aimerait déterminer un nombre *k* tel que si *Y* est estimé par *y* avec une incertitude $U(y) = k\,u_c(y)$, alors on peut affirmer que : $y - U(y) \leq Y \leq y + U(y)$ avec une probabilité *p* proche de 1.

U*(*y*) notée également *U* est appelée incertitude élargie sur *Y

2. Détermination du facteur d'élargissement *k*

La détermination de *k* correspond à ce qu'on appelle en statistique la détermination d'un intervalle de confiance à un niveau de confiance *p*.
Pour obtenir ce facteur *k*, il est nécessaire d'avoir une connaissance de la loi de probabilité de la variable représentée par le résultat de mesure.
Dans la pratique nous n'avons au mieux qu'une estimation de cette loi et de l'écart-type associé.

Cependant, les propriétés de la loi normale (voir annexe 6) montrent que $\dfrac{Y-y}{u_c(y)}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $u_c(y)$ n'est pas dominée par une composante d'incertitude-type obtenue par une évaluation de type A fondée sur quelques observations, ni par une composante d'incertitude-type obtenue par une évaluation de type B fondée sur moins de trois lois rectangulaires ;
- les composantes de $u_c^2(y)$ fondées sur des lois normales sont significativement beaucoup plus grandes que toute autre composante.

Pour de nombreux mesurages pratiques dans une large étendue de domaines, les conditions suivantes prédominent :

- l'estimation *y* du mesurande *Y* est obtenue à partir des estimations x_i d'un nombre significatif de grandeurs d'entrée X_i qui peuvent être décrites par des lois de probabilités raisonnables telles que des lois normales ou rectangulaires ;
- les incertitudes-types $u(x_i)$ de ces estimations, qui peuvent être obtenues par des évaluations de type A ou de type B, contribuent de manière comparable à l'incertitude-type composée $u_c(y)$ du résultat de mesure y ;
- l'approximation linéaire supposée par la loi de propagation de l'incertitude est convenable.

Dans ces conditions, on peut supposer que la loi de probabilité suivie par la variable *Y* est normale en raison du théorème limite central (voir annexe 6) ; et $u_c(y)$ peut être considéré comme une estimation raisonnablement fiable de l'écart-type de cette loi normale.

On sait que si une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ, alors la probabilité que l'on ait $m - 1{,}96\sigma \leq X \leq m + 1{,}96\sigma$ est égale à 0,95.

Dans la pratique, on prend le plus souvent *k = 2* ce qui signifie que dans les conditions décrites ci-dessus on peut penser raisonnablement que la procédure suivie a plus de 95% de chances d'aboutir à un intervalle contenant effectivement la « valeur vraie » de Y ou encore que : l'intervalle $[y - 2u_c(y); y + 2u_c(y)]$ contient environ 95% des valeurs que l'on peut raisonnablement associer à la grandeur Y.

On dit alors que l'incertitude élargie $U = 2\ u_c(y)$ définit un intervalle $[y - U(y); y + U(y)]$ ayant un niveau de confiance d'environ 95 %.

Dans certains cas on peut prendre *k = 3* et considérer qu'avec $U = 3\ u_c(y)$ on définit un intervalle ayant un niveau de confiance d'environ 99 %.

Si les conditions d'expérimentation précisées ci-dessus ne sont pas vérifiées, on ne peut pas faire l'hypothèse que la variable Y suit approximativement une loi normale. Dans ce cas on doit affiner la recherche de la loi de Y et recourir à d'autres lois comme la loi de Student.

B. Présentation des résultats

1. Arrondissage

Les résultats mesurés ou calculés peuvent comporter des chiffres qui n'ont pas de sens en regard à l'incertitude déterminée sur la mesure.
Il est donc nécessaire de procéder à un arrondissage du résultat obtenu.

Les règles à appliquer sont données ci-dessous :

- Si l'incertitude élargie est U, alors on arrondit de façon que l'erreur due à l'arrondissage soit inférieure à 1/10 de l'incertitude U retenue ;
- Le dernier chiffre retenu suit les règles d'arrondissage « au plus près » habituelles.

Remarques :

Pour conserver une cohérence, les incertitudes seront données avec au plus deux chiffres significatifs. Tout arrondissage des incertitudes se fera, par prudence, par excès.

Pour limiter le cumul d'erreurs sur les arrondis, l'arrondissage est effectué sur le résultat final. Pour les calculs intermédiaires on gardera donc des chiffres qui peuvent être non significatifs.

Exemples

Si y = 12,3257 et $u_c(y)$ estimé à 0,232 avec k = 2. Alors $U = 0{,}464$. L'erreur d'arrondissage devra alors être inférieure à 0,04. On arrondit donc au 1/100 près. Par conséquent, on prendra :

$$y = 12{,}32 \pm 0{,}47$$

Si y = 123,385 et $u_c(y)$ estimé à 2,892 avec k = 2. Alors $U = 5{,}784$. L'erreur d'arrondissage devra alors être inférieure à 0,57. On arrondit donc au 1/10 près. Par conséquent, on prendra :

$$y = 123{,}4 \pm 5{,}8$$

Cependant, le calcul d'incertitude, basé sur des estimations s'appuie sur des approximations (connaissance des lois) et des connaissances imparfaites (nature des sources d'erreurs). Il est lui-même soumis à incertitude…

On peut estimer que dans le cas d'une estimation d'une grandeur comme la moyenne de n valeurs, le pourcentage d'incertitude sur l'incertitude proposée est $r \approx \frac{1}{\sqrt{(2n-1)}}$ (voir annexe 8)

Ainsi l'incertitude sur l'incertitude déterminée sur la moyenne de 10 valeurs est de l'ordre de 25%, et celle sur la moyenne de 50 valeurs de l'ordre de 10%.

Ce résultat justifie le choix qui a été fait dans le document proposé par l'Inspection Générale de Physique de ne conserver qu'un seul chiffre significatif.

On pense souvent que les méthodes d'évaluation de type A de l'incertitude, déterminée à partir de données statistiques donnent des résultats plus fiables que ceux obtenus à partir d'hypothèses sur les lois de probabilités suivies par les erreurs supposées. L'évaluation ci-dessus de l'imprécision de l'incertitude de type A, relativise fortement cette assertion !

2. Présentation des résultats

Lorsqu'on exprime le résultat d'un mesurage et son incertitude, il est bon de donner un maximum d'informations sur les conditions d'obtention des résultats annoncés, par exemple :

- Décrire les méthodes utilisées ;
- Donner la liste des composantes de l'incertitude et la manière dont elles ont été évaluées ;
- Présenter l'analyse des résultats de telle façon que ces derniers puissent être réutilisés ;
- Les résultats préciseront, au minimum, le facteur d'élargissement et le niveau de confiance de l'intervalle estimé.

Par exemple :

y = 5,324 mm ± 0,046 mm où l'incertitude exprimée est une incertitude élargie d'un facteur k =3. Cette incertitude définit un intervalle estimé avoir un niveau de confiance proche de 99 %.

C. En conclusion

Pour déterminer une incertitude sur un mesurage :

- Choisir une méthode de mesurage.
- Modéliser le mesurage :
  - Déterminer les différentes variables qui entrent dans le mesurage.
  - Déterminer les grandeurs d'influence.
  - Déterminer la fonction mathématique qui lie ces variables.
- Déterminer les composantes de l'erreur sur chacune des variables.
  - Lister les composantes aléatoires et les composantes systématiques.
- Déterminer les incertitudes-types sur chacune des variables.
  - Estimations de type A (statistiques) ou de type B (probabilistes)
  - Éventuelle Incertitude – type composée sur chaque variable
- Déterminer l'incertitude – type composée sur le mesurage.
- Déterminer le facteur d'élargissement (associé à la loi supposée représenter la répartition des valeurs prises par le mesurande).
- Donner l'incertitude élargie sur le mesurage avec ses caractéristiques.

D. Un exemple

Reprenons l'exemple traité de la dimension en fond de rainure. On a les données suivantes :

La pige w_1 est une pige de 8mm. Le certificat d'étalonnage indique que « l'incertitude à deux sigmas » est de 2µm.

La pige w_2 est une pige de 12mm. Le certificat d'étalonnage indique que « l'incertitude à deux sigmas » est de 2µm.

Les mesures de longueurs sont effectuées à l'aide d'un pied à coulisse au 1/100 dont l'erreur de justesse maximale est de 30µm.

On suppose que la salle de mesure est maintenue à une température régulée de 20°C.

- la méthode de mesure choisie est celle avec deux piges, afin de s'affranchir du contrôle de la mesure de l'angle.
- la modélisation mathématique est donnée par $d = \dfrac{L_1 w_2 - L_2 w_1}{w_2 - w_1}$
- déterminons les sources d'incertitude sur les résultats obtenus :
  - incertitudes liées aux manipulations ;
  - incertitude de justesse de l'appareil de mesure ;
  - incertitude sur le diamètre des piges ;
  - incertitude due à la forme de l'objet (en partie prise en compte dans a)) ;
  - incertitude dues aux conditions environnementales : stabilité de la température, différence de température entre la pièce et les piges… (négligée, car faible devant a)).
- déterminons les valeurs des coefficients :

On a : $c_1 = \dfrac{\partial d}{\partial L_1} = \dfrac{w_2}{w_2 - w_1} = 3$, $\quad c_2 = \dfrac{\partial d}{\partial L_2} = \dfrac{-w_1}{w_2 - w_1} = -2$,

$c_3 = \dfrac{\partial d}{\partial w_1} = \dfrac{-(L_2 - L_1)w_2}{(w_2 - w_1)^2} = -5{,}121$ et enfin $c_4 = \dfrac{\partial d}{\partial w_2} = \dfrac{(L_2 - L_1)w_1}{(w_2 - w_1)^2} = 3{,}414$

En prenant $w_1 = 8$, $w_2 = 12$, pour valeur de L_1 la moyenne 52,35 des 10 valeurs et pour valeur de L_2 la moyenne 59,178 des 10 valeurs

- déterminons les incertitudes sur les quatre variables :

L'incertitude-type sur L_1 a déjà été calculée et elle a pour valeur 0,0190

L'incertitude-type sur L_2 se calcule de même et elle a pour valeur 0,0192 avec $u_A = 0{,}00780$ mm et $u_B = \dfrac{0{,}030}{\sqrt{3}}$ mm (instrument vérifié)

L'incertitude-type sur w_1, comme sur w_2 est 0,0010 mm (0,0020 mm représente deux écarts-types)

• Résumons les résultats dans un tableau, les données sont exprimées en mm :

Composantes	Sources d'incertitudes	$u(x_i)$	c_i	$\lvert c_i \rvert u(x_i)$	Poids relatif
$u(L_1)$		0,0190	3	0,0570	68,2%
s_9	Observations répétées	0,00816			
u_j	Erreur de justesse du PAC	$0{,}03/\sqrt{3}$			
$u(L_2)$		0,0192	– 2	0,0384	31%
s_9	Observations répétées	0,00780			
u_j	Erreur de justesse du PAC	$0{,}03/\sqrt{3}$			
$u(w_1)$	Donnée constructeur (2 sigmas)	0,001	– 5,121	0,00512	0,55%
$u(w_2)$	Donnée constructeur (2 sigmas)	0,001	3,414	0,00341	0,25%

On a alors $u_c^2(d) = (0{,}0570)^2 + (0{,}0384)^2 + (0{,}00512)^2 + (0{,}00341)^2 = 0{,}00478....$
D'où $u_c(d) = 0{,}069...$
Avec un coefficient d'élargissement $k = 2$, on prendra $U = 0{,}14$ mm.

Le poids faible des incertitudes associées à des variables rectangulaires nous permet raisonnablement de faire l'hypothèse que la variable d suit approximativement une loi normale.

• En conclusion :

L'incertitude sur d élargie d'un facteur $k = 2$ vaut 0,14 mm ; cette incertitude définit un intervalle estimé avoir un niveau de confiance proche de 95%.

Remarque 1 :

À la lecture de ce tableau, on peut remarquer la part importante de l'incertitude sur les calculs de longueurs ; une analyse de l'incertitude obtenue à partir d'une méthode s'appuyant sur une estimation de l'angle α permettrait d'évaluer la pertinence du choix de cette méthode.

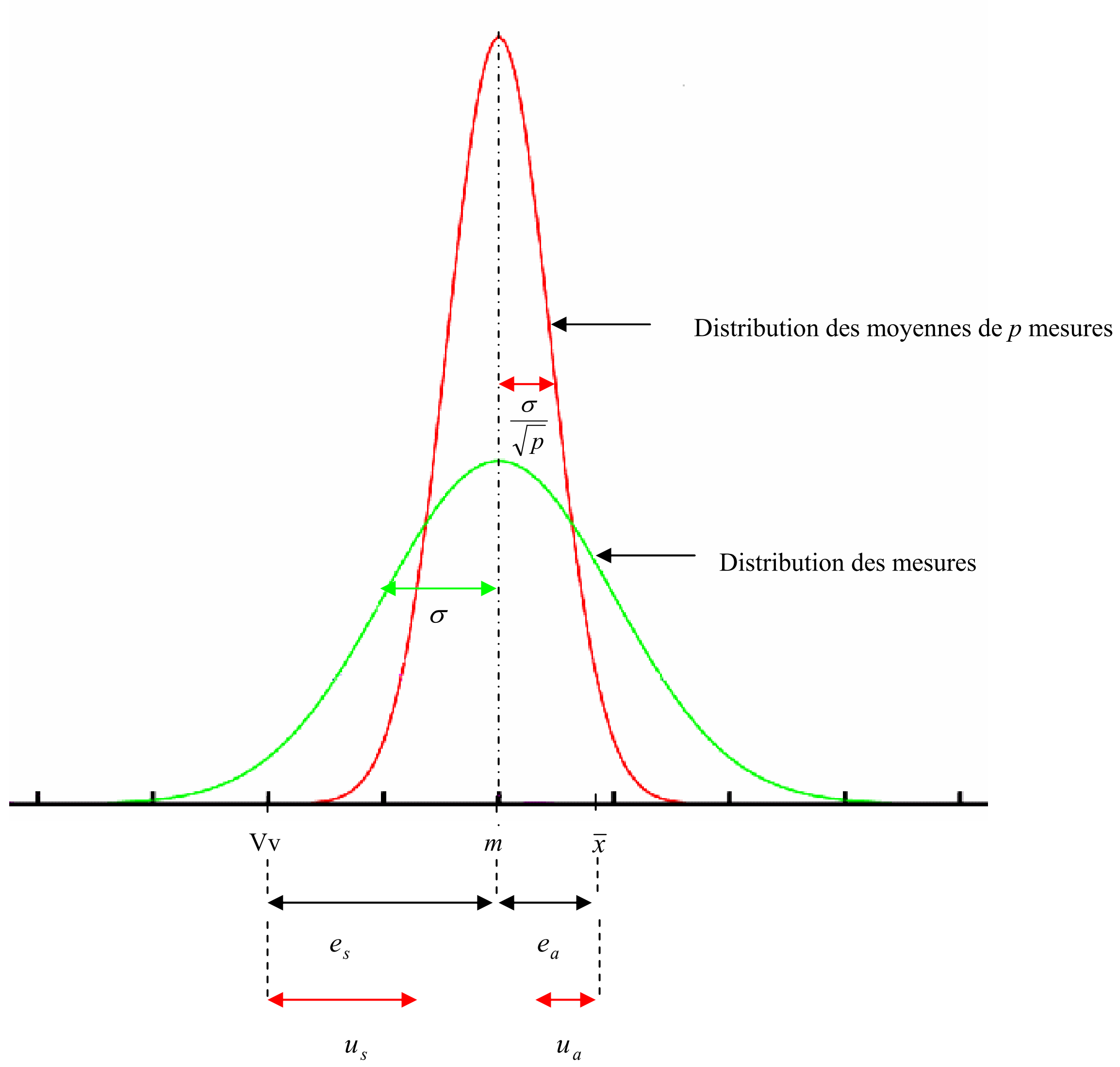
Remarque 2 :

Un logiciel, développé par Jean-Marie Biansan permet d'automatiser les calculs. Il est disponible à l'adresse : http://jeanmarie.biansan.free.fr/logiciel.html

IV. Annexes

Annexe 1 : Les incertitudes-types sur le mesurage d’une grandeur

1. Mesure sans correction



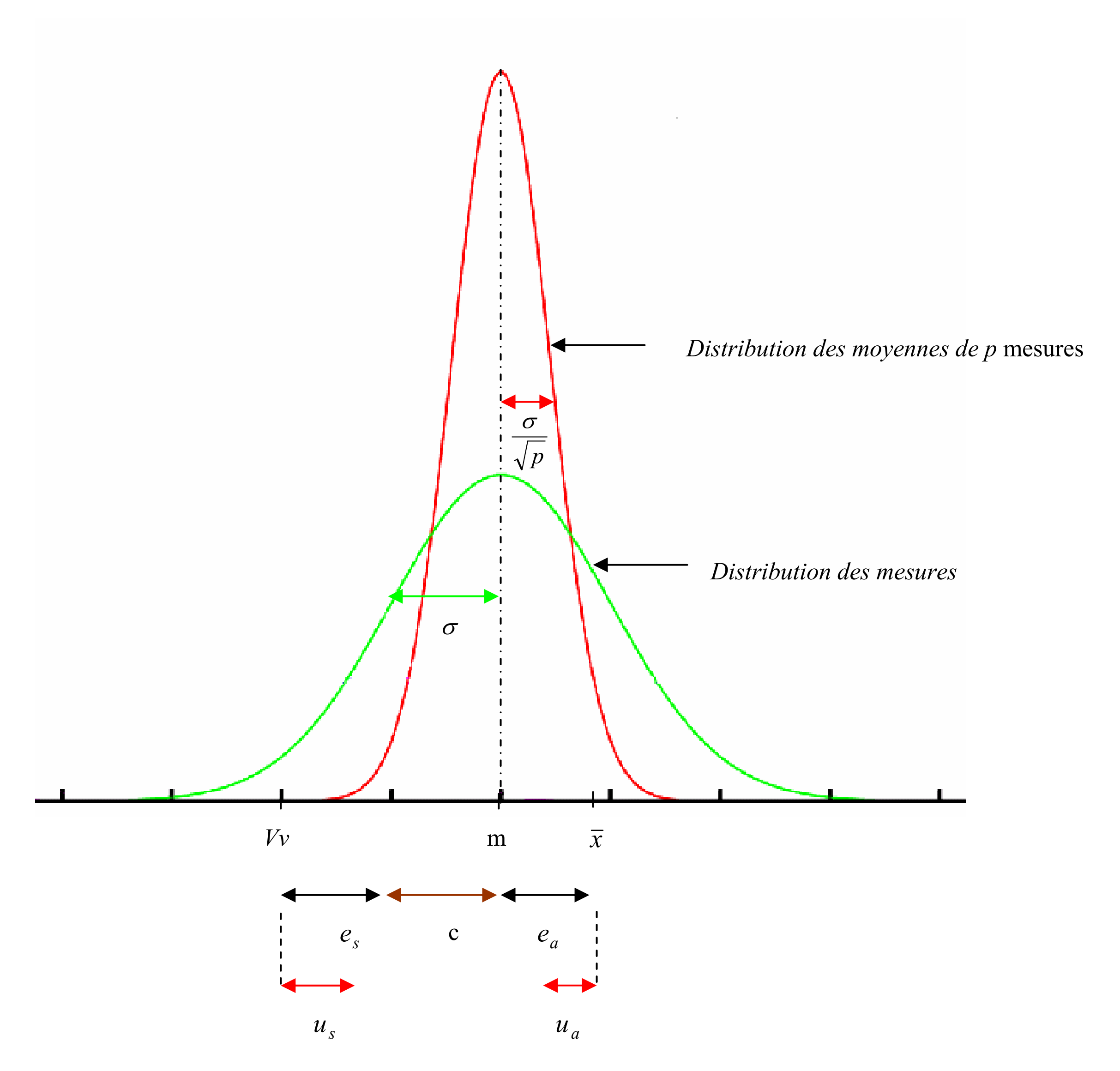
La grandeur est estimée par la moyenne $\bar{x}$ de p mesures

- m est la moyenne de la population infinie des mesures
- est l’écart-type de la population infinie des mesures
- V.v est la valeur vraie (idéale)
- e_s est l’erreur systématique sur le mesurage
- e_a est l’erreur aléatoire sur la moyenne $\bar{x}$ des p mesures
- u_a est l’incertitude-type de l’erreur aléatoire sur les p mesures
- u_s est l’incertitude-type de l’erreur systématique

La meilleure estimation de *x* est $\bar{x}$

L’incertitude type sur la grandeur *x* est *u*(*x*) définie par $u(x)^2 = u_a(x)^2 + u_s(x)^2$

2. Mesure avec correction



La grandeur est déterminée à partir de la moyenne $\overline{x}$ de p mesures

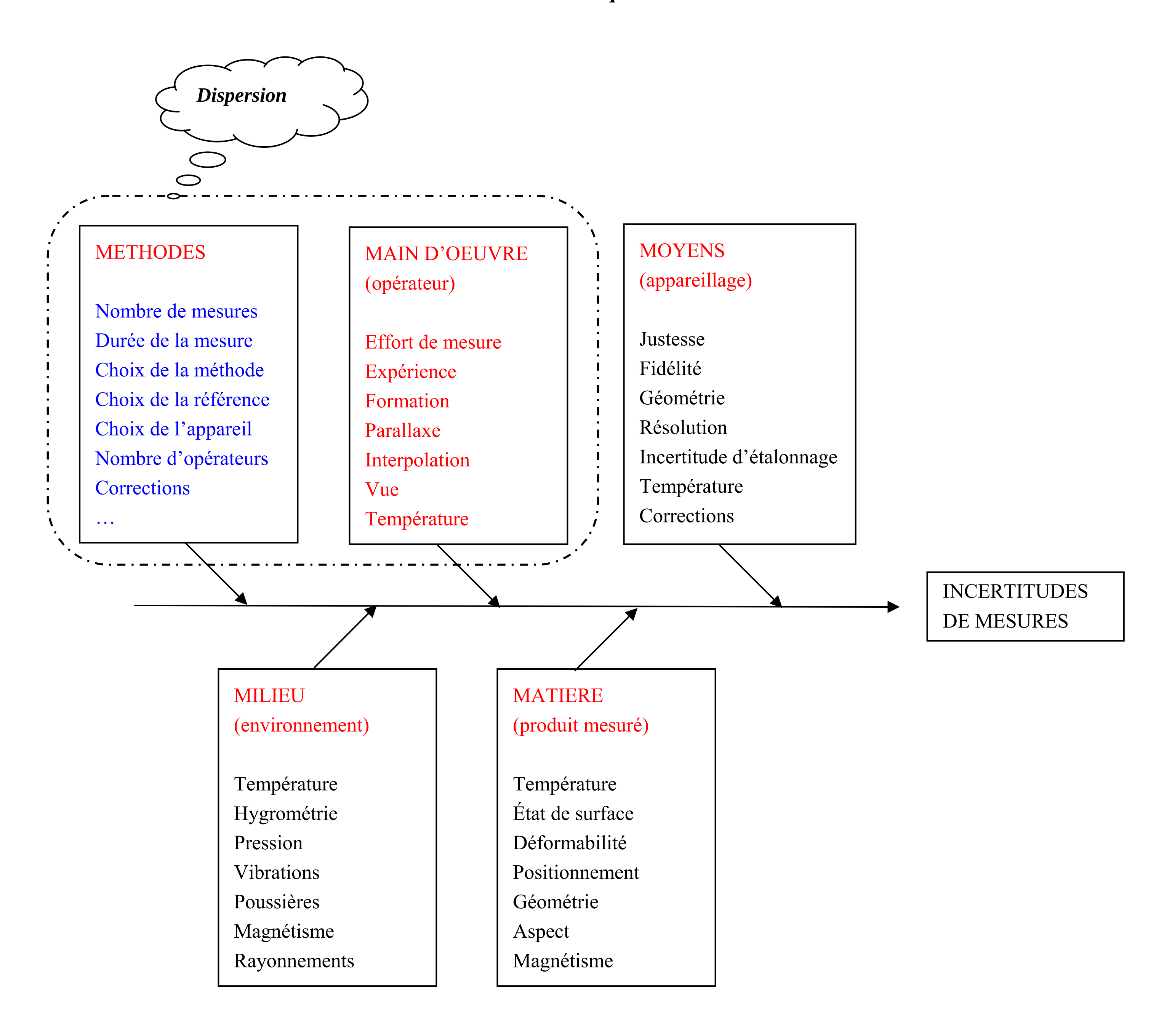
- m est la moyenne de la population infinie des mesures
- est l'écart-type de la population infinie des mesures
- V.v est la valeur vraie (idéale)
- c est la correction effectuée sur les mesures
- e_s est l'erreur systématique sur le mesurage
- e_a est l'erreur aléatoire sur la moyenne $\overline{x}$ des p mesures
- u_a est l'incertitude type de l'erreur aléatoire sur les p mesures
- u_s est l'incertitude type de l'erreur systématique sur la correction

La meilleure estimation de *x* est $\overline{x} - c$

L'incertitude type sur la grandeur *x* est *u*(*x*) définie par $u(x)^2 = u_a(x)^2 + u_s(x)^2$

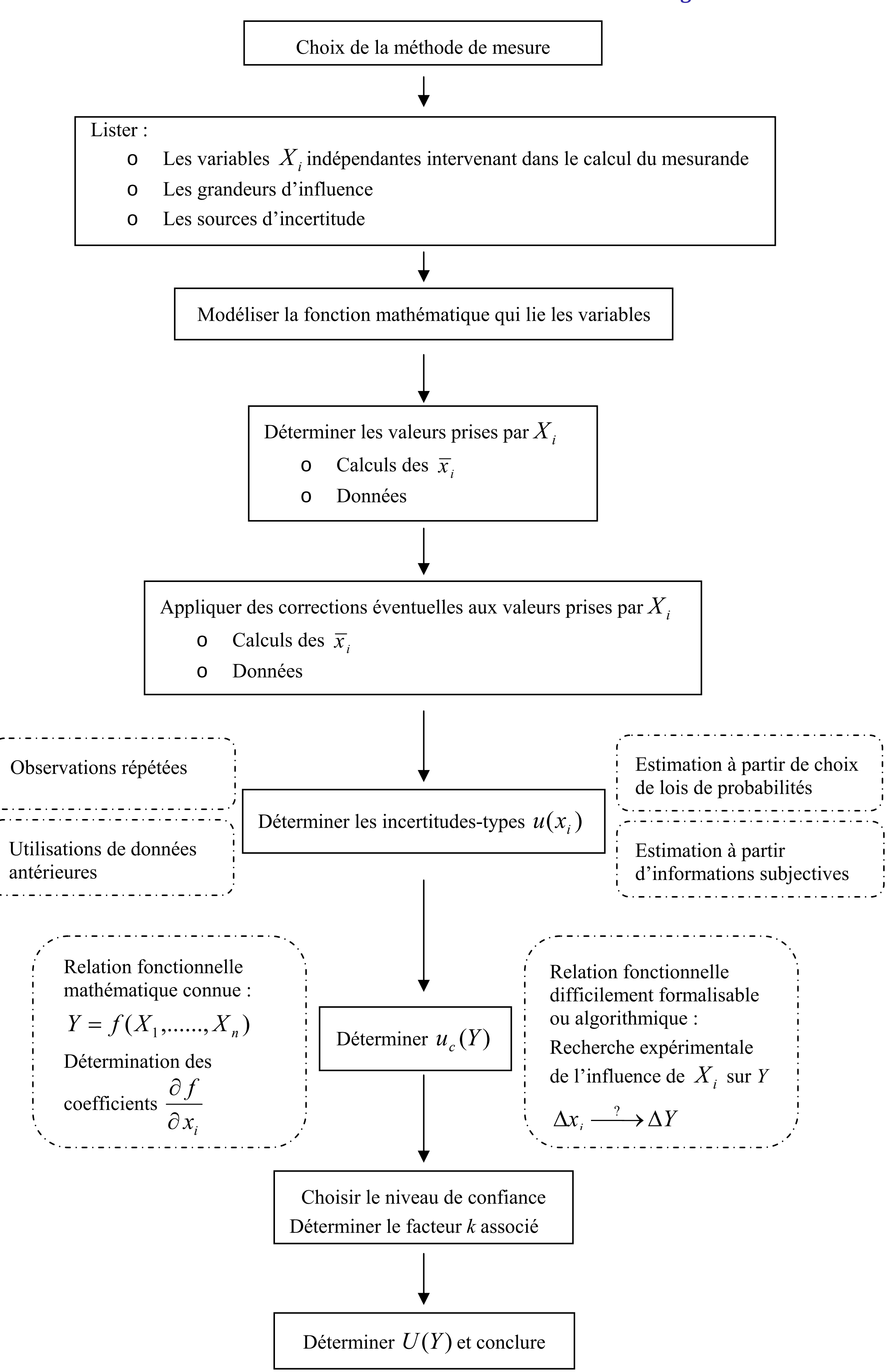
Annexe 2 : La Démarche de recherche des causes

Les « cinq M »



Source : Institut Méditerranéen de la Qualité

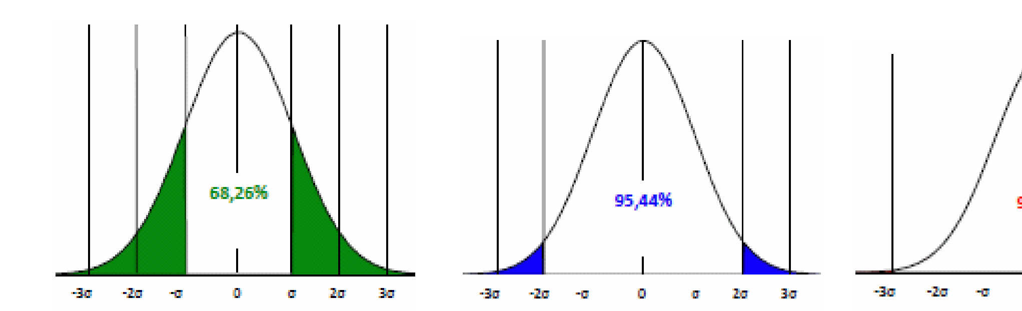
Annexe 3 : Démarche de détermination d'une incertitude sur une grandeur Y



Annexe 4 : Un rappel des lois de probabilité

1. Lois normales

Ces lois sont d'une grande importance car elles se trouvent être lois limites de la moyenne de variables aléatoires dans le cas de nombreuses lois, lors d'observations répétées de manière indépendante.



allure de la densité de $X - m$

Si une variable X suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ on a alors :

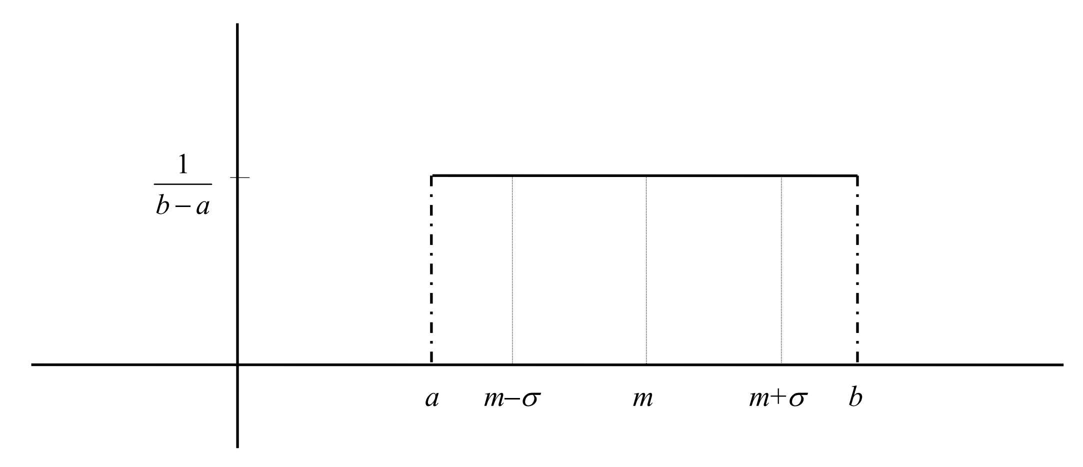
- Probabilité $(-\sigma \le X - m \le \sigma) \approx 0{,}68$
- Probabilité $(-2\sigma \le X - m \le 2\sigma) \approx 0{,}95$
- Probabilité $(-3\sigma \le X - m \le 3\sigma) \approx 0{,}997$

Cette dernière inégalité indique que quasiment la totalité des données sont situées entre -3σ et 3σ. On dit parfois que l'étendue des valeurs représente 6σ, ce qui permet de donner rapidement une estimation de l'écart-type en divisant cette étendue par 6.

2. Lois rectangulaires (ou lois uniformes)

Une variable X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a , b]$ si sa fonction de densité f est définie par

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ pour } a \le x \le b \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ sinon}$$



allure de la densité

La moyenne de X est $\frac{b+a}{2}$ et son écart-type est $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Par exemple dans l'utilisation d'un appareil numérique de résolution 0,01 unité et qui donne 12,46 comme affichage, on fait l'hypothèse que le résultat réel est avec la même probabilité $\frac{1}{10}$ entre 12,455 et 12,456, entre 12,456 et 12,457,…. ou entre 12,464 et 12,465.

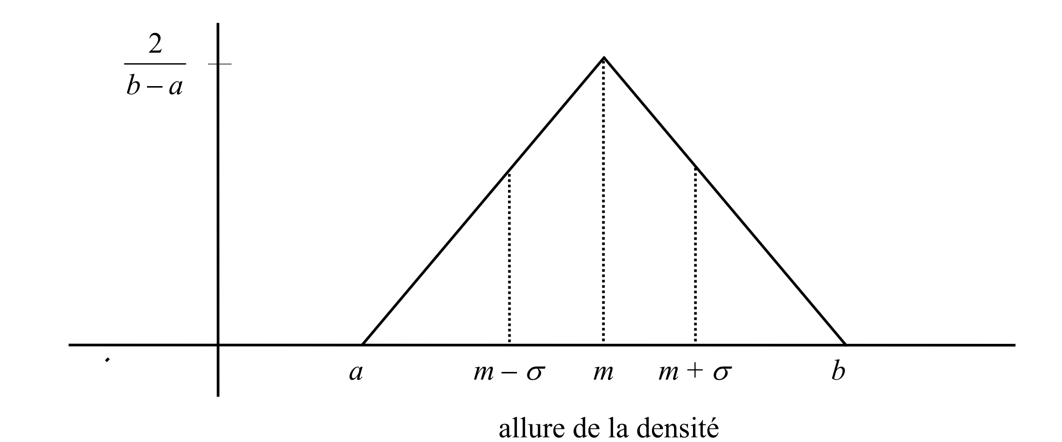
L'incertitude-type liée à la résolution de l'appareil sera $\frac{0{,}01}{2\sqrt{3}}$

Une remarque : cette loi est celle du « pire », c'est-à-dire que pour des valeurs que l'on sait comprises entre a et b, c'est la loi qui a le plus grand écart-type.

3. Lois triangulaires

Une variable X suit une loi triangulaire sur un intervalle [a , b] si sa fonction de densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} \text{ pour } a \leq x \leq \frac{b+a}{2} \;;\quad f(x) = \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} \text{ pour } \frac{b+a}{2} \leq x \leq b \;;\quad f(x) = 0 \text{ sinon}$$



allure de la densité

La moyenne de X est $\frac{b+a}{2}$ et son écart-type est $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{6}}$

Annexe 5 : Les recommandations de détermination d'incertitude de type B

1. Résolution d'une indication numérique.

Si la résolution d'un instrument numérique est d, la valeur X du signal mesuré peut se situer « avec une égale probabilité » à n'importe quel endroit de l'intervalle allant de $X - \frac{d}{2}$ à $X + \frac{d}{2}$.

Le signal mesuré suit donc une loi rectangulaire de largeur d

On prendra donc :

$$u(x) = \frac{d}{2\sqrt{3}}$$

Exemple : si un instrument de pesage a un dispositif indicateur dont le dernier chiffre significatif correspond à 1g, l'incertitude-type sur la résolution est $u = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ g soit environ 0,29g

2. Hystérésis

L'indication d'un instrument peut varier selon que les lectures se font par valeurs croissantes ou décroissantes. L'opérateur prudent note le sens des lectures successives et fait les corrections nécessaires. Cependant le sens de l'hystérésis n'est pas toujours décelable (oscillations autour d'un point d'équilibre par exemple) et on suppose alors que la loi de probabilité suivie par l'hystérésis est une loi rectangulaire.

Si l'étendue des lectures possibles dues à cette cause est δx, alors $u(x) = \frac{\delta x}{2\sqrt{3}}$

3. Arrondissage, calculs à précision limitée

L'arrondissage ou la troncature des nombres qui se produit dans les réductions automatiques de données par les ordinateurs peut aussi être source d'incertitude (problème de soustractions de nombres proches par exemple). Si une simulation de données proches sur les grandeurs d'entrées permet de déceler une variation sur la valeur de sortie, on suppose que cette valeur suit une loi rectangulaire.

Si δx *est la plus petite variation de la grandeur de sortie, alors* $u(x) = \frac{\delta x}{2\sqrt{3}}$

4. Incertitude-type sur un instrument vérifié

Si le métrologue utilise un instrument vérifié, ce dernier est conforme à une classe qui est définie par une limite $\pm\alpha$.

Si on suppose que les valeurs affichées suivent une loi rectangulaire, on prendra alors

$$u(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

Cependant, s'il y a des raisons de penser que les valeurs situées près de 0 sont plus probables que celles situées près de α ou $-\alpha$ on pourra penser que la loi de propagation de l'erreur est normale ou par prudence triangulaire ; on prendra alors :

$$u(x) = \frac{\alpha}{3} \textit{ (choix de normalité) } \text{ ou } u(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{6}}$$

5. Incertitude-type sur un instrument étalonné

Dans le cas d'un instrument étalonné, le certificat d'étalonnage annonce une incertitude U. En fait cette valeur U est égale à l'incertitude-type $u(x)$ multipliée par un facteur d'élargissement k (pratique justifiée en fin de document).

On prendra donc

$$u(x) = \frac{U}{k}$$

En principe, le facteur d'élargissement devrait être précisé avec l'incertitude donnée par le constructeur.

Si aucune précision n'est faite, on supposera que $k = 2$.

Remarque : on suppose en général que la détermination de l'incertitude-type obtenue s'appuie sur une loi de distribution de l'erreur normale.

6. Incertitude-type due aux effets de la température

En métrologie dimensionnelle, la température est un facteur d'influence de premier ordre. Pour en minimiser les effets, une méthode souvent employée est de comparer le mesurande à un étalon de référence de même longueur dont on connait la valeur « vraie » à la température de 20°C.

La température intervient à différents niveaux :

- écart de température avec 20°C noté Δt

La loi de propagation de l'erreur sur des grandeurs sous contrôle (par exemple température dans un bain régulé) demande une analyse fine de la nature des régulations ou une analyse statistique pertinente.

Dans un milieu climatisé, la loi de propagation de l'erreur sur l'écart à 20°C est en général assimilée à une loi en « dérivée d'arcsinus ». Dans ces conditions, on prendra :

$$u(\Delta t) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2}}$$

- écart de température entre le mesurande et les cales étalons noté δt

En général, on fait l'hypothèse que δt suit une loi normale et on prend alors

$$u(\delta t) = \frac{\delta t}{3}$$

Annexe 6[1] : La loi normale

L'établissement, au début du XIXe siècle, de la loi "normale", dont l'usage est fondamental en statistique, s'est fait par deux voies : celle, dans le cadre de la "théorie des erreurs", de la méthode des moindres carrés, qui aboutit avec ***Carl Friedrich Gauss*** (1777-1855), et celle des théorèmes limites, avec l'énoncé d'une première version du théorème limite central par ***Pierre Simon de Laplace*** (1749-1827).

L'astronomie et la géodésie sont à l'origine des questions théoriques sur la répartition des erreurs de mesure "accidentelles" (que l'on peut qualifier d'aléatoires), dues à l'addition de nombreux facteurs indépendants (conditions de la mesure, erreurs de lecture, de visée...), qui peuvent induire une erreur dans un sens ou dans l'autre. L'objectif est de pouvoir aller au delà de la précision d'un instrument, en "combinant" plusieurs mesures de la même quantité, de façon à calculer la "meilleure estimation" de cette dernière.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) publie en 1805 la méthode consistant à minimiser la somme des carrés des écarts. Indépendamment, *Gauss*, alors directeur de l'observatoire de Göttingen, parvient, dans le cadre de l'étude des orbites planétaires, à cette même **méthode des moindres carrés**, dit-il dès 1794 (il en conteste la paternité à *Legendre*, mais ne publiera qu'en 1809). L'originalité de *Gauss* est d'établir les liens qui existent entre cette méthode et les lois de probabilité, aboutissant à la "loi gaussienne" :

Il raisonne ainsi :

Soit une quantité θ inconnue, pour laquelle on possède plusieurs mesures x_1 , x_2, ..., x_n. On cherche à minimiser la somme des carrés des écarts $\sum_{i=1}^{n}(\theta - x_i)^2$. En considérant cette quantité comme une fonction de θ un simple calcul de dérivée montre que la valeur de θ rendant minimale la somme des carrés des erreurs est la moyenne : $\bar{x} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$

En envisageant la question d'un point de vue probabiliste, on considérera que les erreurs $e_1 = x_1 - \theta$, ..., $e_n = x_n - \theta$ sont des réalisations de n variables aléatoires indépendantes $E1$,..., En de même loi continue de densité f, dépendant de la valeur inconnue θ.

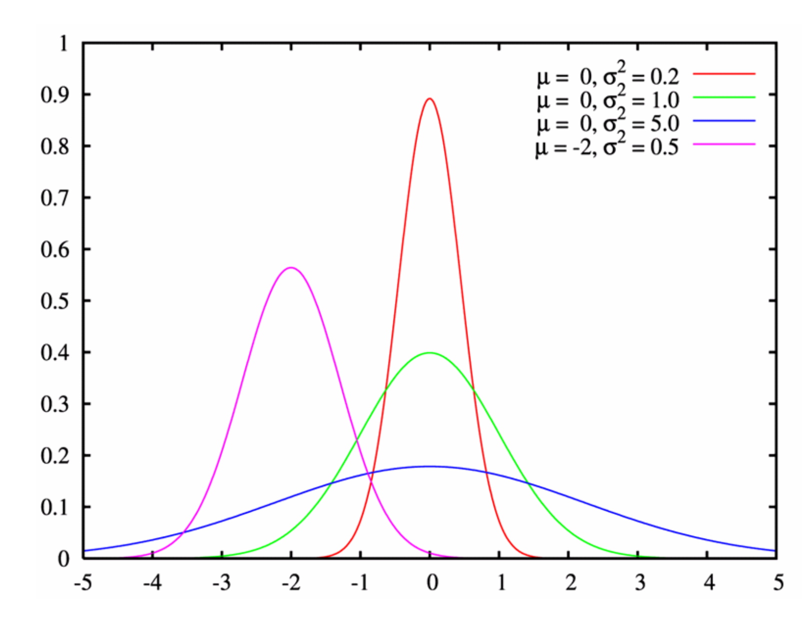
Pour θ donné, la probabilité d'effectuer des erreurs à la première mesure entre e_1 et $e_1 + \mathrm{d}e_1$ vaut environ $f(e_1)\,\mathrm{d}e_1$, et en vertu de l'indépendance des mesures, la probabilité que les erreurs se situent entre e_1 et $e_1 + \mathrm{d}e_1$,…. , e_n et $e_n + \mathrm{d}\,e_n$ est alors, $f(e_1) f(e_2) \ldots f(e_n)\,\mathrm{d}e_1\mathrm{d}e_2\mathrm{d}e_n$.

On peut alors retourner le raisonnement (à la façon de *Bayes*) et se demander, les mesures $x_1,....,x_n$ étant connues, quelle est la valeur de θ la plus vraisemblable. C'est à dire, quelle est la valeur de θ qui rendra maximale la probabilité d'observation des mesures $x_1,....,x_n$ (réellement observées) donc des erreurs $e_1,....,e_n$ Il s'agit de rechercher θ, donc f, de sorte que $f(e_1) f(e_2) \ldots f(e_n)\,\mathrm{d}e_1\mathrm{d}e_2\mathrm{d}e_n$ soit maximum (cette démarche est nommée "**maximum de vraisemblance**").

Sachant que la moyenne arithmétique $\bar{x} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$ correspond à la valeur recherchée de θ, Gauss en déduit par un calcul algébrique assez simple que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-kx^2}$.

La fonction f étant une fonction de densité, on montre que $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et plus généralement, on appelle loi normale de moyenne m et d'écart-type σ, la loi de densité f définie par $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$

[1] La partie historique de cette annexe s'appuie sur l'ouvrage suivant : DUTARTE Philippe, PIEDNOIR Jean-Louis ; *Enseigner la statistique au lycée : des enjeux aux méthodes*. IREM Université Paris 13



Exemples de densité de lois normales de moyenne μ et de variance σ^2

Ainsi lorsque, lors de mesures, l'addition de plusieurs facteurs aléatoires indépendants (et sensiblement équivalents) induit des erreurs, celles-ci se répartissent selon la loi de *Gauss* et la moyenne arithmétique des mesures fournit l'estimation qui minimise la somme des carrés des erreurs.

L'approche de ***Laplace*** se situe dans la voie des **lois limites**. Il montre, que sa *"seconde loi des erreurs"* (qui est la loi de gauss présentée précédemment) approche la distribution des moyennes arithmétiques de *n* erreurs indépendantes de même loi.

Laplace et *Gauss* réalisent ainsi, au début du XIXème siècle, une synthèse entre l'approche empirique des moindres carrés et celle, probabiliste, des lois limites. Avec *Laplace*, la loi normale s'impose comme presque universelle. En effet, même si la distribution individuelle des erreurs ne suit pas une loi normale, celle des moyennes des erreurs suit approximativement, sous certaines conditions (indépendance, lois identiques), une loi normale.

Plus précisément on peut énoncer un résultat qui est central dans la théorie des probabilités :

Soient X_i des variables aléatoires indépendantes de même moyenne *m* et d'écart type σ. Pour *n* suffisamment grand, la variable $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit approximativement la loi normale de même moyenne *m* et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ce qui signifie que si les X_i suivent une loi **quelconque** de moyenne *m* et d'écart-type σ alors la variable aléatoire $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit approximativement une loi normale.

Ainsi, on peut schématiquement dire que si on considère que l'ensemble des mesures d'une grandeur est associé à une distribution par exemple uniforme, alors si à chaque série de mesures on associe la moyenne de ces mesures, la distribution de l'ensemble de ces moyennes est approximativement normale.

Deux remarques :

- Si la loi suivie par les variables X_i est normale, la loi suivie par $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est exactement normale.
- plus la valeur de n est grande, meilleure est l'approximation.

En fait ce résultat se déduit d'un théorème plus général de convergence très utilisé dans la théorie probabiliste des erreurs, le théorème limite central (TLC) :

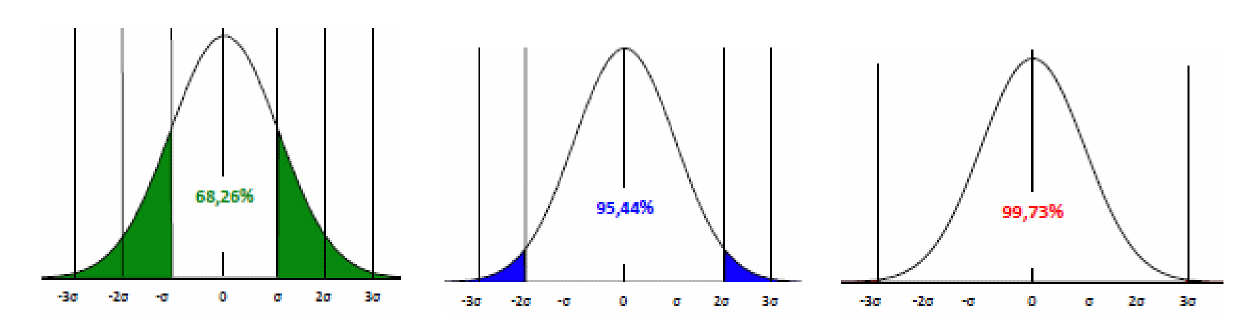
Soient X_i des variables aléatoires indépendantes de même moyenne m et d'écart type σ. , on note $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ et T une variable qui suit la loi normale de moyenne nulle et d'écart type 1.

Alors pour toute valeur de z, $P(Z_n < z)$ tend vers $P(T < z)$ quand n tend vers $+\infty$.

On dit que la variable $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ converge en loi vers la variable T.

C'est ce théorème qui permet de justifier ce que l'expérimentation permet de constater : dans des conditions de mesurages où les incertitudes prennent des valeurs du même ordre, alors la variable aléatoire qui modélise l'erreur suit approximativement une loi normale.

Propriétés de la loi normale



Si une variable X suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ alors on a alors :

- Probabilité $(-\sigma \leq X - m \leq \sigma) \approx 0{,}68$
- Probabilité $(-2\sigma \leq X - m \leq 2\sigma) \approx 0{,}95$
- Probabilité $(-3\sigma \leq X - m \leq 3\sigma) \approx 0{,}997$

Cette dernière inégalité indique que quasiment la totalité des données sont situées entre -3σ et 3σ

On dit parfois que l'étendue des valeurs représente 6σ, ce qui permet de donner une estimation grossière de l'écart-type en divisant cette étendue par 6.

Il va être important de pouvoir vérifier si la loi considérée est normale, c'est ce qui est fait au travers de « tests de normalité ».

Tests de normalité

Dans un test de normalité on compare la distribution d'un échantillon de données avec la distribution « théorique » attendue sous l'hypothèse que cet échantillon correspond à un tirage de données des valeurs prises par une variable aléatoire qui suit une loi normale.

Le plus simple est graphique (droite de Henry), ce qui a pour intérêt une grande simplicité mais pour inconvénient de mal maîtriser le niveau d'approximation. D'autres tests peuvent être mis en œuvre comme le test du Khi2 qui permet de se donner une règle de décision ou encore celui de Kolmogorov qui affine le risque d'erreur.

On ne développera ci-dessous que le test de Henry.

Le principe de la droite de Henry (du nom d'un artilleur qui avait mis au point cette méthode pour l'étude de précision des tirs) est simple ; l'idée étant, à l'aide d'un changement de variable, d'ajuster les données avec une droite, et d'utiliser la régression linéaire selon les moindres carrés pour quantifier la qualité de l'ajustement d'une distribution statistique observée avec celle d'une loi normale.

Pour cela on compare la fréquence cumulée des données jusqu'à une valeur x_i avec la probabilité « théorique » jusqu'à cette même valeur.

Ainsi, si on considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(m;\ \sigma)$, sa fonction de répartition F est donnée, pour tout $x \in$ IR, par :

$y = F(x) = P(X \leq x) = P(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}) = \Pi(t)$ avec $t = \frac{x-m}{\sigma}$ et Π la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite dont les valeurs sont données dans des tables.

Si on considère maintenant la série des données, l'analogue de la fonction de répartition est la fréquence cumulée ; pour une valeur x_i de la distribution statistique, on note y_i la fréquence cumulée croissante.

Si la loi de la distribution des données est normale, les fréquences y_i cumulées des données jusqu'à une valeur x_i doivent correspondre à des probabilités données par la table de la loi normale.

C'est-à-dire qui si on note t_i la valeur, donnée par lecture inverse de la table de la loi normale centrée réduite pour la fréquence cumulée y_i (donc telle que $y_i = \Pi(t_i)$), alors le nuage de points (x_i ; t_i) devrait être aligné ou tout du moins correctement ajusté par la droite d'équation $t = \frac{x-m}{\sigma}$ que l'on nomme **droite de *Henry*** .

Remarque : le tracé de cette droite permet également de donner une estimation de m et σ.

Prenons un exemple :

Un mesurage fournit les 50 données suivantes :

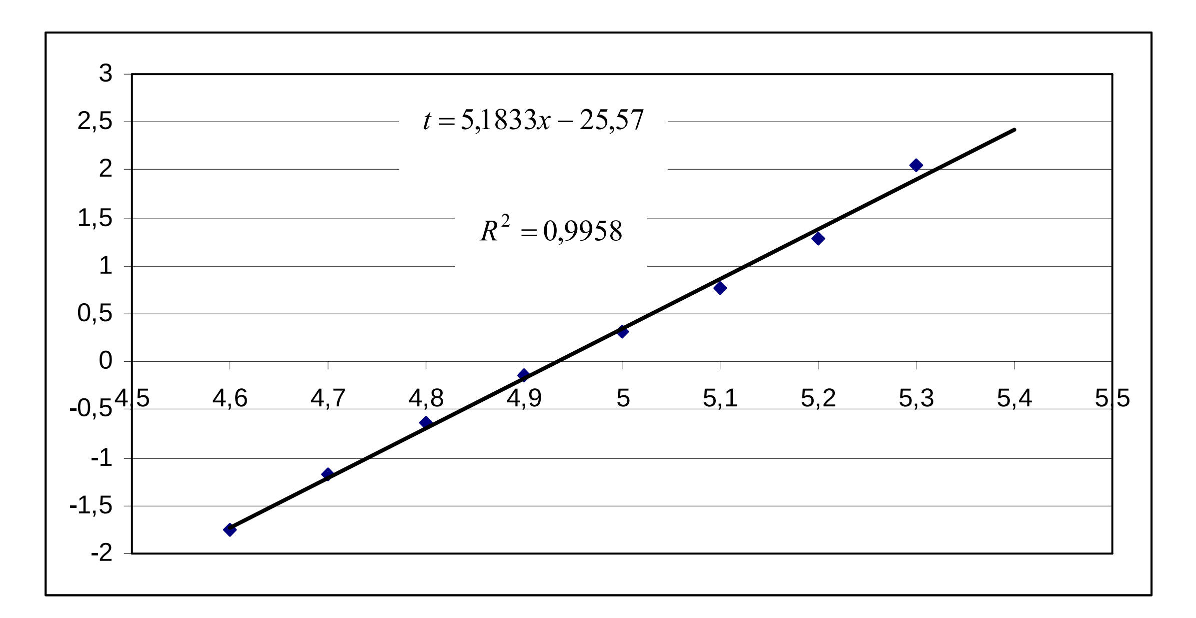
x_i	4,6	4,7	4,8	4,9	5	5,1	5,2	5,3	5,4
n_i	2	4	7	9	9	8	6	4	1

On s'interroge sur la normalité des données.

On complète le tableau par les fréquences, les fréquences cumulées et les valeurs de t_i associées, lues dans une table donnant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

x_i	4,6	4,7	4,8	4,9	5	5,1	5,2	5,3	5,4
n_i	2	4	7	9	9	8	6	4	1
Fréquences f_i	0,04	0,08	0,14	0,18	0,18	0,16	0,12	0,08	0,02
Fréquences cumulées y_i	0,04	0,12	0,26	0,44	0,62	0,78	0,90	0,98	1
t_i	–1,75	–1,17	–0,64	–0,15	0,31	0,77	1,28	2,05	

Il suffit alors de tracer le nuage des points (x_i ; t_i) et de déterminer l'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés, par exemple avec l'aide d'un tableur. La valeur du coefficient de corrélation est un indicateur de la qualité de la « normalité ».



Le nuage de points (x_i ; t_i) est approximativement « linéaire » et le coefficient de corrélation est très proche de 1. On peut accepter le fait que les données sont issues d'une distribution approximativement normale.

On a $\frac{1}{\sigma} = 5{,}1833$ et $\frac{m}{\sigma} = 25{,}57$ d'où on déduit que l'on peut estimer σ par 0,19 et m par 4,93.

Remarque :

Il existe un papier dit « gausso-arithmétique » qui permet de contrôler « au jugé » la normalité des données en plaçant directement sur un graphique, non pas les points (x_i ; t_i) mais les points (x_i ; y_i). Sa grande simplicité fait son intérêt et il est encore employé.

Annexe 7 : Incertitude composée

On note μ_i l'espérance $E(X_i)$ de chacune des variables et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n)$; en général ces espérances ne sont pas connues mais estimées par x_i (qui peut être une moyenne ou non d'observations). Si on note $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, on peut estimer $E(Y)$ par $f(x)$ ou par la moyenne $\overline{y}$ de n observations répétées.

Commençons par le cas d'une fonction linéaire de deux variables $Y = f(X_1, X_2) = k_1 X_1 + k_2 X_2$;

$Y = k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + k_1(X_1 - \mu_1) + k_2(X_2 - \mu_2)$ et $\overline{Y} = k_1\mu_1 + k_2\mu_2 = f(\mu)$

D'où $Y = f(\mu) + \frac{\partial f}{\partial X_1}(\mu)(X_1 - \mu_1) + \frac{\partial f}{\partial X_2}(\mu)(X_2 - \mu_2)$

Ainsi, si on généralise au cas d'une **fonction linéaire** de n variables, $Y = k_1 X_1 + k_2 X_2 \ldots\ldots + k_n X_n$

Chacun des coefficients k_i est la dérivée partielle de f par rapport à la variable X_i, les dérivées seconde sont toutes nulles et un développement de Taylor de f au voisinage de μ se réduit à :

$Y = f(\mu) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)(X_i - \mu_i)$ et par conséquent,

$$(Y - f(\mu))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)(X_i - \mu_i)\right)^2$$

$$(Y - f(\mu))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)\right)^2 (X_i - \mu_i)^2 + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)\frac{\partial f}{\partial X_j}(\mu)(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)$$

$$E(Y - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)\right)^2 E(X_i - \mu_i)^2 + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)\frac{\partial f}{\partial X_j}(\mu)E((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j))$$

Soit :

$$\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)\right)^2 \sigma^2(X_i) + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)\frac{\partial f}{\partial X_j}(\mu)\operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

Dans le cas où les variables $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ sont indépendantes et f est linéaire, on a donc

$\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)\right)^2 \sigma^2(X_i)$ et par conséquent $u_c^{\,2}(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)\right)^2 u^2(x_i)$

Remarque : dans la pratique on estime μ par $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ et on remplace la notation $\frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu)$ par $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ On écrit alors $u_c^{\,2}(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$.

Dans le cas général, les erreurs étant considérées comme « petites » devant les variables, on procède à un développement de Taylor au rang 1 de f au voisinage de $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$, ce qui revient à dire qu'en un point, on assimile une courbe à sa tangente, une surface à son plan tangent. On calcule alors l'incertitude composée sur y à l'aide de la formule présentée ci-dessus.

Annexe 8 : Incertitude sur l'incertitude

Si nous reprenons le cas de l'estimation de type A d'une grandeur *X*, considérée comme une variable aléatoire. On a noté $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un *n*-échantillon de *X*, où X_i représente la variable aléatoire associée à la $i^{\text{ème}}$ mesure de la grandeur X ; la variable $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur de la moyenne de X et $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ est un estimateur de la variance de *X*.

On sait alors que $\frac{S}{\sqrt{n}}$ est un estimateur de l'écart-type de $\overline{X}$, qui caractérise l'incertitude sur la grandeur *X*.

Par conséquent, pour estimer ce que représente en pourcentage l'incertitude sur cette incertitude sur *X*, on détermine le rapport de l'écart type de $\frac{S}{\sqrt{n}}$ par la moyenne de $\frac{S}{\sqrt{n}}$, c'est-à-dire $r = \frac{\sqrt{\text{var}(\frac{S}{\sqrt{n}})}}{E(\frac{S}{\sqrt{n}})}$

Dans un cas général, ce rapport est difficilement calculable. Cependant, si la variable *X* suit une loi normale alors on montre que la variable $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ suit une loi du χ^2 à $(n - 1)$ degrés de liberté, et on montre alors que $r \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$

(On en trouve une démonstration calculatoire mais originale dans le livre de John Taylor)

Ainsi l'incertitude sur l'incertitude sur la moyenne de 10 valeurs est de l'ordre de 25%, et celle sur la moyenne de 50 valeurs de l'ordre de 10%.

Ce résultat justifie le choix qui a été fait dans le document proposé par l'Inspection Générale de Physique de ne conserver qu'un seul chiffre significatif.

On pense souvent que les méthodes d'évaluation de type A de l'incertitude, déterminée à partir de données statistiques donnent des résultats plus fiables que ceux obtenus à partir d'hypothèses sur les lois de probabilités suivies par les erreurs supposées. L'évaluation ci-dessus de l'imprécision de l'incertitude de type A, relativise fortement cette assertion !

V. Bibliographie

Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM version originale de 1995, revue et corrigée en 2008), téléchargeable sur le site du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) à l'adresse http://www.bipm.org/fr/publications/guides/gum.html

Nombres, mesures et incertitudes (Inspection générale Sciences Physiques et Chimiques). Eduscol http://media.eduscol.education.fr/file/PC/66/3/Ressources_PC_nombres_mesures_incertitudes_144663.pdf

Quantifier l'incertitude dans les mesures analytiques. CITAC, téléchargeable sur le site du Laboratoire National de Métrologie et d'Essais (LNE) à l'adresse : http://www.lne.fr/publications/eurachem_guide_incertitude_fr.pdf

DUTARTE Philippe, PIEDNOIR Jean-Louis ; *Enseigner la statistique au lycée : des enjeux aux méthodes*. IREM Université Paris 13

LECOLLINET Michel *Evaluation et expression des incertitudes de mesures*. (CNAM)

MOREAU René. *Mesures, erreurs et incertitudes en physique chimie*. La pluridisciplinarité dans les enseignements scientifiques. Actes du séminaire d'été 9 au 13 juillet 2001

PRIEL Marc, PERRUCHET Christophe. *Estimer l'incertitude, mesures, essais*. AFNOR

ROBERT Claudine, TREINER Jacques. *Incertitude des mesures de grandeur* ; téléchargeable à l'adresse : http://www.statistix.fr/IMG/pdf/erreurs_et_dispersion.pdf

TAYLOR John. *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques*. Dunod 2000

(remarque : ce livre américain n'est pas totalement dans l'approche probabiliste, il est en partie seulement conforme à la norme AFNOR)